卫生部规划教材

全国高等医药院校教材

供药学类专业用

高等数学

第三版

毛宗秀　主编

人民卫生出版社

全 国 高 等 医 药 院 校 教 材

供药学类专业用

高 等 数 学

第 三 版

主　编　毛宗秀
副主编　姚金华

编　者　（以姓氏笔画为序）
王　珍　上海医科大学
毛宗秀　浙江大学
杨静化　中国药科大学
张宗圭　第二军医大学
陈四平　沈阳药科大学
周凤君　山东医科大学
姚金华　北京医科大学
黄思翔　广东药学院
鹿玲娣　河北医科大学

人 民 卫 生 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/毛宗秀主编. -3 版. -北京:人民卫生出版社,1999
ISBN 7-117-03112-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 毛… Ⅲ. 高等数学 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 02600 号

高 等 数 学

第 三 版

主　　编: 毛宗秀
出版发行: 人民卫生出版社 (中继线 67616688)
地　　址: (100078) 北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼
网　　址: http: //www.pmph.com
E - mail: pmph @ pmph.com
印　　刷: 三河市潮河印刷厂
经　　销: 新华书店
开　　本: 787×1092　1/16　**印张**:24.5
字　　数: 572 千字
版　　次: 1992 年 4 月第 1 版　2002 年 9 月第 3 版第 10 次印刷
标准书号: ISBN 7-117-03112-3/R·3113
定　　价: 23.20 元

全国高等医药院校药学专业
第四轮规划教材修订说明

为适应我国高等药学教育的改革和发展，在总结前三轮药学专业教材编写经验的基础上，卫生部教材办公室于1996年9月决定进行第四轮教材修订，根据药学专业的培养目标，确定了第四轮教材品种和修订的指导思想，药学本科教育的培养对象是从事一般药物制剂、鉴定及临床合理用药等工作的药师，教材修订应紧紧围绕培养目标、突出各学科的基本理论、基本知识，同时又反映学科的新进展。该套教材可供药学及相关专业选用。全套教材共22种，均经卫生部聘任的全国药学专业教材评审委员会审定，教材目录如下：

1. 高等数学（第三版） 毛宗秀 主编
2. 医药数理统计方法（第三版） 刘定远 主编
3. 物理学（第三版） 王鸿儒 主编
4. 物理化学（第四版） 侯新朴 主编
5. 无机化学（第三版） 许善锦 主编
6. 分析化学（第四版） 孙毓庆 主编
7. 有机化学（第四版） 倪沛洲 主编
8. 人体解剖生理学（第四版） 龚茜玲 主编
9. 微生物学与免疫学（第四版） 李明远 主编
10. 生物化学（第四版） 吴梧桐 主编
11. 药理学（第四版） 李 端 主编
12. 药物分析（第四版） 刘文英 主编
13. 药用植物学（第三版） 郑汉臣 主编
14. 生药学（第三版） 郑俊华 主编
15. 药物化学（第四版） 郑 虎 主编
16. 药剂学（第四版） 毕殿洲 主编
17. 天然药物化学(第三版) 姚新生 主编
18. 中医学基础（第四版） 李向中 主编
19. 药事管理学（第二版） 吴 蓬 主编
20. 生物药剂学与药物动力学 梁文权 主编
21. 分子生物学基础 史济平 主编
22. 药学英语（第二版） 胡廷熹 主编

以上教材均由人民卫生出版社出版。

卫生部教材办公室

前　言

本书是卫生部组织编写的全国高等医药院校规划教材。在全国高等医药院校药学专业教材评审委员会的具体组织、指导下，经编写组全体同仁的共同努力，顺利地完成了本版修订工作。

此次修订，以强调“三基”(基本理论、基本知识、基本技能)，体现“五性”(思想性、科学性、先进性、启发性、适用性)为指导思想，对第二版《高等数学》作了较大的修改。本书包含一元函数微积分、无穷级数、空间解析几何、多元函数微积分、常微分方程、积分变换及数学计算软件的介绍等内容。教学总时数为120～140。由于在编写时，一些可删节的内容保持着相对独立性，删除后不影响教学。因此也适合80课时左右的相近专业及成人教育用书。

为了适应培养跨世纪人才的需要与教材改革的新形势，本版加强了分析、代数与几何间的相互联系，对一些定理、法则的论述也更为严谨；并增加了介绍数学计算软件的内容。为了加强对学生应用数学知识分析及解决实际问题能力的培养，与前版相比，增加了数值计算方法与数学建模思想方面的基本内容。

作为如何在高等数学中结合计算机进行教学的探索，本书在“数学计算软件的介绍”一章中，结合本书各章内容介绍应用数学计算软件“Mathematica”在高等数学中的应用，并简要地介绍了编程的基本方法。

本书前九章有一定数量的习题。全部习题都已给出答案，并对部分题目给出了中间步骤的解，为自学本书的读者提供更多的方便。

本书的修订工作曾得到浙江医科大学教材建设委员会、药学院以及各院校有关领导的关怀与支持；山西医学院、贵阳医学院、桂林医学院、石河子医学院的同行曾对本书的修订提过有益的建议和意见；浙江大学湖滨校区景荣荣等老师协助完成书稿的打印工作，林秀玉老师绘制了全部插图。特此一并致谢。

本次修订的效果如何，有待教学实践的检验。限于编者水平，书中难免存在缺点、错误，恳请使用本书的广大师生与读者不吝指教。

毛宗秀

1998年8月于杭州

目　　录

第一章　函数与极限

客观世界的事物总是不断运动变化的。研究事物的变化规律是认识和改造客观世界的需要。函数关系表达了事物间量的变化规律，因此，高等数学以函数为主要研究对象。极限反映函数在某一过程中的变化趋势，是**微积分学**(calculus)的基本概念和理论基础。本章在中学数学有关内容的基础上，作必要的复习与补充。

第一节　函　　数

一、函数定义

客观世界中存在着两种不同的量：一种是在所考虑的问题或过程中，保持某个数值不变的量，称为**常量**(constant)；另一种是可以取不同数值的量，称为**变量**(variable)。

例 1　正在发育成长的球形细胞的体积 V 与半径 r 的关系为：

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

在这个过程中，V 与 r 是变量，圆周率 π 是常量。

在许多实际问题中，常用不等式表示变量的变化范围。假如某天的最低气温为 a，最高气温为 b。用 x 表示当天的气温，则 x 的变化范围是 $a\leq x\leq b$。这个不等式也可以记作 $[a, b]$，称为**闭区间**(closed interval)。如果不包含端点，则记作 (a, b)，称为**开区间**(open interval)。类似地，可定义**半开区间**(half-closed interval)和**无穷区间**(infinite interval)。即

$$[a, b]=\{x:a\leq x\leq b\}$$
$$(a, b)=\{x:a<x<b\}$$
$$(a, b]=\{x:a<x\leq b\} \text{ 或 } [a, b)=\{x:a\leq x<b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x:-\infty<x<+\infty\}$$

在例 1 中，细胞的半径 r 有一定的取值范围 $(0, b)$。对于任意的 $r\in(0, b)$，都能求出与它对应的体积 V，这个 V 值由 r 值唯一确定。当变量 r 与 V 间存在着这种对应关系时，称它们间存在函数关系。

定义 1　对于给定的数集 D 中的每一个元素 x，通过确定的法则 f，都有一个唯一的元素 y 与其相对应，记为

$$y=f(x),\qquad x\in D$$

称法则 f 为 D 上的一个**函数**(function)，集合 D 为函数的**定义域**(domain of definition)，当 x 遍取 D 中一切元素时，与 x 对应的 y 组成的数集 $M=\{f(x):x\in D\}$ 称为函数的**值域**(domain of function value)。

由于 y 的值随 x 而定，故称 x 为**自变量**(independent variable)，y 为**因变量**(dependent variable)，习惯上也称 y 为 x 的函数。当定义域 D 和对应法则 f 确定后，值域 M 也随着确定。因此，D 上的函数也可以看成是从 D 到 M 的一个**映射**；并称 y 为 x 的**象**，x 为

y 的**原象**。

例 2 一物体从距离地面为 h 处落下，若不考虑空气阻力，则下落路程 S 与时间 t 之间的关系可表示为

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

此函数的定义域为 $[0,\sqrt{2h/g}\ ]$，值域为 $[0,h]$。

例 3 给一糖尿病患者按每公斤体重口服葡萄糖 1.75 克后，在不同的时间 t 测定其血糖水平 y，则患者的血糖水平 y 是时间 t 的函数。它们之间的函数关系可由测得的数据表示为：

口服葡萄糖后的时间 t(小时)	0	0.5	1	2	3
患者的血糖水平 y(毫克%)	115	150	175	165	120

函数定义域为 $\{0,0.5,1,2,3\}$，值域为 $\{115,150,175,165,120\}$。

例 4 图 1-1 取自某蒸馏塔顶部的温度自动记录仪，为 8 时至 16 时塔内温度的变化曲线。从图中曲线可以直观地看到，自 8 时开始到 16 时任何时刻的塔内温度。它形象地表示了温度 T 随时间 t 而改变的变化规律。

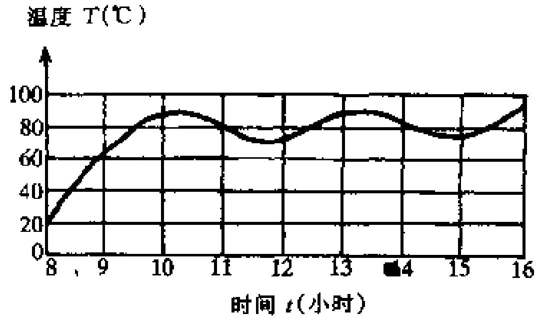

图 1-1

解析法、**列表法**、**图示法**是三种常用的函数表示法。它们具有不同的特点，用于不同的情况。今后，在研究变量间的关系时，主要应用解析法。

例 5 当函数关系由等式 $y^2=x$ 表示时，函数的定义域为 $x>0$。但是，与每一个可取的 x 值对应的 y 值有两个：$y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$。例如，当 $x=4$ 时，$y=2$ 和 $y=-2$，等等。

根据函数的定义，$y=f(x)$ 对定义域内每一个确定的 x 值，只有唯一的 y 值与其相对应，称为**单值函数**(one-valued function)。而例 5 中的函数，对于定义域中的一个 x 值，却能得到两个不同的 y 值。这类由定义域中的一个 x 值，能得到两个以上不同的 y 值的函数，称为**多值函数**(multiple-valued function)。本书中，若无特别说明，所用的函数都指单值函数。

例 6 函数 $y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $M=\{-1,0,1\}$。这种在定义域的不同部分，采用不同表达式的函数，称为**分段函数**(piecewise function)。分段函数的图象由几段不同的曲线组成，例 6 中的分段函数称为**符号函数**，记作 $\operatorname{sgn} x$。图象见图 1-2。

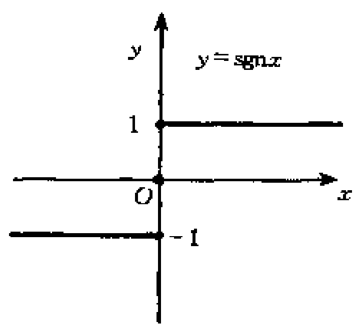

图 1-2

例 7 $|x|=x\operatorname{sgn}x$ 称为 x 的**绝对值**。函数

$y=|x|$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$。图象见图 1-3。

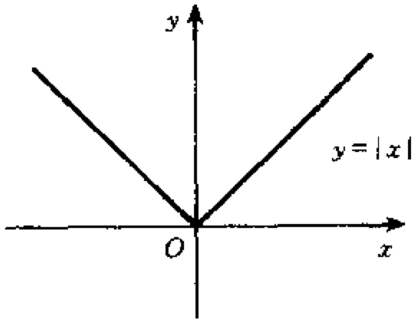

图 1-3

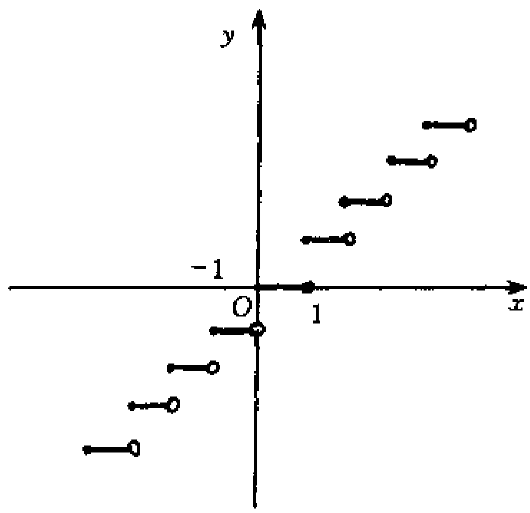

图 1-4

例 8 对于任意一个实数 x，取它的不超过 x 的最大整数值，称为对 x 取整，记作$[x]$。例如：$[0.36]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-\pi]=-4$ 等等。以 x 为自变量，则函数$y=[x]$ 称为**取整函数**。它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 $\boldsymbol{Z}$。图象见图 1-4。

二、函数的性质

（一） 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义。若存在一个正数 M，对于所有的$x\in(a,b)$，恒有$|f(x)|\leq M$，则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内**有界**(bounded)，如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内**无界**(unbounded)。

例如，对于任意 $x\in\boldsymbol{R}$，恒有$|\sin x|\leq 1=M$；因此函数 $y=\sin x$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上有界。而函数$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,2)$内无界，在$[1,+\infty)$上有界。

（二） 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$对区间(a,b)内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在(a,b)内是单调递增的；当 $x_1<x_2$ 时，总有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在(a,b)内是单调递减的。单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**(monotone function)。

单调递增函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐上升的曲线(图 1-5)；单调递减函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐下降的曲线。(图 1-6)

（三） 函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$对其定义域内的每一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$成立，则称 $f(x)$为**偶函数**(even function)。如果函数 $y=f(x)$对其定义域内的每一个 x，都有$f(-x)=-f(x)$成立，则称 $f(x)$为**奇函数**(odd function)。

在中学数学里已经知道，奇函数的图象关于原点对称；偶函数的图象关于 y 轴对称。

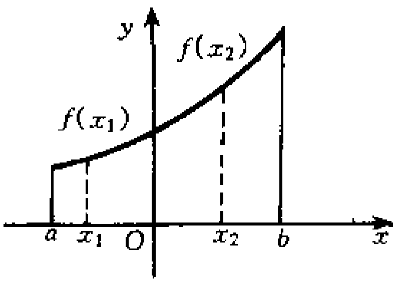

图 1-5

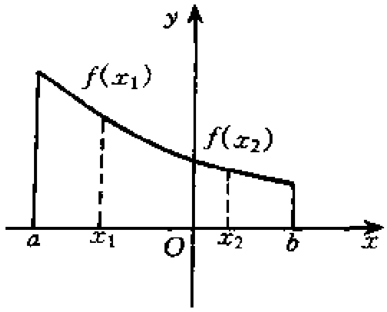

图 1-6

（四） 函数的周期性

对于函数 $y = f(x)$，$x\in D$，若存在一个不等于零的常数 T，使得每一个 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**(periodic function)，称常数 T 为这个函数的**周期**。周期函数的周期不是唯一的，通常所讲的周期指它的**最小正周期**。例如，$2k\pi(k=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 都是函数 $y=\sin x$ 的周期，而最小周期为 2π。

三、复合函数　反函数

为了求出竖直上抛物体的动能 E 对于时间 t 的函数，应用公式

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

式中，m 为物体的质量，v 为竖直上抛物体在时间 t 的速度。若上抛时的初速度为 v_0，则竖直上抛物体在时间 t 的速度由

$$v = v_0 - gt \tag{2}$$

唯一确定。将此唯一确定的 v 代入(1)式，得到竖直上抛物体的动能 E 对于时间 t 的函数关系：

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\ (v_0-gt)^2 \tag{3}$$

(3)式所表示的函数关系，由(2)式代入(1)式后“复合”而成。在高等数学中大量存在着这类函数。

定义 2　设 $y=f(u)$ 是数集 E 上的函数，$u=\varphi(x)$ 是从数集 D 到数集 E 的函数，对于每一个 $x\in D$，经过中间变量 u，都有唯一的 y 与之对应；产生在 D 上的新函数记作

$$y = f[\varphi(x)]$$

称为数集 D 上的**复合函数**(compound function)。其中，u 称为**中间变量**(intermediate variable)，显然，$u=\varphi(x)$ 的值域就是 $y = f(u)$ 的定义域。

例 9　设 $y = \lg u$，$u = 1-x^2$；则有复合函数 $y=\lg(1-x^2)$。由于 $\lg u$ 的定义域为 $u>0$，只有 $1-x^2>0$，即 $x\in(-1,1)$ 时，复合函数 $y=\lg(1-x^2)$ 有意义；故这个函数的定义域为 $(-1, 1)$。

例 10　复合函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 由 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 复合而成。但是函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，与函数 $u=2+x^2$ 的值域 $u\geq 2$ 无公共部分。因此，这个复合函数不存在。

例 11 函数 $y=\sqrt{\lg(x^2-1)}$ 由 $y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$，$v=x^2-1$ 复合而成；它的定义域为 $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$。

在微积分的计算中，经常遇到复合函数，并且需要分析它由那几个函数复合而成。

定义 3 对于函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$，如果满足条件：

(1) $y=f(x)$ 的值域包含在 $x=g(y)$ 的定义域内，并且

$$g[f(x)]=x \tag{4}$$

(2) $x=g(y)$ 的定义域包含在 $y=f(x)$ 的值域内，并且

$$f[g(y)]=y \tag{5}$$

则称函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 互为**反函数**(inverse function)，将 $x=g(y)$ 改写成 $y=g(x)$ 后，记作 $y=g(x)=f^{-1}(x)$，称为**直接函数 $y=f(x)$ 的反函数**。

实际上，要验证函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 是否互为反函数。根据(4)、(5)两式，只要验证等式 $g[f(x)]=x$ 和 $f[g(y)]=y$ 即可。

例 12 对于函数 $f(x)=2x+3$，$g(x)=\dfrac{x-3}{2}$ 有

$$f[g(y)]=2\times\frac{x-3}{2}+3=x,\qquad g[f(x)]=\frac{(2x+3)-3}{2}=x$$

因此，$f(x)=2x+3$ 和 $g(x)=\dfrac{x-3}{2}$ 互为反函数。

例 13 对于函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=\sqrt{x}$，当 $x=2$ 时，$g[f(2)]=2$，等式 $g[f(x)]=x$ 成立；当 $x=-2$ 时，$g[f(-2)]=-2$，等式 $g[f(x)]=x$ 不成立。产生这种情况的原因，是由于函数 $f(x)=x^2$ 的每一个函数值，对应着两个不同的自变量值。

定义 4 设 $y=f(x)$ 是数集 D 上的函数，如果对 D 中任意两点 x_1 和 x_2，当且仅当 $x_1=x_2$ 时，才有 $f(x_1)=f(x_2)$；则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是一一对应的，或称 $y=f(x)$ 为 **1-1 函数**。

定理 1 若 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的单调函数，则 $y=f(x)$ 为 1-1 函数。

证 设函数 $f(x)$ 单调递增。对于 D 中的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1>x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$；当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$。所以，只有 $x_1=x_2$ 时，才有 $f(x_1)=f(x_2)$；因此，$y=f(x)$ 为 1-1 函数。同样可证，当 $f(x)$ 为单调递减函数时，$y=f(x)$ 为 1-1 函数。

若 $y=f(x)$ 是 1-1 函数，则每一个函数值 y 与唯一的 x 值相对应。如果以 y 为自变量，x 为 y 的函数；这个新函数就是 $y=f(x)$ 的反函数。因此得到下面的定理。

定理 2 每一个 1-1 函数都有反函数存在。

由定理 1 和定理 2 可得到定理 3。

定理 3 若 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的单调函数，则一定存在反函数。

对于一些不存在反函数的函数，限制它的定义域，使之成为单调函数后；就可以有反函数。例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内递增。因此，将它的定义域限制为 $[0,+\infty)$ 后，就存在反函数 $f(x)=\sqrt{x}$。

在研究一个函数时，必须掌握它的"三要素"，即函数关系、定义域和值域。因为，由函数关系与定义域就可以确定一个函数关系。而值域为其反函数的定义域。此外，熟悉函数的图形，有助于函数的理论分析和实际应用；在研究函数时，可先作出它的图象，以利分析。