

普通高等教育规划教材

材料力学(Ⅱ)

主 编 杨伯源

副主编 李和平 刘一华

301-21

1

机械工业出版社
China Machine Press



125

TB3d-21
X21

普通高等教育规划教材

材料力学 (II)

主 编 杨伯源
副主编 李和平 刘一华
参 编 王炯华 白嘉楠 巫绪涛
主 审 徐道远



A0964690



机械工业出版社

本教材是安徽省教委教学改革项目“面向 21 世纪工科基础力学课程内容和体系改革的研究与实践”的研究成果。其特点是：在保留原材料力学教材体系的基础上，对经典内容进行了创新处理，减少了教学学时；在考虑拓宽学生知识面的基础上，增加了反映力学学科进展的新的教学内容，扩大了信息量；在教学内容的安排上，强调讲清基本概念、基本理论和基本分析方法；精选了例题和习题；注重启发式教学，给学生留有充足的思考空间。

全书共十九章，分为两部分。材料力学（Ⅰ）是基础部分，内容包括：绪论，轴向拉伸与压缩，材料的力学性质及拉压杆的强度计算，扭转，梁的基础问题，梁的复杂问题，应力与应变分析，失效分析与强度准则，组合变形时的强度计算，能量法和压杆稳定共十一章。材料力学（Ⅱ）是提高部分，内容包括：压杆稳定的进一步研究，动荷应力，材料的疲劳与断裂，厚壁圆筒与旋转圆盘，金属材料的塑性行为，聚合物的粘弹性变形，金属材料的蠕变分析和复合材料的力学性能共八章。

本教材可作为高等院校工科各专业的教科书，也可供其它专业选用和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学（Ⅱ）/杨伯源主编. —北京：机械工业出版社，2002.4
普通高等教育规划教材
ISBN 7-111-09999-0

I. 材… II. 杨… III. 材料力学 - 高等学校 - 教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 022402 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：季顺利 版式设计：霍永明 责任校对：陈延翔
封面设计：陈 沛 责任印制：路 琳
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002 年 4 月第 1 版·第 1 次印刷
1000mm×1400mmB5·5.125 印张·195 千字
0 001—5 500 册
定价：14.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527
封面无防伪标均为盗版

前 言

本教材是安徽省教委教学改革项目“面向 21 世纪工科基础力学课程内容和体系改革的研究与实践”的成果之一，是为了适应新的人才培养模式及目标，对材料力学教学内容进行了较大幅度的增删与改革的一本新教材。

编写本教材的主导思想是：保留原材料力学教材以杆件变形为主线的论述方式，对经典内容进行创新改造；在考虑机械、土木等多学时专业需要的基础上，增加了反映力学学科发展的教学内容，扩大了信息量；在内容阐述上，强化基本概念、基本理论、基本分析方法和基本计算能力；在内容编排上，注意启发式教学对教材内容的要求，给学生留有充足的思维空间；精选了例题和习题，并增加了研究型习题。

与传统教材相比，本教材具有如下特点：

1. 保留原材料力学教材的体系与风格 本教材仍使用以杆件变形为主线的论述方式，维持原教材的以杆件为主要研究对象，讨论杆在基本变形下的强度、刚度与稳定性问题以及杆在组合变形下的强度问题。并保持原教材结构严谨、系统性强等优点。

2. 精简或全部删除部分起点低、易于理解和非重点的内容 对轴向拉压变形和弯曲变形进行了简化处理，对轴向拉压变形进行了压缩；将原弯曲变形的三章合并为一章；精简了剪切内容等。

3. 扩宽知识面、加大信息量 一是在原有各章内容中增加了新内容：如在材料的力学性质及拉压杆的强度计算一章中增加了温度、加载速率对材料性能的影响；扭转一章中增加了正多边形截面杆、椭圆形截面杆的扭转计算；压杆稳定一章中增加了差分解法等。二是新增加了五章内容：厚壁圆筒与旋转圆盘、金属材料的塑性行为、聚合物的粘弹性变形、金属材料的蠕变分析和复合材料的力学性能。这些新增的内容虽然只简单介绍了最基础的东西，但增加了教材对近代力学知识的覆盖面，触及到了非线性、大变形、高温、动态和新材料等领域。

4. 对某些基本公式的推导采用新的论述方式 如弯曲切应力公式推导；矩阵理论在应力的坐标转换、求主应力、平面应变分析和差分解法中的应用等，为今后进一步学习其它力学教材打下了坚实的基础。

本教材采用模块式结构，分Ⅰ、Ⅱ两册出版。材料力学（Ⅰ）共十一章，是基础部分，可供少学时各专业使用。材料力学（Ⅱ）共八章，是提高部分。（Ⅰ）和（Ⅱ）合并适用于中、多学时各专业。教师可根据所教专业的特点进行内容的

IV

精简与补充，材料力学（Ⅱ）中的有关章节也可通过专题讲座的形式进行传授。

参加本教材编写工作的有：杨伯源（主编；第一章，第十五章～第十八章）；李和平（副主编；第五章，第六章）；刘一华（副主编；第十章，第十三章，第十九章）；王炯华（第二章～第四章）；白嘉楠（第十一章，第十二章，第十四章）；巫绪涛（第七章～第九章，附录 A）。全书底稿的文字、图表的电脑录排由巫绪涛承担。

本教材由河海大学徐道远教授审阅。

在本教材编写出版的过程中，得到了合肥工业大学教材科和材料力学教研室许多同志的支持和帮助，谨此致谢。

教材中不足之处，敬请同行及读者指正。

编 者

2001 年 11 月于合肥

主要符号表

A	截面面积, 弯曲中心	I_{xy}	惯性积
a	加速度	J	转动惯量
$a、b、c$	厚壁圆筒或圆盘的半径	$J(t)$	蠕变柔量
b	截面宽度	k	玻耳兹曼常数
C	截面形心, 等效刚度	k_d	动荷系数
$d、D$	直径	$k_\sigma、k_\tau$	有效应力集中系数
e	偏心距	K	体积模量, 弹簧刚度, 应力集中系数, 应力强度因子, 流体的粘度
E	弹性模量 (杨氏模量)	K_{IC}	断裂韧度
E_k	动能	l	长度, 跨度
$E_r(t)$	松弛模量	m	质量
E_τ	活化能	M	弯矩
f	摩擦系数, 形状系数	$\bar{M}$	单位载荷引起的弯矩
F	集中力	M_e	外力偶矩
$F_{Ax}、F_{Ay}、F_{Az}$	A 处的约束力分量	M_s	屈服弯矩
F_{bs}	挤压力	M_u	极限弯矩
F_{cr}	临界力	n	安全因数, 转速 (r/min), 阻尼系数
F_N	轴力	n_{st}	稳定安全因数
$\bar{F}_N$	单位载荷引起的轴力	N	应力循环次数, 疲劳寿命
F_Q	剪力	p	压力 (压强), 全应力
F_R	约束力	P	功率, 重力
F_S	拉力, 索引力	q	分布载荷集度
F_u	极限载荷	Q	蠕变激活能
$F_x、F_y、F_z$	力在 $x、y、z$ 方向上的分量	r	半径, 循环特征
$[F]$	许用载荷	R	半径, 摩尔气体常数
g	重力加速度	s	弧长
G	切变模量, 重力	S	静矩
GI_t	非圆截面杆的抗扭刚度	t	时间, 厚度
h	截面高度	T	扭矩, 温度
i	惯性半径	$\bar{T}$	单位载荷引起的扭矩
I	惯性矩	T_g	玻璃化转变温度
I_p	极惯性矩		

T_s	屈服扭矩	θ	体积应变, 单位长度扭转角, 梁的弯曲转角
T_u	极限扭矩	$[\theta]$	许用转角, 许用单位长度扭转角
u	比能 (应变比能), 位移	κ	曲杆的截面系数
u^*	余比能	λ	压杆的柔度 (长细比), 拉梅常数
u_f	形状改变比能	$[\lambda]$	坐标转换矩阵
u_v	体积改变比能	μ	压杆的长度系数, 牛顿粘度
U	应变能 (变形能)	ν	泊松比
U^*	余能	ρ	曲率半径, 密度
v	速度, 位移	σ	正应力
V	体积, 势能	$\bar{\sigma}$	等效应力
W	功, 抗弯截面系数	$\sigma_{0.2}$	条件屈服强度
δW_e	外力虚功	σ_a	应力幅
δW_i	内力虚功	σ_b	抗拉强度 (强度极限)
W_p	抗扭截面系数	σ_{bc}	抗压强度
F'	正则方程广义约束力	σ_{bs}	挤压应力
y	挠度	σ_c	压应力
$[y]$	许用挠度	σ_{cr}	临界应力
α	线膨胀系数, 倾角	σ_d	动应力
α_K	冲击韧度	σ_e	弹性极限
β	表面加工系数	σ_m	平均应力
γ	切应变, 重度, 表面能	σ_p	比例极限
$\dot{\gamma}$	剪切速率	σ_r	相当应力, 径向应力
δ	伸长率, 广义位移, 过盈量, 厚度	σ_r	循环特征为 r 的疲劳极限
δ_d	动变形	σ_s	屈服点 (屈服应力)
δ_{st}	静变形	σ_{st}	静应力
ϵ	线应变, 角加速度	σ_t	拉应力
$\dot{\epsilon}$	应变速率	σ_u	极限正应力
$\bar{\epsilon}$	等效应变	σ_θ	环向应力
$d\bar{\epsilon}$	等效应变增量	$[\sigma]$	许用正应力
ϵ_e	弹性应变	$[\sigma_{bs}]$	许用挤压应力
ϵ_p	塑性应变	$[\sigma_c]$	许用压应力
ϵ_u	极限线应变	$[\sigma_{st}]$	稳定许用应力
$\epsilon_\sigma, \epsilon_\tau$	尺寸系数	$[\sigma_t]$	许用拉应力
η	动力粘度	τ	切应力
η_a	非牛顿流表观粘度		

τ_b 、 τ_0	抗剪强度	i	内
τ_s	剪切屈服点	m	平均
τ_u	极限切应力	max	最大
$[\tau]$	许用切应力	min	最小
φ	相对扭转角, 倾角, 折减系数	p	塑性
ψ	断面收缩率	r	相当, 径向
ψ_o 、 ψ_r	不对称循环的敏感系数	s	屈服
ω	载荷弯矩图面积, 角速度, 频率	st	稳定, 静
常用角标		t	拉伸
bs	挤压	u	极限
c	压缩	θ	环向
cr	临界	σ	弯曲
d	动	τ	扭转
e	外, 弹性		

目 录

前言

主要符号表

第十二章 压杆稳定的进一步研究	1
第一节 具有初曲率的压杆和偏心压杆	1
第二节 杆的纵横弯曲	4
第三节 能量法求临界力	6
第四节 压杆稳定问题的有限差分解法	9
* 第五节 其它弹性稳定问题简介	14
习题	17
第十三章 动应力	19
第一节 概述	19
第二节 考虑惯性力时构件的动应力计算	19
第三节 强迫振动时的应力计算	23
第四节 冲击应力与变形的计算	28
* 第五节 考虑受冲击杆件的质量时应力和变形的计算	32
习题	34
第十四章 材料的疲劳与断裂	38
第一节 概述	38
第二节 固体材料的理想断裂强度和应力判据	38
第三节 材料的疲劳破坏特征及机理	39
第四节 $S-N$ 曲线及疲劳极限的测定	41
第五节 构件的疲劳极限	43
第六节 基于疲劳极限的无限寿命设计法	48
第七节 应力强度因子与断裂韧度	54
第八节 损伤容限设计	58
习题	60
第十五章 厚壁圆筒与旋转圆盘	62
第一节 厚壁圆筒的基本方程	62

第二节 厚壁圆筒中的位移和应力	64
第三节 组合圆筒	67
第四节 旋转圆盘	70
习题	72
第十六章 金属材料的塑性行为	74
第一节 概述	74
第二节 金属材料在单向拉伸时的塑性性质	74
第三节 超静定杆系的极限载荷	76
第四节 圆轴的极限扭矩	79
第五节 梁的极限弯矩	80
第六节 梁的极限载荷	82
第七节 复杂加载下的应力—应变关系与屈服判据	84
第八节 塑性变形的物理基础	87
第九节 塑性范围内材料的流动规律	90
第十节 大塑性变形问题——拉延问题	94
习题	97
第十七章 聚合物的粘弹性变形	100
第一节 概述	100
第二节 聚合物的粘弹性行为——简单的粘弹性模型	101
第三节 线性粘弹性体的蠕变松弛特性	103
第四节 聚合物的应力—应变关系	105
第五节 聚合物的粘性特征	106
习题	108
第十八章 金属材料的蠕变分析	109
第一节 概述	109
第二节 蠕变分析	109
第三节 考虑蠕变时梁的应力与位移分析	112
第四节 考虑蠕变时受扭圆杆的应力与变形分析	115
* 第五节 结构蠕变的工程分析法	116
第六节 颈缩下的蠕变破坏计算	122
第七节 复杂应力状态下的蠕变分析	123
习题	125
第十九章 复合材料的力学性能	127
第一节 概述	127

第二节	复合材料的性能特点	127
第三节	单层复合材料的应力—应变关系	128
第四节	单层复合材料的弹性模量	132
第五节	纤维增强效应与抗拉强度预测	134
第六节	单层复合材料的耦合效应与铺层设计	136
第七节	单层复合材料的失效判据与设计准则	138
习题		139
附录 C	拉普拉斯变换.....	141
附录 D	本书采用的单位	143
附录 E	单位换算	144
习题答案		146
中英文材料力学词汇对照		148
参考文献		151

第十二章 压杆稳定的进一步研究

第一节 具有初曲率的压杆和偏心压杆

在第十一章中所讨论的是理想的中心受压直杆。但在工程实际中，压杆常在受力前就具有微小的初曲率，或者受偏心的压缩载荷作用，因此，必须研究初曲率和载荷的偏心对压杆稳定性的影响。

一、具有初曲率的压杆

如图 12-1 所示，设两端铰支受压杆件在最小抗弯刚度的方向有微小的初曲率，可表示为

$$y_0 = a_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (\text{a})$$

式中 a_0 为最大初变形。受压力 F 作用后，杆件产生了附加变形 y_1 ，因此总变形为

$$y = y_0 + y_1 \quad (\text{b})$$

此时杆内的弯矩为

$$M(x) = F(y_0 + y_1) \quad (\text{c})$$

压杆的挠曲线近似微分方程为

$$EI_z y_1'' = -M(x) = -F(y_0 + y_1)$$

即为

$$y_1'' + k^2 y_1 = -k^2 a_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (\text{d})$$

式中 $k^2 = F/EI_z$ 。设微分方程式 (d) 的特解为

$$y_1^* = C \sin \frac{\pi x}{l}$$

代入式 (d) 得

$$C = \frac{a_0}{F_{\text{cr}}/F - 1} \quad (\text{e})$$

其中 $F_{\text{cr}} = \pi^2 EI_z / l^2$ 为两端铰支理想压杆的临界力。微分方程式 (d) 的通解为

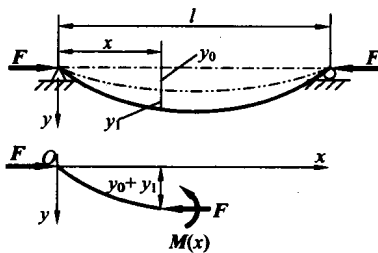


图 12-1 具有初曲率的压杆

$$y_1 = A \sin kx + B \cos kx + \frac{a_0}{F_{cr}/F - 1} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (f)$$

将式 (f) 代入位移边界条件: $x=0$ 和 $x=l$ 处 $y_1=0$, 得 $A=B=0$, 故

$$y_1 = \frac{1}{F_{cr}/F - 1} a_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (12-1)$$

由式 (12-1) 可知, 若杆件的初变形 a_0 很小而压力 F 又比临界力 F_{cr} 小得多时, 挠度 y_1 也很小, 可以认为在压力 F 作用下杆件保持直线状态的平衡; 但当压力 F 接近临界力 F_{cr} 时, 杆件将出现很大的弯曲变形和应力, 以至使杆件破坏。所以在有小初曲率的情况下, 仍可近似使用理想压杆的临界力公式。

二、偏心压杆

图 12-2 所示为两端铰支的杆件在偏心压力 F 作用下的挠曲线形状。 $x-y$ 平面为压杆的对称面, 杆在该平面内的抗弯刚度为 EI_z 。当此压杆在力 F 作用下弯曲时, 其任一横截面 x 处的挠度为 y , 该截面的弯矩为

$$M(x) = F(e + y) \quad (g)$$

其中 e 为偏心距。杆的挠曲线近似微分方程为

$$EI_z y'' = -M(x) = -F(e + y) \quad (h)$$

即

$$y'' + k^2 y = -k^2 e \quad (i)$$

式中 $k^2 = F/EI_z$ 。微分方程式 (i) 的通解为

$$y = A \sin kx + B \cos kx - e \quad (j)$$

由位移边界条件 $x=0$ 处 $y=0$ 和 $x=l$ 处 $y=0$ 可得

$$B = e, \quad A = \frac{e(1 - \cos kl)}{\sin kl} = e \tan \frac{kl}{2} \quad (k)$$

于是杆的挠曲线方程为

$$y = e \left(\tan \frac{kl}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right) \quad (l)$$

最大挠度 δ 发生在杆的中点 $x=l/2$ 处, 其值为

$$\delta = e \left(\sec \frac{kl}{2} - 1 \right) \quad (12-2)$$

最大弯矩和最大压应力也均发生在杆的中点 $x=l/2$ 处, 分别为

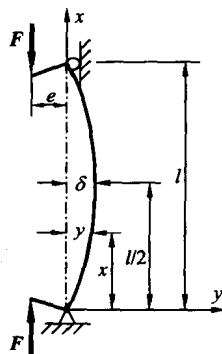


图 12-2 偏心受压杆

$$M_{\max} = F(\delta + e) = Fe \sec \frac{kl}{2} \quad (12-3)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{Fe}{W_z} \sec \frac{kl}{2} \quad (12-4)$$

由式 (12-2)、式 (12-3) 和式 (12-4) 可见, δ 、 $M_{\max}$ 和 $\sigma_{\max}$ 与外力 F 不成线性关系, 故在计算中不能使用叠加原理。但若杆的 EI_z 相当大, 有

$$\frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{EI_z}} \rightarrow 0$$

则

$$\sec \frac{kl}{2} \rightarrow 1$$

于是式 (12-4) 与按照压缩与弯曲组合变形得到的公式相同, 即可使用叠加原理。

当给定偏心距 e_1 、 e_2 、 e_3 , 且 $e_3 > e_2 > e_1$ 时, 根据式 (12-2) 算出一系列 δ 与偏心压力 F 的对应值, 从而绘出不同偏心距 e 下的 $F-\delta$ 曲线, 如图 12-3 所示。当 $e=0$ 时, 由式 (12-2) 可知, 如果 $\delta=0$, 则 $\sec(kl/2)$ 可以为任意有限值; 如果 $\delta \neq 0$, 则 $\sec(kl/2) = \infty$, 由此得到 $\cos(kl/2) = 0$, 故有 $kl = \pi$, 则

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI_z}} = \frac{\pi}{l}$$

即

$$F = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}$$

(m)

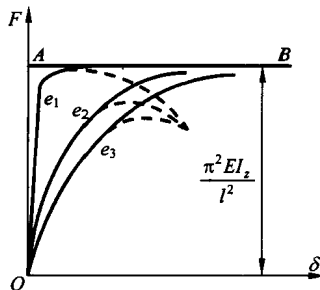


图 12-3 偏心压杆的 $F-\delta$ 曲线

这时的 $F-\delta$ 曲线为图 12-3 所示的折线 OAB 。

当 $e \neq 0$ 时, 由式 (12-2) 可知, 当 $\delta \rightarrow \infty$ 时, $\sec(kl/2) \rightarrow \infty$, 即 $F \rightarrow \pi^2 EI_z / l^2$, 表明图 12-3 中偏心距不等于零的一组 $F-\delta$ 曲线均以水平线 AB 为渐近线。这是因为当 $e=0$ 时, 图 12-2 所示的偏心压杆即为中心受压直杆。

必须指出, 当实际压杆的中点挠度 δ 增大到一定值时, 中点截面上的压应力均达到屈服点 σ_s , 这时压杆不可能再承受更大的压力。由偏心压杆试验得到的 $F-\delta$ 曲线如图 12-3 中的虚线所示。由此可知, 具有初曲率或偏心距的压杆, 其承受能力必然低于按中心受压直杆计算的临界力, 而且初始偏心距和初曲率越大, 压杆承载力也就越低。因此, 中心受压直杆在失稳时的临界力 F_{cr} 是实际压杆承载能力的一个理论上的上限值。

第二节 杆的纵横弯曲

图 12-4 所示为一在轴向力 F 和横向均布载荷 q 共同作用下发生压缩与弯曲组合变形的杆件, 若杆的抗弯刚度很大, 则由横向均布载荷 q 引起的挠度很小, 这时由轴向力 F 产生的附加弯矩可以忽略。但若杆的抗弯刚度较小, 则由轴向力 F 产生的附加弯矩不能忽略, 这种考虑横向力和轴向力同时引起的弯曲变形问题, 称为纵横弯曲。

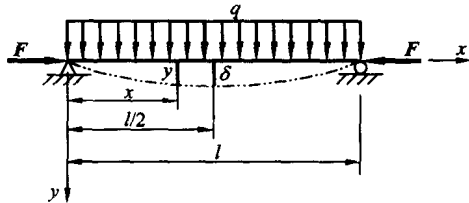


图 12-4 杆的纵横弯曲

对于图 12-4 所示的杆件, 其挠曲线近似微分方程为

$$EI_z y'' = -M(x) = -\frac{ql}{2}x + \frac{qx^2}{2} - Fy \quad (a)$$

即

$$y'' + k^2 y = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{ql}{2}x + \frac{qx^2}{2} \right) \quad (b)$$

式中 $k^2 = F/EI_z$ 。微分方程式 (b) 的通解为

$$y = A \sin kx + B \cos kx - \frac{q}{2EI_z k^2} \left(lx - x^2 + \frac{2}{k^2} \right) \quad (c)$$

由位移边界条件 $x=0$ 处 $y=0$ 和 $x=l$ 处 $y=0$ 可求出 A 和 B 为

$$B = \frac{q}{EI_z k^4}, \quad A = \frac{q}{EI_z k^4} \tan u \quad (d)$$

式中 $u = kl/2$ 。所以杆的挠曲线方程为

$$y = \frac{q}{EI_z k^4} \left[\tan u \sin kx + \cos kx - 1 - \frac{k^2}{2} (lx - x^2) \right] \quad (e)$$

将 $x = l/2$ 代入上式, 可求得最大挠度

$$\delta = \frac{q}{EI_z k^4} (\sec u - 1) - \frac{ql^2}{8EI_z k^2} \quad (12-5)$$

将 $k = 2u/l$ 代入式 (12-5) 得

$$\delta = \frac{5ql^4}{384EI_z} \left[\frac{24}{5} \frac{(\sec u - 1 - u^2/2)}{u^4} \right] \quad (12-6)$$

由于

$$u^2 = \frac{k^2 l^2}{4} = \frac{Fl^2}{4EI_z} = \frac{\pi^2}{4} \frac{F}{\pi^2 EI_z / l^2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{F}{F_{cr}} \quad (f)$$

式中 $\bar{F}_{cr} = \pi^2 EI_z / l^2$ ，所以 $F < \bar{F}_{cr}$ ，故得 $0 < u < \pi/2$ ，于是 $\sec u$ 可展成幂级数

$$\sec u = 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{5}{24}u^4 + \frac{61}{720}u^6 + \dots$$

由此可得

$$\delta = \frac{5ql^4}{384EI_z} \left(1 + \frac{61}{150}u^2 + \dots\right) \quad (g)$$

利用式 (f)，式 (g) 括号内的第二项为

$$\frac{61}{150}u^2 = \frac{61}{150} \frac{\pi^2}{4} \frac{F}{\bar{F}_{cr}} \approx \frac{F}{\bar{F}_{cr}} \quad (h)$$

故式 (g) 可写成

$$\delta \approx \frac{5ql^4}{384EI_z} \left(1 + \frac{F}{\bar{F}_{cr}}\right) \quad (12-7)$$

值得指出的是，式 (12-7) 中的 $\bar{F}_{cr} = \pi^2 EI_z / l^2$ 是此杆仅在压力 F 作用下绕横向均布载荷 q 引起弯曲时的中性轴失稳的临界力，但并非此杆在压力 F 和横向均布载荷 q 共同作用时失稳的临界力。式 (12-7) 可写成如下形式

$$\delta = y_0(1 + \alpha) \quad (12-8)$$

式中 $\alpha = F/\bar{F}_{cr}$ ， $y_0 = 5ql^4/(384EI_z)$ 为只有横向均布载荷 q 作用时的最大挠度。虽然式 (12-8) 是通过具体的压缩与弯曲的组合变形导出的，但通过能量法可以证明，它近似地适用于其它复杂的纵横弯曲问题。

对于纵横弯曲问题，通常要进行强度和稳定性校核。图 12-4 所示杆件的强度条件为

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + Fy_0(1 + \alpha)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

为了防止压杆在最小抗弯刚度方向失稳，一般还应按理想压杆进行稳定性校核。

例 12-1 图 12-5 所示为一压缩与弯曲组合变形的细长杆，横向均布载荷 $q=22\text{kN/m}$ ，轴向力 $F=200\text{kN}$ ，杆长 $l=1.5\text{m}$ ，材料为 Q235 钢，弹性模量 $E=210\text{GPa}$ ，许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。试对此杆作强度和稳定性校核。

解：查型钢表得 №20b 工字钢的相关截面参数为

$$A=39.578\text{cm}^2, I_z=2\,500\text{cm}^4,$$

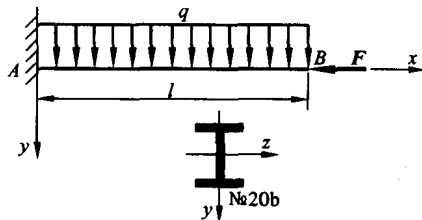


图 12-5 例题 12-1 图

$$W_z=250\text{cm}^3, i_y=2.06\text{cm}$$

(1) 校核 AB 杆的强度

在横向均布载荷 q 的作用下, 横截面绕 z 轴弯曲, 故

$$\bar{F}_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^3 \times 2\,500 \times 10^4}{(2 \times 1\,500)^2} \text{N} = 5\,757 \text{kN}$$

$$y_0 = \frac{ql^4}{8EI_z} = \frac{22 \times 1\,500^4}{8 \times 210 \times 10^3 \times 2\,500 \times 10^4} \text{mm} = 2.65 \text{mm}$$

由式 (12-8) 杆端 B 点的挠度为

$$\delta = y_0(1+\alpha) = y_0 \left(1 + \frac{F}{\bar{F}_{cr}} \right) = 2.65 \times \left(1 + \frac{200}{5\,757} \right) \text{mm} = 2.74 \text{mm}$$

杆 A 端的最大弯矩为

$$M_{\max} = \frac{1}{2}ql^2 + F\delta = \left(\frac{1}{2} \times 22 \times 1.5^2 + 200 \times 2.74 \times 10^{-3} \right) \text{kN} \cdot \text{m} = 25.3 \text{kN} \cdot \text{m}$$

该横截面上的最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} = \left(\frac{200 \times 10^3}{39.578 \times 10^2} + \frac{25.3 \times 10^6}{250 \times 10^3} \right) \text{MPa} = 151.7 \text{MPa} < [\sigma]$$

故杆件满足强度条件。

(2) 校核 AB 杆的稳定性

压杆失稳时将绕 y 轴转动, 故柔度为

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \times 150}{2.06} = 145.6$$

查表 11-3 并插值, 得到折减系数 $\varphi = 0.325$, 故

$$\varphi[\sigma] = 0.325 \times 160 \text{MPa} = 52.0 \text{MPa}$$

杆的工作压应力为

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{200 \times 10^3}{39.578 \times 10^2} \text{MPa} = 50.5 \text{MPa} < \varphi[\sigma]$$

故杆件满足稳定性条件。

第三节 能量法求临界力

用能量法分析压杆的稳定问题是十分方便的, 对于比较复杂的构件 (如变截面压杆、梁、薄板等) 更显示其优越性。虽然用能量法所得的结果是一个近似解, 但在实际中应用很广泛。下面用几个例子来说明。

例 12-2 试利用虚功原理分析两端铰支压杆的稳定性。