要　目

目　　錄

第十二章　函數的近似

第十三章　近似法則與計算方法

第十四章　電子計算機

第六章　偏微分方程式

6-1　導言

研究自然科學的時候，遇到偏微分方程式的機會，不亞於常微分方程式，一般的說，假設一種現象需要用多變數函數來表示，若用微分方程式，就要用偏微分方程式。在各種偏微分方程式中，被研究得最透澈的也或許是最重要的，要算是數學物理中的偏微分方程式了。

首先說明在各種介質中的振動現象。在這種振動現象中，物質的每一點，從其原來的平衡位置（x，y，z）至其在時間t 時所述位置的位移等於向量$\boldsymbol{u}$（x，y，z，t），這種變化和$\boldsymbol{u}$的大小方向因原始位置（x，y，z）及時間t 而定。這種變化，可以用向量場來表示。但是，只憑此向量場不能完全描寫物體振動的現象，除此以外，還需知道物體在每點的密度ρ（x，y，z，t），溫度T（x，y，z，t），以及內應力（internal stress），卽是物體全體對某部份所施的力量。

發生在時間和空間的物理現象不外是有關於空間諸點的某些物理量在時間的過程中所起的變化。在第二章中我們說過這種物理的數量可以用x, y，z，t 四個變數的函數來表示，其中x，y，z表示空間中某點的坐標，t 表示時間。

物理的數量可有多種，有的能完全以數值來表示，譬如溫度、密度等，這些數量稱為純量，其他的物理量，除數值以外，還有方向，因此稱為向量；譬如：速度，加速度，電場强度等。向量不但能用長度及方向來表示，也可以用它的分量來表示，譬如某向量在三互相垂直的坐標軸上的射影，便是這個向量的分量。

在數學物理上，一個純量場（Scalar field）可以用一個四變數的函數來表示：$S=f(x, y, z, t)$；一個向量場（Vector field）可以用三個四元的函數來表示。為表示一個向量場，我們可以用下面的向量式：

$$u(x, y, z, t)$$

或者用它的三個分量函數（向量在三個座標軸上的射影）：

$$u_x(x, y, z, t), \quad u_y(x, y, z, t), \quad u_z(x, y, z, t)。$$

除了純量和向量以外，在物理上還有別的更複雜的數量，譬如物體中某點的應力狀態（State of stress），這種數量稱爲張量（tensor），利用選定的坐標，張量可以用一組含同樣四元的函數來表示。

這樣，許許多多的物理現象都常用一組多元函數來表示，不過這種表示法，不能完全正確。

譬如我們普通用點（x，y，z）的函數來表示物體的密度，却忽略了物體在一個點上不能有密度的事實。因爲物體是由分子湊成的，分子並不是一個挨着一個的，彼此之間有相當的距離。分子間之距離在多數情形遠超過分子的大小，因此所謂密度，是物質的質量與包含這些物質的體積之比值而那體積不能過份小，但某點的密度，我們常把它想成是當體積變向無限小時這個比值的極限。物體的溫度概念是因做了比較更大的簡化，與理想化而形成的。物體的熱，是由於其中分子的亂動產生的；不同分子的能的大小各有不同，但若我們考慮一個包含很多分子的體積，則求諸分子亂動（Random Motion）的平均能，便得所謂的溫度。

同樣，所謂氣體或液體在容器上的壓力，並不應想成是氣體或液體的一個分子眞地壓在容器壁上。事實上，這些分子，在他們的亂動中，不停的衝撞容器又跳回去，因此我們所說的壓力，是許多分子在容器的單位面積上衝撞的力量。我們用的面積單位很小，但是比起分子間的距離要大的太多了。其他類似的例還有很多。物理上大多數的數量都是這樣性質的。數學物理研究理想化的數量，這是抽象而得來的，把許多具體的性質拋在一邊，只考慮這些數量的平均值就得到那些理想化的數量。

這種理想化的方法顯得很粗劣，但是極其有用，用這種方法，我們把認爲無關緊要的事放在一邊，只考慮它的主要性質，這樣我們就能分析極其複雜的現象了。

數學物理的對象是研究這些理想化的事物之間的關係，這些關係都是用一組一組的多元函數來表示。

6-2　數學物理中的一些極為簡單的方程式

物理定律表示物理量彼此之間的基本關係，從這些基本關係，用數學的推理又能導出更多的關係來；基本的關係固已極其繁多而導出的關係則尤為複雜，物理的定理，可以用聯繫一些未知函數的偏微分方程式或積分方程式的數學語言來表示，為說明這個意思，我們舉下面的幾個數學物理中的方程式為例。

A．物質不滅及熱能不滅的定律（關於介質運動的基本物理定律）

1. 物質不滅定律

為表示物質不滅定律，在空間任意指定一個體積Ω，在此體積內的質量 $M\Omega(t)$ 可以用下面的方程式來表示

$$M_\Omega\ (t) = \iiint_\Omega \rho(x, y, z, t)\ dx\, dy\, dz$$

這個質量並不是常數：在振動的過程中，體積內各點的密度不停的變，因為物體在振動，物體的分子不停的進入或離開此指定的體積。質量的變率便等於質量對時間的微分，即

$$\frac{d M_\Omega}{dt} = \iiint_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

從另一方面看，如果我們計算指定的體積表面 s 上每秒出進的質量（出量用負數表示），也可以求得質量的變率。為達到這個目的，我們注意表面 s 上的一塊小面積 ds，這塊面積既然極小，我們可以假設它是平的，而且分子的出進量及方向在每點都是一樣的，我們要注意從 t 到 $t+dt$ 時間內經過這塊小面積出入的質量，首先我們算出各分子的速度為向量

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$
（$\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$為一點從原來平衡位置（$x, y, z$）至在時間 t 時可達位置的位移）

經過 dt 時間以後，原來在 ds 平面上的分子，移動了 $\boldsymbol{v}dt$，來到 ds_1 平面上，原來在 ds_2 平面上的分子移到 ds 平面上來，（見第一圖）因此在 dt 時時間內經 ds 離開Ω的分子是包含在 ds_2 及 ds 中間的分子，這根柱形的高等於 $v\ dt\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v})$ 其中 $\boldsymbol{n}$ 表示 ds 上向外的單位法線，柱形的體積等於

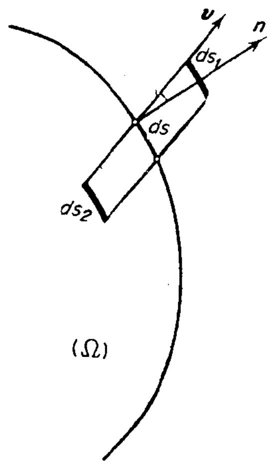

圖 6—1

$$v\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v})\,ds\,dt,$$

柱形內的質量等於

$$\rho v\cos(\boldsymbol{n},v)\,ds\,dt。$$

作全部s 的積分，便可得到在 dt 時間內離開全部體積Ω的質量：

$$\iint_s \rho v\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v})\,ds\,dt。$$

如果在某點上，$\boldsymbol{v}$ 是向內的，$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v})$便是負的，這就是說，在積分的時候，凡是進入Ω的質量都算是負的。用dt 除上述的積分便得Ω內物質外流的速率：

$$\iint_s \rho v_n\,ds,$$

其中 $v_n=v\cos(\boldsymbol{n},v)$。

物質的流量（Flux）等於 $\boldsymbol{q}=\rho\boldsymbol{v}$

令 $$q_n=q\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{q})$$

物質外流的速率又可以寫作

$$\iint_s q_n\,ds$$

$\boldsymbol{v}$ 在法線$\boldsymbol{n}$方向的分量，又可以$\boldsymbol{v}$ 及$\boldsymbol{n}$在諸坐標軸上的分量來表示，根據解析幾何，

$$u_n=v\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v})=v_x\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+v_y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})+v_z\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z}),$$

因此，物質外流的速度又可以用下面的公式表示

$$\iint_s \rho\,(v_x\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+v_y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})+v_z\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})\,ds。$$

根據物質不滅定律，物質在量上的變化率和物質外流速度是一樣的，因爲Ω內物質多少的變化即是分子進出表面s 的差別，因此

$$\iiint_{\Omega}^{S} \frac{\partial\rho}{dt}\,dx\,dy\,dz$$

$$=-\iint_S [\rho v_x \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+\rho v_y \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})+\rho v_z \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})]\,ds$$

$$=-\iint_S [q_x \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+q_y \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})+q_z \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})]\,ds$$

這個積分方程式適用於任意體積Ω，我們普通稱這積分方程式為“連續方程式”(The Equation of Continuity)。

上述的方程式中右面的積分，可以用歐斯道哥拉斯基或高斯（Ostrogradskii or Gauss）的程式換成體積積分：

$$\iint_S [\rho v_x \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+\rho v_y \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})+\rho v_z \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})]\,ds$$

$$=\iiint_\Omega \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]d\Omega$$

因此

$$\iiint_\Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]d\Omega=0$$ 在此Ω可為任意體積。

既然對任何Ω這個積分都等零，因此被積函數必恒等於零：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}=0 \qquad (1')$$

方程式（1）或（1′）是用偏微分方程式表示物理定律的一個典型例子。

2.熱的傳導

熱使物體內的分子運動，因此，在任何傳導體中，熱自一處傳到它處。物體中任何小斷面 ds 都有熱流穿過，在上一節中，我們曾用了物質流量 $\boldsymbol{q}=\rho \boldsymbol{v}$ 這樣一個向量。在這裡我們可以引用一個類似的向量熱流量 $\boldsymbol{\tau}$ 來描寫熱的傳導，令 $\tau_n=\tau\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\tau})$ 亦如用 q_n 代表$q\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{q})$。則在單位時間內經過面積 ds 流出的熱等於 $\tau_n ds$。

在上一節中，我們導出了連續方程式，並用它來表示流體中的物質不滅定律，在這裡，我們用同樣的方法可以導出一個偏微分方程式，來表示能量不滅的定律。導出的方法如下：

在某點上熱能的體積密度Q可以用下面的公式來表示

$$Q=CT$$

其中C表示熱容量（Heat Capacity），T表示溫度，如果在上一節導出連續方程式的程序中，用“熱能密度”代替“密度”，又用“熱流量”代替“物質流量”便可導出下面的公式：

$$C\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial \tau_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_z}{\partial z}=0 \qquad (2)$$

公式(2)適用於沒有熱源的物體。如果物體中有熱源，公式(2)便應稍爲變更，令q 等熱源的生產密度，即每單位體積在單位時間所產生之熱能，則熱能不滅定律取下列的樣式

$$C\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial \tau_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_z}{\partial y}=q \qquad (3)$$

3.還有一種連續方程式和上述的幾種連續方程式相似，這種方程式可以就t 來微分公式(1)而求得。譬如我們要求氣體在近似平衡狀態的小振動方程式，在這種小振動中，我們將假定密度的變化很小，以至$\partial\rho/\partial x$，$\partial\rho/\partial y$，$\partial\rho/\partial z$ 和v_x，v_y，v_z 的乘積便可不計，因此公式(1)可以寫成下面的樣式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0$$

就t 作此公式的微分，並省去$\frac{\partial \rho}{\partial t}$和$\frac{\partial v_x}{\partial x}$，$\frac{\partial v_y}{\partial y}$，$\frac{\partial v_z}{\partial z}$ 的乘積，得

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}+\rho\left(\frac{\partial\left(\frac{dv_x}{dt}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{dv_y}{dt}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{dv_z}{dt}\right)}{\partial z}\right)=0 \qquad (4)$$

B. 運動方程式

1.用微分方程式表示物理定律的一個重要例子便是平衡方程及運動方程式，假設物體是由很多的分子組成的，而且各分子以不同的速度活動。就如在例一中一樣，我們想像一個固定體積Ω，它的表面是s，體積內充滿了物體的分子，根據牛頓第三定律，一切分子的動量（momentum）變化的總合，等於作用在體積上一切力量的總合，根據力學，動量可以用下面的向量表示：

$$\boldsymbol{p}=\iiint_{\Omega}\rho \boldsymbol{v}\, d\Omega$$

原來佔據小體積 $d\Omega$ 的分子，有密度ρ，經過$\triangle t$ 時以後，佔據體積 $d\Omega'$，有密度ρ'，但是質量並沒有變化，因此，

$$\rho' d\Omega' = \rho d\Omega$$

如果在這時間內，速度$\boldsymbol{v}$ 變成$\boldsymbol{v}'$，即$\triangle \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$，相對的動量變化便是

$$\rho' \boldsymbol{v}' d\Omega - \rho \boldsymbol{v} d\Omega = \rho \boldsymbol{v}' d\Omega - \rho \boldsymbol{v} d\Omega = \rho \triangle \boldsymbol{v} d\Omega$$

在單位時間內動量的變化即動量變化率是

$$\rho \frac{\triangle \boldsymbol{v}}{\triangle t} d\Omega \approx \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} d\Omega$$

Ω 內一切的分子共有動量變化率

$$\iiint_\Omega \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} d\Omega$$

它的分量是

$$\iiint_\Omega \rho \frac{dv_x}{dt} d\Omega, \iiint_\Omega \rho \frac{dv_y}{dt} d\Omega, \iiint_\Omega \rho \frac{dv_z}{dt} d\Omega,$$

其中 $\frac{dv_x}{dt}$，$\frac{dv_y}{dt}$，$\frac{dv_z}{dt}$ 表示每個分子的加速度的分量，在此，

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{dt} + v_x \frac{\partial}{dx} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_y \frac{\partial}{\partial z}.$$

作用在體積上的力量有兩種：作用在每個分子的力量，及作用在體積表面的力量，前者是長期的，後者是短期的。

為說明這個意思，假設作用的物體是液體，在這裡，作用在表面上 ds 的力量是Pds，其中P 代表和 ds 垂直而向內的壓力，假設用$\boldsymbol{n}$ 代表表面S 上的單位法線向量，則作用在 ds 上的力量便是

$$-p\boldsymbol{n}\,ds$$

令$\boldsymbol{F}$表示從外面作用在單位體積的力量，則

$$\iiint_\Omega \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} d\Omega = \iiint_\Omega \boldsymbol{F} d\Omega - \iint_S p\boldsymbol{n}\,ds$$

這是運動的積分方程式和連續方程式一樣，這個方程式也可以變成微分方程式：

$$\rho\frac{dv_x}{dt}+\frac{\partial P}{\partial x}=F_x,\quad \rho\frac{dv_y}{dt}+\frac{\partial p}{\partial y}=F_y,\quad \rho\frac{dv_z}{dt}+\frac{\partial p}{\partial z}=F_z. \tag{5}$$

這便是代表牛頓第三定律的微分方程式。

2 另一種用微分方程式來表示力學定律的例是振動弦，一般的說，弦（譬如胡琴的弦）是一根細長輭軟的絲，在弦上的每一點，兩邊的張力相等。

我們要注意弦的一小段，令 $u(x, t)$ 代表弦自靜止的變動。假設弦的振動是在一個平面上而且是和 OX 軸垂直，則 $u(x, t)$ 在時間等於 t 的那一剎那便可用第二圖來表示，我們看看這根弦在 x_1 和 x_2 兩點中間的形狀，在這兩點上，有兩種力量，都等於兩點上的張力 T，張力 T 的方向是 $u(x, t)$ 曲線的切線方向。

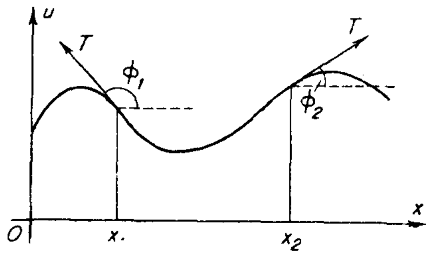

圖 6—2

如果這一段弦是彎曲的，這兩股力量的合力必不等零，根據力學，這股合力等於這一段弦的動量變化率。

令弦的每單位長度的質量等 ρ，則這一段弦的動量變化等於

$$\rho\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^2u}{dt^2}\,dx$$

假設弦的切線和 OX 軸的角度等 ϕ，則

$$T\sin\phi_2-T\sin\phi_1=\int_{x_1}^{x_2}\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\,dx$$

這是表示牛頓第三定律的積分方程式，從此可得

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}(T\sin\phi)$$

用微分的公式，很容易求得 $T\sin\phi$ 和 $u(x, t)$ 的關係。

從 $$\tan\phi=\frac{\partial u}{\partial x},$$

得 $$\sin\phi=\frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}$$

又根據假設，$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 極小，

因此
$$\sin\phi \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

這便是振動弦的微分方程式。

C. 數學物理的基本公式

在上述的幾個例中，表示物理現象的偏微分方程式，都是一組多元方程式，爲大多數的情形，這一組多元方程式可以用一個方程式來代替。

1.我們先討論理想液體的穩流方程式（Steady Flow Equation）

液體的流動有旋轉的和不旋轉的，一般的液體或氣體的流動，都多少有些轉動，因此不旋轉的流動只是一種特殊的情形。但是根據經驗，很多的流動可以用不旋轉的流動來表示，而且表示的相當正確，除此以外，在沒有黏性的液體中，沒有旋轉的運動，永久不會是旋轉的。

不旋轉的運動也稱爲位動（Potential），爲每一種位動，有一個純量函數$u(x, y, z, t)$，稱爲速度位（Velocity Potential），運動速度可以用它的導式來表示：

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

直到現在，我們研究的問題，都需要用四個四元方程式來表示，這四個方程式，可以湊成一個方程式，但是這一個方程式應當是二階方程式，下面便是一個簡單的例。

爲不能壓縮的液體中，$\partial\rho/\partial t = 0$，它的速度方程式是

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial u}{\partial z};$$

它的連續方程式是 $\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0$

將速度方程式代入連續方程式中，使得一個代表位動的二階微分方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (7)$$

2.“熱流”向量場也可以用一個純量函數“溫度”來表示。大家都知道

，熱能是由熱向冷的方向流動，因此熱流的方向和溫度梯度(Temperature-Gradient)的方向相反，根據經驗，熱流向量的長度，和溫度的長度成正比例。

溫度梯度的分量是

$$\frac{\partial T}{\partial x},\ \frac{\partial T}{\partial y},\ \frac{\partial T}{\partial z}$$

令比例係數等 k ，得

$$\tau_x=-k\frac{\partial T}{\partial x},\quad \tau_y=-k\frac{\partial T}{\partial y},\quad \tau_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}$$

將這些方程式代入熱能不滅方程式：

$$C\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}+\frac{\partial T_z}{\partial z}=q$$

得

$$C\frac{\partial T}{\partial t}=k\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+q \tag{8}$$

3.為氣體的微小振動，譬如音波振動，連續方程式是

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv_x}{dt}\right)+\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dv_y}{dt}\right)+\rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv_z}{dt}\right)=0 \tag{4}$$

它的振動方程式

$$\rho\frac{dv_x}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial x}=F_x,\quad \rho\frac{dv_y}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial y}=F_y,\quad \rho\frac{dv_z}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial z}=F_z \tag{5}$$

假設沒有外力的干涉，則 $F_x=F_y=F_z=0$ ，將(5)代入(4)中，又令 $\rho=a^2\rho$ ，得，

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right) \tag{9}$$

方程式(7)，(8)，(9)是數學物理中的幾個典型方程式，這些方程式都經人仔細的研究過，為了解很多數學物理的問題很有幫助。

6-3 原始值及邊界值的問題及題解的唯一性

Initial - Value & Boundary - Value Probleus and Uniqueness of a Solution

偏微分方程式和常微分方程式一樣，除了極少數的情形以外，都有無數

的解。爲了解一個具體的物理問題，除了普通的方程式以外，還需要知道一些附屬條件，才能在無數的解中，求得合適的一個，譬如爲預測天上某星球的運動，只知道牛頓的定律不夠，除此以外，還需要知道星球原始（即指定的某一個時間）的位置及速度等，因此，數學物理的問題，是求偏微分方程式的解，使它滿足某些附屬條件。

方程式(7)，(8)，(9)的構造不同，所解的物理問題因之而異，今分述如下

A. 拉伯拉斯及波松方程式；調和函數及邊界值問題的解的唯一性

Laplace Poisson Equation; Harmonic functions & uniqueness of solution of Boundary-Value problems for them.

讓我們先由拉伯拉斯及波松方程式開始，仔細研究這些問題

令
$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
則波松方程式可以寫成下面的樣式：
$$\triangle u = -4\pi\rho$$
其中 ρ 表示密度，有時 $\rho = 0$ ，在這種情形下，使得拉伯拉斯方程式：
$$\triangle u = 0.$$
拉伯拉斯方程式的解，稱爲調和函數。

很明顯的，波松方程式兩種解 u_1， 和 u_2 的差 $u_1 - u_2$，滿足拉波拉斯方程式，換句話說 $u_1 - u_2$，是一個調和函數，因此，波松方程式的解簇（Manifold of solutions） 可以說是調和方程式的解簇的一部。

如果 u 是波松方程式的一種特解，定義 w，使
$$u = u_0 + w,$$
也成爲波松方程式的特解，則 w 必是拉伯拉斯方程式的解。用同樣的方法，我們可以決定 w 的附屬條件，因此，爲解波松方程式，應先解拉伯拉斯方程式。

一般的數學物理的問題，往往是由一個具體的問題推廣而成，問題的附屬條件，便是具體的物理條件。

譬如物體的恒溫問題（Steady Temperature Problem）如果某物體

內或附近有熱源，令熱能自由流動，經過一個時期以後，物體內各點的溫度卽趨穩定，再不隨時間變化，令q 等熱源的密度，溫度和時間的關係是

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\triangle T+q$$

經過一段時間以後，物體的溫度變成穩定的$\partial T/\partial t=0$
因此得

$$\triangle T+q=0.$$

所以，在穩定溫度狀態中，物體的溫度滿足波松方程式，如果物體沒有熱源，則 $q=0$ ，波松方程式就變成了拉伯拉斯方程式：

$$\triangle T=0$$

爲求得物體內部的溫度，我們需要知道物體表面的條件，以前所講的爲物體內部的物理定律，在物體表面上要加修正。

爲建立穩定溫度，我們可以用下列三種方法。

1. 規定物體表面的溫度分配
2. 確定經過物體表面的熱流
3. 確定溫度和熱流的關係

假設物體的體積爲Ω ，表面爲S ，以上的三種方法可以用下列相對的三種方程式來表示：

1. $$T|_S=\phi(Q) \tag{10}$$
2. $$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_S=\psi(Q) \tag{10'}$$
3. $$\alpha\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_S+\beta T|_S=X(Q) \tag{10''}$$

其中Q表示表面上的一點。上述的三種方程式，稱爲邊界條件，在上述的條件下，波松或拉伯拉斯方程式的解是唯一的。

這樣，爲求波松方程式或拉伯拉斯方程式的解，只要知道物體邊界上的函數就夠了，現在，我們做進一步的研究，我們證明：爲一個拉伯拉斯方程式的解，卽調和函數，如果我們知道它在物體邊界上的分佈，它在物體內的分佈，便完全決定了。

我們先證明：如果調和函數有最大或最小，這最大最小應當在邊界上。

爲證明這件事，我們先證明，如果在物體內及邊界上$\triangle u>0$ ，則u在物體內不能有最大點，因爲如果u在物體內有最大點，則$\partial^2u/\partial x^2<0$，

$\partial^2 u/\partial y^2 < 0$，$\partial^2 u/\partial z^2 < 0$，因此$\Delta u < 0$ 這與假設正相反，是不可能的，同樣，如果$\Delta u < 0$，則u在物體內不能有最小點。

如果$\Delta u = 0$，則在u上加一個正函數，可使$\Delta u > 0$，同樣從u減去一個正函數，可使$\Delta u < 0$，譬如加減函數是

$$\pm\eta r^2 = \pm\eta(x^2+y^2+z^2)$$

其中η是一個任意小的函數。

加上一個任意小數，並不變更函數u的最大或最小，如果調和函數u在物體內有最大點，則加上ηr^2以後，還是有最大點，根據假設$\Delta(u+\eta r^2) > 0$，這樣根據以上的理論，$u+\eta r^2$絕不能在物體內有最大點，這又有了矛盾。因此u在物體內不能有最大點，同樣我們可以證明u在物體內不能有最小點。

這條定理有一個重要的結論：如果兩個調合函數在邊界上相同，則在區域相同，因爲兩調和函數的差也是調和函數，這個差在邊界上等零，因此在區域內也必等零。

這樣看來，調和函數決定於邊界上的值，反過來說，爲每一個邊界上的函數（要正規的），在區域內就有一個調和函數。

如果經過物體表面的熱流或者熱流與溫度的關係已經決定，則物體內的恒溫即可決定，這兩條定理的證明比較困難，我們討論數學物理的方法的時候，再詳細的討論。

B．熱方程式的邊界值問題

不穩定的熱方程式和穩定的熱方程式大不相同，根據物理的現象只憑表面上的溫度分配，或穿過表面的熱流速度，不能解決物體內部的溫度問題，除此以外，我們還需要知道物體內部原始溫度的分配，才能求得問題的唯一解答。因此，爲求方程式(8)的解答，需要指定物體內部原始溫度方程式$T_0(x, y, z)$和一個邊界條件方程式。反過來說，這兩個條件也足夠解決問題。和以前的問題一樣，邊界條件可能是物體表面上的溫度分配，或穿過表面的熱流速度或者是熱流速度及溫度的關係。

這樣，熱方程式的邊界值問題可以用下面的方式表達：

已知　$$T|_{t=0} = T_0(x, y, z) \qquad (11)$$

及下列三條件之一

$$T\Big|_s=\phi\ (Q) \tag{12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_s=\psi\ (Q) \tag{12'}$$

$$\alpha\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_s+\beta T\Big|_s=X(Q) \tag{12''}$$

其中Q 代表表面s 上的任意點。

試求

$$C\frac{\partial T}{\partial t}=k\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Big)+q \tag{8}$$

的解答。

在這裡我們不願詳細的證明這些問題都有唯一的解答。我們只證明第一種問題(8)，(11)及(12)有唯一的解答，而且只爲沒有熱源的情形，更詳的說，我們願意證明：在下列條件下：

$$T|_{t=0}=T_0(x,\ y,\ z)$$

$$T\Big|_s=\phi\ (Q)$$

方程式 $$\Delta T=\frac{1}{a^2}\ \frac{\partial T}{\partial t}$$

有唯一的解答。

和證明拉伯拉斯方程式的解答是唯一的時候一樣，在證明以上的定理以前，我們先證明，如果

$$\Delta T-\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}<0$$

則 $T(x,y,z,t)$，$(0\le t\le t_0)$ 的最大或最小或者在表面上，或者在物體內部，如果在物體的內部，則必須在 $t=0$ 的時候。

假設在 $t=t_0$ 的時候，T 在物體內部某點最小，則在此點，$\partial T/\partial x=\partial T/\partial y=\partial T/\partial z=\partial T/\partial t=0$，而且 $\partial^2 T/\partial^2 x>0$，$\partial^2 T/\partial y^2>0$，$\partial^2 T/\partial z^2>0$ 這樣$\Delta T-(1/a^2)(\partial T/\partial t)>0$

這和我們的假設相反。因此T 的最小點不能在物體內部。

同樣，我們可以證明如果