高等學校教學用書

高等幾何學

上册

Н. В. ЕФИМОВ 著
裘 光 明 譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

高 等 幾 何 學

上　册

H. B. 葉非莫夫著
裘　光　明　譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

高等幾何學

下册

H. B. 葉非莫夫著
裘光明譯

高等教育出版社

本書根據蘇聯國營理論技術著作出版社 (Государственное издательство технико—теоретической литературы) 1953 年出版的葉非莫夫 (Н. В. Ефимов) 著"高等幾何學" (Высшая геометрия) 第三版譯出。原書經蘇聯文化部批准作爲大學和師範學院幾何基礎一課的參考書之用。

本書共分三部分：第一部分幾何基礎分四章，第二部分投影幾何分兩章，第三部分常數曲率幾何分兩章。中譯本分兩册出版，上册只包括第一部分，下册包括第二和第三部分。

高　等　幾　何　學

上　册　　書號161(課155)

葉　非　莫　夫　著

裘　光　明　譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

〔北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號〕

新華書店總經售

奎記印刷所印刷

上海新閘路九二〇弄二六號

開本787×1092 1/25　印張 10 3/12.5　字數 203,000

一九五四年十二月上海第一版　印數 1—5,000

一九五四年十二月上海第一次印刷　定價 ¥13,000

本書根據蘇聯國營理論技術著作出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）1953年出版的葉非莫夫（Н. В. Ефимов）著"高等幾何學"（Высшая геометрия）第三版譯出。原書經蘇聯文化部批准作爲大學和師範學院幾何基礎一課的參考書之用。

本書共分三部分：第一部分幾何基礎分四章，第二部分投影幾何分兩章，第三部分常數曲率幾何分兩章。中譯本分兩册出版，上册只包括第一部分，下册包括第二和第三部分。

高 等 幾 何 學

下 册　　書號162（課156）

葉 非 莫 夫 著
裘 光 明 譯
高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）
新華書店總經售
奎記印刷所印刷
上海新閘路九二〇弄二六號

開本787×1092 1/25　印張12 1/12.5　字數 265,000
一九五四年十二月上海第一版　印數 1—5,000
一九五四年十二月上海第一次印刷　定價￥15,500

第三版序言

在本書第三版裏作了很多個別的改正和修訂。除此以外，還寫了第三章的新的兩節:"羅拔契夫斯基幾何裏基本的量度關係"和"關於黎曼幾何的簡單知識"。微分幾何的材料移到本書末尾去了。

在正文的個別的改變裏必須特別提出的是康托兒公理表述方法的改變。在本書的第一版裏表述這個公理所用的方法要比表述它的通常方法加強些。在第二版裏保留了同樣的表述方法而且(在第四章裏)引進了康托兒命題在其中能夠成立的非阿基米德幾何的例子。可是這個例子却是以康托兒公理的通常表述方法作基礎的。使我注意到這個缺點是 А. Д. 阿力山德洛夫 (А. Д. Александров)。在這一版裏康托兒公理是以通常的表述方法寫出的。敍述上的其他一系列缺點，由於 П. К. 拉奢夫斯基 (П. К. Рашевский) 1949 年 10 月 10 日在"蘇維埃的書"上所發表的評論而得以改正。對於這第三版的準備工作特別重要的是 В. Ф. 卡剛 (В. Ф. Каган) 在莫斯科大學裏所主持的討論會(第二次，在第二版以後)上對於本書的討論。

由於本書被用作爲幾何基礎那門課程的參考書，爲此讓我來說幾句話。在這一版裏基本的材料排在前兩部分。在書裏這些材料是有系統地敍述的，幾乎完全寫出了論證的細節(例外的是初等幾何某些定理的證明)。當然，在講課時這樣的詳細是不適當的(卽使課程的鐘點更多些也是如此)。最困難的是第一部分的第二章；我認爲，在講課時必須敍述這一章中的公理的表述和某些定理的嚴密證明的例子；再有，在那些最具原則性的地方必須作足夠詳細地講解，那是指：長度的測量，阿基米德和康托兒公理與戴德金公理的等價性以及這些公理作爲解析幾何根據的意義。初等幾何中大量原始定理的證明最適當的是留作學

生的獨立作業，而且可以在質疑時、在討論課上和在數學小組會上作檢查。

第三章（羅拔契夫斯基幾何）是宜於作課堂講授的，而且學生通常很樂於聽這個材料。但是這裏面有很多補助定理可以不加證明地給出。相反地，羅拔契夫斯基幾何邏輯的無矛盾性，我認爲必須當作本課程中的一個最主要問題來作非常詳細的證明（那就是在這裏適當地利用公理的準確表述法和正確地表述所得到的結果）。至於第四章，則可以限於一般的敍述；公理系統完備性的概念只要用第一組公理和它在四面體上的實現作爲例子來說明。如果第四章的材料要講得更詳細些，則我認爲可以講非阿基米德系統（預先簡短地講述全部公理的笛卡兒實現的存在）。投影概念在幾何基礎這門課程裏自然只應該佔輔助的地位。因此我認爲，從第五章只要選取直線上和平面上投影坐標的作法（略去調和對應連續性的證明和投影尺度稠密性的證明）、投影對應的解析表示（去掉三維的情形）和配極理論。第六章我建議作完全的講述。

第三部分的材料可以在數學小組會和討論會的工作裏使用。

葉非莫夫

1953 年 4 月 15 日

上 册 目 次

下 册 目 次

第二部分　投影幾何學

第三部分　常數曲率的幾何

高等幾何學

第一部分　幾何基礎

第一章　幾何基礎研究簡史

1. 歐幾里得公理

§1. 幾何觀念的發生牽涉到非常遠的時代。通常認為它們最初的形成與古代巴比倫和埃及的文化有關。然而，如果根據直到現時代為止的材料來下斷語，可以認為，在這些國家裏的幾何學是粗糙的和單憑經驗的，沒有能超出個別問題的特殊解答的範圍。

從公曆紀元前七世紀到公曆紀元開始時，展開了幾何學發展上希臘學者工作的時期。在紀元前六世紀到五世紀得到了許多重要的幾何事實。顯然是在這同一個時代，關於定理證明的概念形成了。

到紀元前三世紀的開端，希臘人已經具有較深的幾何知識，並且他們不但有了累積起來的豐富事實，而且還有幾何證明的方法。所以很自然地，在這個時期可以嘗試收集所有的材料，照邏輯相關的次序把它們排起來。包含着幾何起源的敍述的作品由許多希臘作者着手了，但是這些作品都沒有流傳到我們的時代，似乎是在歐幾里得 (Euclid) 的著名的"幾何原本"出現以後它們就都被遺忘了。

歐幾里得大約生活在紀元前 330 年到 275 年，他是古代最大的幾何學家之一。他所編寫的"幾何原本"給出幾何原理的完全而且有系統的敍述。容易想像到，把許多事實統一起來，搜索不同定理的證明，特別是把它們排成邏輯的鏈子，是一個重要而且困難的問題。這個關於

幾何系統的第一個邏輯結構的問題，由歐幾里得在他的時代用高度的技巧解決了。歐幾里得的著作在很長的時間裏是傳播重要的幾何知識的唯一書籍。

"幾何原本"共有13卷，其中第五、第七、第八、第九和第十各卷講授比例和算術理論(用幾何方式來敍述)，其餘都是純粹幾何的。

第一卷包含着三角形相等的條件、三角形邊和角中間的關係、平行線的理論和三角形以及多角形等積的條件。在第二卷裏給出如何把三角形變成等積的正方形。第三卷講授的是圓。在第四卷裏討論內接和外切多角形。第六卷論述相似多角形。在最後三卷裏敍述立體幾何原理。

這樣一來，"幾何原本"包含的是普通初等幾何的材料。有許多在歐幾里得時代已經知道的東西(例如圓錐曲線理論)，在"幾何原本"裏沒有提到。

§2. 歐幾里得的每一卷書都從一些概念的定義開始，這些概念是他在那一卷裏必須運用的。

第一卷先提出23個定義。我們引進其中最先的八個。

定義 I. 點沒有部分。

定義 II. 線有長度沒有寬度。

定義 III. 線的界限是點。

定義 IV. 直線是這樣的線，它對於它的所有各個點都有同樣的位置。

定義 V. 面只有長度和寬度。

定義 VI. 面的界限是線。

定義 VII. 平面是這樣的面，它對於在它上面的所有直線有同樣的位置。

定義 VIII. 平面角是位置在一個平面上的兩條相交直線相互的傾斜度。

在定義以後歐幾里得引進公設和公理，也就是不加證明而採用的斷語❶。

公　設

I. 從每個點到每一個別的點必定可以引直線。

II. 每條直線都可以無限延長。

III. 以任意點作中心可以用任意半徑作圓周。

IV. 所有的直角都相等。

V. 每當一條直線與另外兩條直線相交，有一側的兩個同側內角的和小於兩直角時，這兩條直線就在同側內角的和小於兩直角的那一側相交。

公　理

I. 等於同量的量相等。

II. 等量加等量得到等量。

III. 等量減等量得到等量。

IV. 不等量加等量得到不等量。

V. 等量的兩倍相等。

VI. 等量的一半相等。

VII. 能疊合的量相等。

VIII. 全部大於部分。

IX. 兩條直線不能包圍一部分空間⊖。

有些公理(IV，V，VI 和 IX)的歸屬問題歐幾里得是含混地處理的。在另一版"幾何原本"裏公設 IV 和 V 是歸在公理裏的，所以第五公設有時也叫做第十一公理。至於說到關於公設或者公理的基本地位

❶ 在各種版本的"幾何原本"裏，公設和公理的表並不相同。這裏引進最流行的一種。

⊖ 這個公理的意思是：通過兩個點只能引一條直線。在歐幾里得原書裏本來沒有這個公理，但是他在證明有兩條邊夾一個角相等的兩個三角形相等時，用到了這句話，所以後人就把這句話放到公理裏面了。——譯者。

的原則,則他在實質上是沒有說明。

在公理後面歐幾里得敍述幾何定理,按着邏輯的相關性把它們排成次序,使得每一個命題可以根據前面的命題、公設和公理來證明。

§3. 列舉的定義和公理,爲所有後面定理的嚴格的邏輯證明所必要的,叫做幾何學的(公理的)根據。

歐幾里得第一個提出幾何根據的問題,就是這件事使他的數學事業得到很高的評價。

是否可以說,歐幾里得在他的"幾何原本"裏對於這個問題的解答是毫無遺漏的嗎?

要回答這個問題,首先應該注意到,在歐幾里得的時代,古代的哲學和邏輯達到了最盛期。在有數學材料的文章裏,希臘學者顯示出很深的和很微妙的思想。如果在這種情形下歐幾里得的"幾何原本"居然能夠勝過所有其餘的同類著作,則很明顯地,歐幾里得所完成的幾何的邏輯結構,對他的時代說來是非常嚴密的了。再有,在許多世紀的長時期裏,歐幾里得證明的嚴格性還不失爲一種比較的標準。

然而,如果用我們現代的數學觀點來看"幾何原本"的敍述,則可以認爲它在許多方面是不能令人滿意的。

首先我們來談一下歐幾里得的定義;其中有一些已經寫在上面。

這些定義的寫法運用了這樣的一些概念,它們本身也應該加以定義的,例如:"界限","長度"等等。在某些定理的證明裏可以不用到定義I—VIII的任何一個;如果不考慮與書中別的材料的關係,這些定義實質上是無用的,而且可以略去而不使後面的討論蒙受任何的損失。這些定義只是用非常單純的形式所表達的幾何形象的寫法罷了。

至於說到公設和公理,則無疑地可以承認,它們一般地是必要的;爲了許多幾何命題的證明,不能不屢次提到,例如直線由它的兩個點決定、任意半徑的圓存在、等等事實。而在這裏還應該注意另一個事實:即使從表面的分析也可以發現,歐幾里得不加證明而採用的基本命題

的表，作爲幾何學嚴格的邏輯推理的基底，是過於貧乏了。爲了弄明白這個意義，我們來引進一些例子。

在幾何的討論裏常常引進來運用的是這樣的一些概念 我們習慣上用字句來表示它們，例如"直線上在兩個點中間的已知點"，"在直線的同一側的兩個點"，"在直線的不同側的兩個點"，"在多角形裏面的點"等等。歐幾里得的公設從沒有給出這些概念作爲根據。當我們在某個定理的證明裏用到它們時，可以使用的只有歐幾里得的公設，以致必須利用圖形的直覺來作說明。可是在幾何的嚴格的邏輯結構裏，每一個命題，如果它不包含在公理裏，就應該證明，不論它是多麽顯然。

再有應該說明的是，在公理 VII 的意義下，幾何量和圖形的相等是用移動來定義的。可是移動概念本身歐幾里得却沒有定義，而且移動的性質也沒有列舉在任何的公理裏。最後，每當歐幾里得討論到兩個圓周，其中一個通過關於另一個的內部一點和外部一點時，他沒有假定這兩個圓周的交點的存在；完全一樣的是，在討論通過一個圓周內部的點的直線時，認爲這樣的直線和圓周相交在兩個點。儘管這些事實在直覺上是顯然的，它們還需要證明。而在歐幾里得的公設和公理中間，沒有能用來確立這種證明的命題。

根據上面所說的種種，歐幾里得邏輯的說服力在許多情形下是由我們空間觀念的習慣所保證的。這就說明"幾何原本"所包含的幾何的邏輯根據不是無可非難的。

§ 4. 古代的學者們也曾經注意到歐幾里得"幾何原本"的缺點。特別說來，阿基米德 (Archimedes) 就曾經擴大了幾何公設的表，那是在長度、面積和體積的測量理論裏完成歐幾里得敍述所必要的。當歐幾里得還只有確定長度中間、面積中間和體積中間的比值時，要說明例如圓的面積和球的體積分別與半徑的平方和立方相關，阿基米德給出可以用來實地計算出對應的數值的式子。作爲量度幾何的根據，他引進下面的五個公設：

I. 有公共端點的所有線中,直線是最短的。

II. 有公共端點而且落在一個平面上的兩條線,如果都是凸的,而且其中的一條爲另一條和連結公共端點的直線所包圍,或者如果兩條曲線有公共的部分,而有一條的其餘的部分被包圍,則這兩條曲線不相等;這時候被包圍的線短於包圍它的線。

III. 完全一樣地,所有有公共周界的面中,平面是最小的。

IV. 有公共的平的周界的兩個面,如果都是凸的,而且其中的一個(或者除掉公共部分以外的它的其餘部分)爲另一個面和周界所在的平面所包圍,則它們不相等;這時候被包圍的面小於包圍它的面。

V. 在兩條不等的線,兩個不等的面或者兩個不等的體中,只要把小的增加到適當的倍數,大的就反而會成爲較小的量。

阿基米德的前四個命題要作爲量度幾何的邏輯根據是難以接受的。它們所討論的是線的長度、面的面積和體的體積,而這些概念實際上還需要用別的更簡單的幾何概念來定義。而如果這些定義用適當的方式表示出來了,則阿基米德的命題是可以證明的。所以把它們算做公設是沒有道理的。

至於最後一個命題,通常簡單叫做阿基米德公設的,却非常重要。它可以簡單地寫成下面的樣子:對於任意兩個 a 和 b, $a<b$, 總有這樣的整數 n, 使得 $na>b$ 。這個公設是測量幾何量的根據,在第二章 § 20 裏有詳細的說明。

在阿基米德以後,想要把幾何的基本命題弄得更正確的企圖並沒有終止。然而,在許多世紀的長時間裏,幾何根據並沒有增加什麽原則性的勝過歐幾里得已經做了的新材料。歐幾里得的證明,直到十九世紀,一般還以爲是夠嚴密的。直到十九世紀末期,才在原則上完成了幾何的邏輯結構的見解,而且第一次找出了完備的公理系統,從這些公理我們可以不用到空間觀念的任何直覺看法來得出所有的定理。

歐幾里得公設表的必須擴充只有不多的幾個幾何學家注意到。反