高等学校教学用書

# 綫性空間引論

Г. Е. 希洛夫著

高等教育出版社

12

高等学校教学用書

# 綫性空間引論

Г. Е. 希洛夫著

王梓坤 吳大任 陈 鶚 周学光
金子瑜 高鴻勛 曾鼎鉌 董克誠 譯

高等教育出版社

本書系根据1956年苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的希洛夫（Г. Е. Шилов）著“綫性空間引論”（Введение в теорию линейных пространств）第二版譯出的。原書經苏联高等教育部审定为綜合大学教科書。

参加这本書的翻譯工作的有南开大学数学系七人：王梓坤、吳大任，陈鷀、周学光，金子瑜，高鴻勛，曾鼎鉌及天津师范学院数学系董克誠。


**綫 性 空 間 引 論**

Г. Е. 希 洛 夫 著

周 学 光 等 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業营業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　　新华書店总經售

統一書号 13010·352　開本 850×1168 1/32　印張 9 15/16　字數 279,000　印數 0001—2,800

1957年10月第1版　1957年10月北京第1次印刷　定價(8) ¥1.10

# 第二版序言

本書是根据著者近年在以罗蒙諾索夫命名的国立莫斯科大学和以雪夫琴軻命名的国立基輔大学里所进行的課堂講授和討論班的材料，加以修訂而成的。

这本書的內容包括綫性代数的必讀部分和它在分析上若干应用的闡述，以及一系列的和它們接近的問題（用小号字排印的），这些問題，可以用于專題討論和家庭作業。

与这本書的基本內容相配合的，还有一系列的習題。在很大程度上，这些習題可以訓練專門技巧；它們一般地是說明和推广課本中的主要材料，也可以用于專題討論。部分習題采自各种的習題集，其中我們必須提到 Д.К.法杰叶夫与 И.С.索明斯基的"高等代数習題集"和 Н.М.肯杰尔与 Р.О.庫茲明的"高等数学習題集"。

在第二版里，在內容方面有些地方作了重新安排；也有一点点补充（关于不相容組和最小二乘方法以及一系列的新習題）。关于無尽維空間的叙述，省略了很多：在第一版的第 12, 13, 14 三章中，現在只留下第 12 章，这里面是一些关于無尽維欧氏空間的几何性質的問題（福氏級数积分方程的几何解釋）。第一版里原有的关于度量空間和有模空間的部分，現在删掉了，因为它們脫离了本書的主要方向；这个問題在現在的教材里（特殊地，在 А.Н.柯英果洛夫与 С.В.佛明的"函数論和泛函分析初步"一書里）已經有相当多的完备的叙述。

作者对于第一版的編輯 Н.В.叶非莫夫以及 Д.А.拉伊可夫表示誠恳的感謝，前者对本書的改进給了很多的帮助，后者讀完了本書的初稿并且提供了一系列的宝貴的意見。

Г.希洛夫

# 目　次

# 第一章 行列式

## §1. 綫性方程組

我們在这一章和下兩章里研究綫性方程組。

一般綫性方程組的形狀为：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n&=b_k. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

这里的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示待决定的未知数（注意：在此并未假定未知数的个数必須等于方程的个数）。我們把 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{kn}$ 叫作方程組的系数。各系数的第一下标表示它所在的方程的号碼，第二下标表示具有此系数的变数的号碼[①]。方程組 (1) 右端的量 $b_1$, $b_2, \cdots, b_k$ 叫作方程組的常数項，它們和系数都假定为已知的。

若一組数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，代替了方程組 (1) 中的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之后，使这組的每一个方程都变成恒等式，則这組数就叫作方程組的解[②]。

并不是具形狀(1)的每一个綫性方程組都有解。例如方程組

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2&=5,\\ 2x_1+3x_2&=6 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

就沒有解。实际上，將任何数 $c_1, c_2$，代替了未知数 $x_1, x_2$ 之后，都使(2)里兩式的左端相同，而右端却不相同。因此，这样代替之后，方程組(2)的兩个方程不能同时变成恒等式。

---

① 因此，例如 $a_{34}$ 就应当讀作"$a$, 3, 4"（而不是"$a$, 三十四"）。

② 应当着重指出：这一組数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 構成一組解（而不是 $n$ 个解）。

若具形狀(1)的方程組有解（只要有一組），就称它为相容的；若沒有解，就称它为不相容的。

相容的方程組可能有一組解，也可能有多組解。在后一情況下，为了区别不同組的解，我們在解的右上方的括弧中写出它們的号碼；例如第一組解 $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \cdots, c_n^{(1)}$，第二組解 $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \cdots, c_n^{(2)}$ 等等。在兩組解 $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \cdots, c_n^{(1)}$ 及 $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \cdots, c_n^{(2)}$ 之中，只要 $c_i^{(1)}$ 中至少有一个与对应的 $c_i^{(2)}$, $(i=1, 2, \cdots, n)$ 不同，就把这兩組解看作是不同的。例如方程組

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2&=0, \\ 4x_1+6x_2&=0 \end{aligned} \tag{3}$$

有不同的解 $c_1^{(1)}=c_2^{(1)}=0, c_1^{(2)}=3, c_2^{(2)}=-2$（还有無穷多个其它的解）。如果相容的方程組有唯一的一組解，就称它为确定的；若至少有兩組不同的解，就称它为不定的。

現在我們可以概括出研究方程組(1)时会發生的一些基本問題：

I. 判別方程組(1)是相容的或不相容的。

II. 若方程組(1)是相容的，則判別它是否确定的。

III. 若方程組(1)是相容的而且是确定的，則求出它的唯一解。

IV. 若方程組(1)是相容的而且是不定的，則写出它全部的解。

行列式的理論是研究綫性方程組的基本数学工具；我們現在就去叙述它。

## § 2. $n$ 阶行列式

1. 取一个正方(矩)陣，即由 $n^2$ 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 所構成的一个表：

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

表示矩陣(4)的行或列的个数的整数 $n$, 称为它的阶。数 $a_{ij}$ 称为正方陣的元素，元素 $a_{ij}$ 中的第一个及第二个下标，依次表示它所在的行及列的号碼。

在矩陣(4)中，取任意 $n$ 个在不同的行又在不同的列的元素，即：在每一行每一列中取一个而且只取一个元素。这些元素的乘积可以写成如下形狀：

$$a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \cdots a_{\alpha_n n}. \tag{5}$$

实际上，可以这样进行：在矩陣(4)的第一列选取一个元素作为第一个因子；若用 $\alpha_1$ 表示这个元素所在的行的号碼，則这个元素的下标是 $\alpha_1$ 及 1。同样的，由第二列选取一个元素作为第二个因子，它的下标是 $\alpha_2$ 及 2，其中 $\alpha_2$ 表示这个元素所在的行的号碼。其余类推。于是，在乘积(5)的因子中各元素的下标 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的次序对应于它們的列下标的遞增的次序。

按照条件，元素 $a_{\alpha_1 1}, a_{\alpha_2 2}, \cdots, a_{\alpha_n n}$ 在矩陣(4)的不同行中，每行一个，所以这些下标 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 全不相同，而它們是 $1, 2, \cdots, n$ 的一种排列。

在下标的排列是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的序列里，当一个大的下标在一个小的下标前边时，我們就說有一个"逆序"，全体"逆序"的个数，我們用 $N(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ 表示。

例如在四个数字的排列 2, 1, 4, 3 里，有兩个逆序(2 在 1 前，4 在 3 前)，因此

$$N(2, 1, 4, 3) = 2.$$

在排列 4, 3, 1, 2 里，有五个逆序(4 在 3 前，4 在 1 前，4 在 2 前，3 在 1 前，3 在 2 前)，于是

$$N(4, 3, 1, 2) = 5.$$

如果在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的序列里，逆序的个数是偶数，就在乘积(5)前面添上"+"号；如果是奇数，就在乘积的前面添上"－"号。换句話說，我們規定：在每一个像(5)那样的乘积的前方，添上一个符号

$$(-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)}.$$

从所給的 $n$ 阶矩陣，作一切像(5)那样的乘积，它們的个数等于 $1, 2, \cdots, n$ 的一切可能的排列的个数，即等于 $n!$。

現在我們引进下述的定义：

取 $n!$ 个形狀如(5)的乘积，每个乘积按照上述規則添上确定的符号。它們的代数和称为正方陣(4)的行列式：

$$D=\Sigma(-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \cdots a_{\alpha_n n}. \qquad (6)$$

今后，凡具有形狀(5)的乘积就称为行列式的項，矩陣(4)的元素 $a_{ij}$ 称为行列式的元素。

与矩陣(4)相对应的行列式，可用下述的任意一个符号来表示：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\det\|a_{ij}\|=\det\|a_{ij}\|_{i,j=1,2,\ldots,n}. \qquad (7)$$

例如对于2阶及3阶行列式，我們有下述的表达式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}- \\ -a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

我們取含兩个未知数的兩个綫性方程所構成的一組为例，来說明在解这个綫性方程組时行列式的作用。若所給的方程組为

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,$$

则用普通的方法，每次消去一个未知数，即得到公式

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}},$$

但須假定上述分式的分母不为零。上述分式的分子与分母可以表示为二阶行列式:

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

对于含有任意多个未知数的方程組的解，相似的公式成立(参看 §7)。

2. 为了确定行列式某一項的符号，其规則还可以另外用几何术語来叙述。

在矩陣(4)里，可以按照元素的号碼标出正的方向，沿着行的正方向是从左到右，沿着列的正方向是自上而下。同时，对連結矩陣的任意兩个元素的斜綫段，也可以給它規定方向：連結元素 $a_{ij}$ 与 $a_{kl}$ 的綫段，如果右端低于左端就叫作正斜率綫段；如果右端高于左端就叫作負斜率綫段。今設想在矩陣(4)中，把乘积(5)里的元素 $a_{\alpha_1 1}, a_{\alpha_2 2}, \cdots, a_{\alpha_n n}$ 逐对联結，选出其中一切具有負斜率的綫段。若这些綫段的个数是偶数，則在乘积(5)的前方添上“+”号，若是奇数，則添上“−”号。

例如，在 4 阶正方矩陣中，乘积 $a_{21}a_{12}a_{43}a_{34}$ 的前面应当添上“+”号，因为在矩陣中，有兩个負斜率綫段联結所給乘积的元素:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

但在乘积 $a_{41}a_{32}a_{13}a_{24}$ 的前面，应当添上“−”号，因为在矩陣中有五个負斜率綫段联結此乘积的元素:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

在这些例中，联結所給項里諸元素的負斜率綫段的个数，等于在所給項里諸元素第一个下标的排列中的“逆序”的个数：在第一例中，第一个下标依次为 2, 1, 4, 3，有兩个“逆序”；在第二例中，第一个下标依次为 4, 3, 1, 2 有五个“逆序”。

讓我們来証明：确定行列式各項符号的第二个方法与第一个方法是一致的。为此只要証明：所給項中諸元素的第一个下标的“逆序”的个数（当第二个下标按自然数次序排列时）总等于联結矩陣里所給項中諸元素的負斜率綫段的个数。这几乎是不言而喻的；因为若联結元素 $a_{\alpha_i i}$及$a_{\alpha_j j}$ 的綫段的斜率是負的，这就表示在 $i<j$ 时，$\alpha_i>\alpha_j$，也就是在第一个下标的排列中，有一个“逆序”存在。

**習題**

1. 在六阶行列式中，下面的項应当帶有什么符号？

а) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$,

б) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

答 а) +, б) +。

2. 在四阶行列式中，写出所有包含因子 $a_{23}$ 而且帶有負号的項。

答 $a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}$, $a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}$, $a_{31}a_{42}a_{23}a_{44}$。

3. $n$ 阶行列式的項 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 应当帶有什么符号？

答 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

## §3. $n$ 阶行列式的性質

1. **轉置运算** 將行列式(7)各行分别代以相同号碼的列，所得的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

叫做行列式(7)的轉置行列式。今証明轉置行列式的値与原来行列式的値相等。实际上，行列式(7)及行列式(8)显然是由相同的項構成；因此，我們只要証明：在行列式(7)及(8)中，相同的項具有相同的符号。从一个行列式得到它的轉置行列式，显然是繞对角綫(在空間)轉 180° 的結果。对于这个轉动，每个負斜率綫段(例如它与矩陣的行所成的角是 $\alpha<90°$)仍变成一个負斜率綫段(即它与方陣的行所成的角是 $90°-\alpha$)。因此，联結每一項的元素的負斜率綫段的个数，經过轉置之后，并不改变，因而这一項的符号也不改变。一切項的符号不变，因而行列式的値也不变。

此处所証明的行列式的性質，說明了它的行和列具有相同的作用。因此，我們以后專就行列式的列的性質加以叙述与証明。

2. 反对称性質 关于列的反对称性質是指行列式下面的性質：当兩列互換时，行列式变号。我們先考虑行列式兩鄰列互換的情形。例如取第 $j$ 列及第 $j+1$ 列：它們互換之后，所得的行列式，显然就是由原来行列式中的項所組成。我們取原来行列式的任意一項，这一項的因子中有第 $j$ 列及第 $j+1$ 列的元素，若联結这兩元素的綫段的斜率是負的，則經过列的互換之后，它們联綫的斜率变成正的，反过来，原来的斜率若是正的，互換之后变成負的。但是对于这一选定的項，各对元素的其他联綫，在兩列互換之后，斜率的正負号不变。所以，在兩列互換之后，联結所給項的元素的負斜率綫段的个数，显然增加或减少一个；于是行列式的每一項在兩列互換之后，符号改变，而整个行列式也是如此。

設互换的两列不是相鄰的，例如，是第 $j$ 列及第 $k$ 列($j<k$)[①]，而且在它們之間，設有 $m$ 个其它的列，则这个互换可以按下述的順序，逐次把相鄰的两列互换来完成：第 $j$ 列首先与第 $j+1$ 列互换，然后与第 $j+2$ 列，…，第 $k$ 列互换；第二步使第 $k-1$ 列（原第 $k$ 列）与第 $k-2$ 列，第 $k-3$ 列，…，第 $j$ 列（原第 $j+1$ 列）互换。总共經过 $m+1+m=2m+1$ 个相鄰列的互换；每次互换，行列式变号一次，所以，最后所得的行列式与原来的符号相反（不論 $m$ 是什么整数，$2m+1$ 总是奇数）。

**推論** 行列式若有两列相同就等于零。

因为將这相同的两列互换，行列式不变；但是另一方面，按照前面証明的性質，它又应当变号。因此，$D=-D$，故 $D=0$。

**習題**

試証明：根据 §2 的定义，行列式的 $n!$ 个項中，恰好一半$\left(\text{即 } \frac{n!}{2}\right)$应添上“+”号，另一半应添上“−”号。

**提示** 考察所有元素皆是 1 的行列式。

3. **行列式的綫性性質** 我們把这个性質叙述如下：若行列式 $D$ 的第 $j$ 列的所有元素都是两項的綫性組合：

$$a_{ij}=\lambda b_i+\mu c_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

（$\lambda$ 及 $\mu$ 是固定的数），则行列式 $D$ 等于两个行列式的綫性組合：

$$D=\lambda D_1+\mu D_2, \tag{9}$$

在这里，在 $D_1$, $D_2$ 两个行列式中，除去第 $j$ 列以外，所有的列都与行列式 $D$ 相同，而行列式 $D_1$ 的第 $j$ 列则是由 $b_i$ 所構成，行列式 $D_2$ 的第 $j$ 列是由 $c_i$ 所構成。

实际上，行列式 $D$ 的一切項，能表示成如下形狀：

$$a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\cdots a_{\alpha_j j}\cdots a_{\alpha_n n}=a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\cdots(\lambda b_{\alpha_j}+\mu c_{\alpha_j})\cdots a_{\alpha_n n}=$$

$$=\lambda a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\cdots b_{\alpha_j}\cdots a_{\alpha_n n}+\mu a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\cdots c_{\alpha_j}\cdots a_{\alpha_n n}.$$

---

① 此是譯者增注。

將所有如上的式中的第一項聚在一起(分別添上原来行列式里的对应項的符号),并且把 $\lambda$ 提出括弧之外,則在括弧內显然得到行列式 $D_1$;同样的將第二項聚在一起(分別添上符号),并且把 $\mu$ 提出括弧之外,卽得到行列式 $D_2$。于是公式($a$)成立。

为了方便起見,还可以把这个公式写成几种别的形狀。設 $D$ 表示任意一个固定的行列式。$D_j(p_i)$ 表示用数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 代替行列式 $D$ 的第 $j$ 列的元素后所得到的行列式。那么我們所証明的等式(9)可以写成下面的样子:

$$D_j(\lambda b_i+\mu c_i)=\lambda D_j(b_i)+\mu D_j(c_i).$$

行列式的綫性性質很容易地推广到如下的情形:卽第 $j$ 列的每个元素,不是两个数,而是任意多个数的綫性組合:

$$a_{ij}=\lambda b_i+\mu c_i+\cdots+\tau f_i.$$

在这种情形下,

$$D_j(a_{ij})=D_j(\lambda b_i+\mu c_i+\cdots+\tau f_i)=$$
$$=\lambda D_j(b_i)+\mu D_j(c_i)+\cdots+\tau D_j(f_i). \quad (10)$$

**推論** 1. 行列式的一列所有元素的公因子,可以提到行列式符号之外。

事实上若 $a_{ij}=\lambda b_i$,則由公式(10),

$$D_j(a_{ij})=D_j(\lambda b_i)=\lambda D_j(b_i).$$

証完。

**推論** 2. 若行列式的某一列全都是零,則行列式等于零。

事实上,0是所給的列的公因子,將它提到行列式符号之外,卽得:

$$D_j(0)=D_j(0\cdot 1)=0\cdot D_j(1)=0.$$

**習題**

將下列行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix},$$

先分解成它的加項再計算。

答 $\Delta=(mq-np)(ad-bc)$。

4. 將另一列的任意倍数加到一列上　若对于一列的各元素，加上任何另一列的对应元素的常数倍数，則行列式的值不变。

若对于第 $j$ 列，加上第 $k$ 列($k\neq j$)的 $\lambda$ 倍，則所得行列式的第 $j$ 列的元素为 $a_{ij}+\lambda a_ik(i=1, 2, \cdots n)$。利用公式(10)，得：

$$D_j(a_{ij}+\lambda a_{ik})=D_j(a_{ij})+\lambda D_j(a_{ik}).$$

在第二个行列式中，第 $j$ 列是由諸元素 $a_{ik}$ 構成，即与第 $k$ 列相同。按第 2 段的推論就得到 $D_j(a_{ik})=0$，所以

$$D_j(a_{ij}+\lambda a_{ik})=D_j(a_{ij}),$$

証完。

这个性質当然可以敍述成更普遍的形狀：若对于行列式 $D$ 的第 $j$ 列的各元素，加上与它对应的第 $k$ 列的元素的 $\lambda$ 倍，第 $l$ 列的元素的 $\mu$ 倍，…，第 $p$ 列的元素的 $\tau$ 倍($k\neq j$, $l\neq j$, …, $p\neq j$)，行列式 $D$ 的值不变。

**習題**

数 20604, 53227, 25755, 20927 及 78421 可被 17 除尽，試証明行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

也可被 17 除尽。

提示　將第 1 列乘上 $10^4$，第 2 列乘上 $10^3$，第 3 列乘上 $10^2$，第 4 列乘上 $10^1$，加到末一列上，再应用第 3 段的推論 1。

由于一个行列式和它的轉置行列式相等(第 1 段)，这一段里所証明的行列式关于它的列的一切性質，对于它的行来說也是正确的。

## § 4. 行列式按行或列的展开·余因子

現在我們来考察行列式 $D$ 的任意一列，譬如第 $j$ 列。以 $a_{ij}$ 表示这一列的某个元素。設有表示行列式 $D$ 的等式［參看 § 2 公式