振动计算

太原工学院土木系《振动计算》编写组

中国建筑工业出版社

振 动 计 算

太原工学院土木系《振动计算》编写组

中 国 建 筑 工 业 出 版 社

前　　言

建筑结构承受的荷载，分静力荷载和动力荷载。一般认为，静力荷载是不会使结构产生振动的，而动力荷载则会使结构产生加速度和惯性力，因而产生振动。为了供广大建筑工程技术人员了解振动问题，我们编写了这本《振动计算》。

本书主要介绍振动理论的基本概念和计算方法，对工程设计中的振动问题和计算公式，着重进行概念性的分析，不作详细的数学推导，并对梁的振动计算进行较详细的叙述。目的在于使读者对结构的振动计算有一个比较系统的概念，便于在实际工作中应用。

编　者

1978年元月

目　录

第一章　什么叫做振动计算

第一节　一　般　说　明

厂房、烟囱以及吊车梁等结构物，首先必需有承受荷载的能力，以保证在使用期间对人或生产过程不产生危害，才能满足使用要求，因此结构物的安全是十分必要的。但只注意安全，不考虑材料的节约，是不符合经济原则的，一个好的结构物应该是既安全又经济。所以，在结构设计中，必须根据上述要求，对结构物在使用中可能碰到的各种因素加以考虑，提出安全、经济和适合使用的结构方案。结构设计中应考虑的各种因素中主要是荷载。结构物经常遇到的荷载，如结构自重、设备重量等，在能够使计算简化又不产生不能允许的误差的条件下，大多数是作为静力荷载进行计算的。因为这些荷载是以极其缓慢的速度加在结构物上的，它的大小在任何时间都是不变的，也不会使结构物产生加速度或惯性力，而且在弹性限度以内，它在结构中引起的内力和变形与荷载的强度都成正比关系。但有些荷载就不能按静力荷载来计算，而只能按动力荷载计算。例如，机器运转的周期性荷载，落锤的冲击荷载，疾风，爆炸和地震的瞬时作用荷载等。因为这些荷载是突然作用于结构上的，它的大小随时间而变化（即为时间的函数），并使结构物产生较大的加速度或惯性力，因而引起振动现象。在动力荷载作用下，即使在弹性限度以内，结构的内力和变形除与荷载强度有关外，还

与荷载的作用方式、变化规律及结构的动力特性（自振频率、阻尼等等）有很大的关系。有时动力荷载的强度并不很大，但它却能使结构产生很大的内力和变形。反之，有时强度很大的动力荷载，却只产生很小的内力和变形。因此，动力荷载与静力荷载是不同的。有许多结构物，虽然经过静力计算，但仍出现破坏或危害人及生产过程的情况。它的原因就是这些结构物承受了动力荷载的作用，设计时忽视了它对结构的动力影响，没有对结构产生的振动进行计算。因此，为了保证结构物的安全，对某些结构必须考虑动荷载对结构的动力影响，进行结构的振动和动力计算。最早的动力计算方法是，将动力荷载的幅值（即最大值）乘上一个大于1的动力系数，再按静力作用进行结构计算。这种计算方法比较方便，但没有考虑结构本身的动力特性，而忽视结构的振动及其引起的共振现象的严重后果。随着人们对荷载和结构动力特性的不断认识，结构振动理论也得到了发展，使结构的动力计算比较符合客观规律。当然，目前结构动力计算中的许多问题还没有得到完满的解决，有待进一步的发展。

在我国，随着社会主义建设的日益发展，在建筑工程中越来越多地要求考虑振动问题。近年来，通过大量的工程实践和广泛地开展对结构振动的实验研究，积累了不少经验，并在实际应用中获得了很好的效果。

本书将对振动计算的基本问题进行介绍。书中从运动的概念谈起，导出有关振动的物理概念及简单的计算方法，并介绍一些振动计算的应用。在导出有关振动计算的公式时，采用了研究振动问题的常用方法，先建立振动体系的振动方程，再由振动方程求解，最后引出公式。在叙述过程中，着

重说明必要的物理概念，尽量减少数学的推导，有时只直接介绍最后的结论，以供使用。

第二节　为什么要进行振动计算

结构物的振动问题很多。例如，某些多层框架结构的车间，在顶层设置有重型设备，并受附近数台空气压缩机的干扰作用，可能使框架在两个方向都发生可见的振动。这样生产人员在顶层工作，好比在摇篮里一样，以至产生不良的心理影响。一旦这种影响超过了正常人所能忍受的限度，就会影响工作并有害生产人员的健康；又如某些计量室，其内设置精密仪表，如在它附近一定的范围内有一个锻锤车间，就可能产生振动的干扰，使天平秤盘发生摆动，一些小仪器发生跳动。这种干扰到达一定程度就可能影响精密仪表的使用精度，甚至不能工作。再如某些多层框架结构的车间，如在使用期间根据工艺要求，将原设计安装的机械改为功率较大的机械或增加设备，使动力荷载比原设计大，增加了楼板梁的负担，因而使楼板梁有可能丧失承载能力。

以上的例子说明，振动可能直接影响厂房结构本身的寿命，也可能对生产人员和高度精确的工艺过程造成有害的影响。所以减少结构发生振动，消除振动的有害影响是十分必要的。

解决上述的问题。一方面是校核结构的振动是否在允许的范围以内，另一方面是设法减小结构的振动。要使一个结构物完全不发生振动是不可能的，从经济观点看，也是不允许的。处理的办法只能将有感振动限制在允许的范围以内。因此，应通过大量的研究，考虑振动对生产人员、生产过程

和结构物安全的影响，预先规定出结构物振动的允许范围，以便在结构设计时，对结构的振动强度进行校核。如果预期结构的振动在允许范围以内，就认为这个结构是可靠的，否则结构物的振动超过了允许范围，就必须根据已知的具体条件，选择最经济最有效的方法来减少结构的振动。此时，应根据振动计算的结果进行分析研究，从中找出振动过大的原因，作为选择减小振动措施的根据。减振措施的效果是否良好，在设计中也可通过结构的振动计算进行估量。由此可知，在承受动力荷载的结构设计中，振动计算是一个重要的部分。

另外，在工程实践中也经常会碰到振动的问题。例如，起重机吊着的重物以一定速度下降，若起重机突然停止，就会在吊索中因振动而产生动应力，这种应力对吊索寿命是有影响的。又如，施工打桩，当锤重或落距很小时，桩的下降很慢，当锤重或落距过大时，桩的下降加快了，但又可能发生破坏。这同前述一样，要合理解决这类问题，振动计算也是不可少的。

第三节 振动计算包括些什么内容

振动计算包括下列内容：

1.确定动力荷载；

2.确定结构的自振频率和振型；

3.确定结构动力位移的幅值；

4.确定结构动力内力的幅值。

进行振动计算时，首先必须知道动力荷载的规律，以及作用的方法和方向，就可以认为这一动力荷载是完全已知

的。一般说来，确定动力荷载作用的方法和方向，并不困难，最困难的在于确定动力荷载随时间的变化规律，亦即把它写成时间的函数。例如，对于图1-1a所示的机器在运转时由于运动部分的惯性力将产生周期性的荷载P。从图上可以看出，其方向和作用点，如图1-1b所示。荷载对结构的作用情况，当机器两点支承时，如图1-1c所示，如机器为整片支承或$\frac{b}{l}\leqslant 0.2$（l是支承结构跨度）时则如图1-1d所示。至于这个荷载P随时间的变化规律就比较复杂了，这将在第二章中详细介绍，这里只列出它最后的表示式$P=P_0\sin\theta t$。从这个式子看，这个动力荷载包含有θ和P_0两个动力荷载的特性参数。θ表示机器的转速，一般可由机械的工艺数据查出。P_0表示动力荷载的幅值(即最大值)，它取决于机器运动部分的质量、偏心半径及转速，这些数据也可在机器的规格中查出。某些机器的P_0值也有汇总成表，供直接查用的。

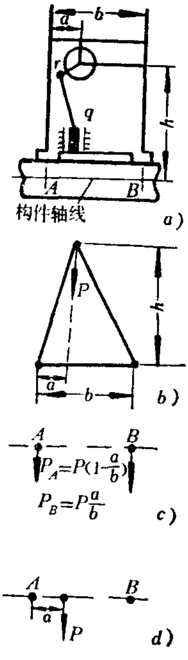


图 1-1

又如，对于锻锤等工作时的冲击作用，它的方向是竖直的，作用点就是冲击点。冲量S也就是这种动力荷载，它取决于冲击物体的质量m和速度v_0、集中在冲击点上的结构质量M和冲击恢复系数e。S的表达式为$S=(1+e)\frac{mM}{m+M}v_0$。

又如，地震或机器等产生的地面运动，将会引起结构物

振动。这种地面运动的影响也可以化成相当荷载的作用。

动力荷载对结构的影响程度与结构本身的动力特性有关。结构的自振频率，是结构的一个主要动力特性。在动力荷载作用下，结构的动力位移和内力都与结构的自振频率有关。如果不知道自振频率，就无法确切地估计出位移和内力的幅值。此外，根据结构的自振频率，还可找出结构产生较大振动的原因，从而指出减振的有效措施。因此，计算自振频率是振动计算的一个主要内容。

结构的另一个动力特性是振型。每个振型都有自己的自振频率。一个结构的振动总可按自振频率进行振型分解。目前，在振动计算中常采用振型分解法。熟悉结构的振型，将有助于对结构进行振动计算。

在已知动力荷载和结构动力特性的基础上，就可以计算结构的动力位移（或速度、加速度）和内力的幅值。求得了这些幅值就可以为结构的振动验算提供数据。

振动计算的基础是结构振动理论。为了求算自振频率和振型等，就要研究结构的自由振动规律；为了求算动力的位移和内力，就要研究结构的强迫振动规律。这将在本书的第三、四章中分别加以介绍。

第二章 谈谈运动和振动

第一节 运 动 的 概 述

学习振动理论基本知识前，必须先熟悉一些运动的概念。

恩格思说："运动是物质的存在形式、物质的固有属性，它包括宇宙中所发生的一切变化和过程，从简单的位置变动起直到思维止。"

现在来谈谈位置的变动。一个物体对其它物体的位置的变化，叫做机械运动。天体的运动，火车、飞机及汽车的运动，机器转动部分的运动，结构振动等都是机械运动的一些例子。

各种机械运动都是相对的。研究任何物体的运动时，如只注意这个物体而不注意它与其它物体的相互位置关系，那就无法判断这个物体是不是在运动。例如正在开行着的火车车厢里的桌子，对火车来说，它是静止的，而对道旁的树木来说，它是随着车厢运动的。一个物体对其它假定为不动的物体的位置变化，叫做相对运动。在研究物体运动时，被假定为不动的物体叫做参考物。固结于参考物上的坐标系叫做参考系。在工程实践中，通常将地球或其它相对于地球为静止不动的物体作为参考物。

描述物体的运动时，还需要用到时间的两个概念：时间间隔Δt和瞬时 t 。物体运动经过的一段时间叫做时间间隔，

而时间间隔无限缩短以至趋于零的一刹那叫做瞬时。时间间隔对应于运动的某个过程，而瞬时则对应于运动的某个状态。例如，火车从北京开到天津需要一段时间，火车到达天津只是在某一瞬时。

在任何运动中，物体总在一定的轨迹上发生位置变化，而通过一定的路程。例如，火车沿铁路由北京开往天津，经过路程140公里。按照轨迹的不同，物体的运动可分为直线运动和曲线运动。物体运动通过的路程与时间是有关的。例如火车在行驶中，有时等速，有时加快，有时减慢。因此，不论轨迹的形状如何，物体的运动又可分为匀速运动和变速运动。

研究物体的运动时，就是要确定物体在任何瞬时所在轨迹上的位置和状态。

第二节　质点的运动

在运动学中，研究物体运动时只要物体的大小与它在空间运动的范围相比较是可以略去不计的，就可将物体当作质点看待。例如，研究机车在铁路上行驶时，因机车的大小与它经过的路程相比可以略去不计，故可把机车看作质点，把铁路看作一定的轨迹，从而简化为一个质点在轨迹上的运动。

1.质点运动规律

质点运动时依次通过的A_1、A_2、A_3等点组成的线（图2-1），叫做运动的轨迹。例如用铅笔在纸上划一条线，纸上所留下的一条痕迹就表

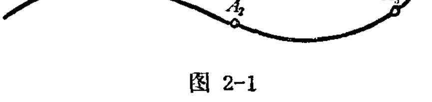


图 2-1

示铅笔尖运动的轨迹。

轨迹上任意两点之间的弧长是质点在一定时间间隔内所走过的路程（图 2-2 中的$\overset{\frown}{OM}$），而该两点之间的直线距离是质点在一定时间间隔内所发生的位移(图2-2中的$\overrightarrow{OM}$)。应当说明，路程是一个没有方向性质而只由大小确定的物理量，它是一个标量。位移是一个由大小和方向确定的物理量，它是一个矢量（或叫向量），$\overrightarrow{OM}$上的箭头表示从O到M。

为了确定质点在轨迹上的位置，必须在轨迹上任取一点O为参考原点，在O点两侧定出正、负方向。质点M在任一瞬时t的位置由弧长$s=\overset{\frown}{OM}$确定（图2-2）。质点运动时，路程随时间而变化，即路程是时间的函数。在数学上函数关系可表示为

$$s=f(t) \tag{2-1}$$

这个关系叫做质点沿已知轨迹的运动方程。

因此，质点的运动规律是用轨迹（包括参考原点及正、负方向）和沿轨迹的运动方程两者表示的。

2.速度

为了表示质点运动的快慢程度和方向，在运动学中，采用了一个叫做速度的物理量。

设质点在时间间隔Δt内走过了路程Δs（图2-3），则路

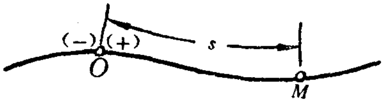


图 2-2

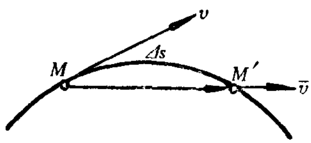


图 2-3

程与通过该路程所用时间的比$\frac{\Delta s}{\Delta t}$反映了在 Δt 内质点运动的平均快慢程度，叫做质点在Δt内的平均速度，以符号 $\bar{v}$ 表示，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2-2}$$

平均速度只能说明在某一时间间隔内质点运动的快慢程度，而不能说明在这一时间间隔内每一瞬时质点运动的实际快慢程度。为了说明某一瞬时质点运动的快慢程度，必须有瞬时速度（简称速度）的概念。如果时间间隔Δt取得越短，则质点的平均速度就越接近于质点在瞬时 t 运动的快慢程度。当 Δt 趋近于零时，$\bar{v}$ 趋近于某一极限值❶。这个极限值就表示了质点在瞬时 t 的运动快慢程度，叫做质点在瞬时 t 的速度，以符号 v 表示，即

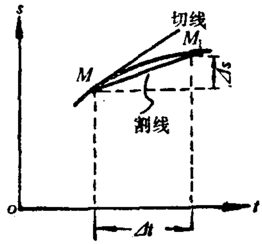
$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt} \tag{2-3}$$

式（2-3）的物理意义仍是路程对时间的变化率。在技术上常常采用一种专门的仪器（例如汽车上的速度计）来直接指出瞬时速度。

速度是一个矢量，在直线运动中，质点的速度方向同运

---

❶ 设将式(2-1)描绘如附图中的曲线，并在其上取点$M(s,\ t)$和点$M_1\ (s+\Delta s,\ t+\Delta t)$。$\Delta s$是点在$\Delta t$内经过的路程。$\frac{\Delta s}{\Delta t}$等于割线$MM_1$的斜率，它代表整个路程$\Delta s$和时间$\Delta t$内的平均速度。当$\Delta t$趋近于零时，点$M_1$将沿曲线趋近于点$M$，割线$MM_1$就以该曲线在点$M$的切线为极限，成为点$M$的切线，切线的斜率则代表点$M$在瞬时$t$的瞬时速度。



动方向相一致。在曲线运动中，质点在轨迹上每一点的速度方向，就是曲线上该点的切线方向（图2-4）。这可用实验来说明。实验时将石块拴在绳子上作匀速圆周运动，如图2-5，当绳子突然断开时，石块就沿着圆周的切线方向飞出。这时候，指向运动方向的速度为正，反之为负。

图 2-4

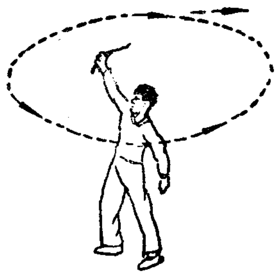


图 2-5

速度的单位由路程和时间的单位决定，通常采用米/秒（m/sec）或厘米/秒（cm/sec），有时也用公里/时（km/h）。

3.加速度

为了说明质点在匀变速运动中速度的变化情形，在运动学中，采用了一个叫加速度的物理量。

设质点在某一瞬时 t 的速度为 v，在另一瞬时 t_1 的速度为 v_1，在时间间隔 $\Delta t = t_1 - t$ 内速度的变化为 $\Delta v = v_1 - v$，则速度的变化与发生这种变化所用时间的比反映了在 Δt 内速度矢量的平均变化，叫做质点在 Δt 内的平均加速度，以符号 $\bar{a}$ 表示，即

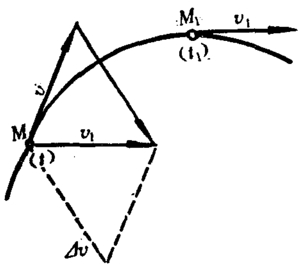


图 2-6

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2\text{-}4)$$

质点在每一瞬时 t 的速度变化，必须用瞬时加速度（简称加速度）来描述。如果时间间隔Δt取得越短，则平均加速度就越接近于瞬时 t 速度的实际变化。当Δt趋近于零时，平均加速度趋近于某一极限值。这个极限值表示质点在瞬时 t 的速度变化情形，叫做瞬时加速度，以符号 a 表示，即

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt} \qquad (2\text{-}5)$$

式(2-5)的物理意义仍然是速度对时间的变化率。

加速度也是一个矢量。在直线运动中，加速度方向同速度方向相一致。若Δv（或dv）>0，则加速度是正的；若Δv（或dv）<0，则加速度是负的。例如，火车出站，速度增大，加速度是正的；火车进站，速度减小，加速度是负的。

在曲线运动中，速度的大小和方向都可能发生变化，因此，质点在曲线上每一点的加速度有两部分（图2-7）。一部分是速度大小发生变化的结果，加速度的大小仍用式（2-5）计算，其方向就是曲线上某点的速度方向，即沿该点的切线方向。这种加速度叫做切向加速度，以符号a_τ表示。另一部分是速度方向发生变化的结果，以 v 表示速度，ρ 表示曲线在 M点的曲率半径，加速度的大小用下式计算

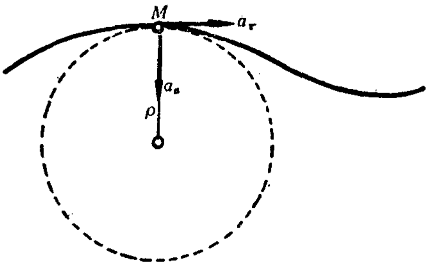


图 2-7

$$a_n=\frac{v^2}{\rho} \qquad (2\text{-}6)$$