高等学校教材

工程电磁学

——解题指南和习题

陈 国 瑞　等编译

西 北 工 业 大 学 出 版 社

高等学校教材

工程电磁学

——解题指南和习题

陈国瑞　李春晖
岳　怡　周书荣　编译

西北工业大学出版社

1989年8月　西安

内 容 简 介

本书共十二章，分章列出静电场和恒定磁场、电位和磁位、镜像法与边值问题、时变场、平面电磁波、波导和电磁波辐射方面的重要公式和定理，提供近千道不同类型和风格的题解和习题，包括少量研究生入学试题。全书理论部分内容简明扼要，题解方法详尽，图文并茂，矢量运算贯串全书，书末给出全部习题答案。

本书适于作为大学无线电技术、通信及电子工程等专业学生学习"电磁波"的参考书，也可作为学习"普通物理"电磁学部分的参考书。

高等学校教材
工 程 电 磁 学
——解题指南和习题
编 译 者　陈国瑞等
责任编辑　柴文强
责任校对　李　岳
*
西北工业大学出版社出版
(西安市友谊西路 127 号)
陕西省新华书店经销
西北工业大学出版社印刷厂印装
*
开本 787×1092　1/16　24.5 印张　581 千字
1989 年 8 月第 1 版　1989 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—4500 册
ISBN 7-5612-0111-7/TN·4(课)　定价：5.12 元

前 言

电磁学一方面是在库仑定律、安培定律和法拉第定律等实验定律的基础上建立的，本身有很强的实践性；另一方面，电磁学又是经过严密推理形成的，有很强的理论性，涉及的数学知识很多，显得十分抽象。学生在学习时，常常反映难学，不少学生在解题时，感到无从下手。为了帮助学生在学习时，能将理论与实践结合起来，我们于 1986 年开发了“工程电磁场与波”计算机辅助教学软件包，在校内外推广应用，反映良好。但仍有不少学生反映，希望能有一本解题的参考书，我们在开发该软件包的基础上，又编译了本书，其目的就是帮助和培养学生的分析问题和解决问题的能力。

本书共分十二章。第一章是矢量分析，提供矢量在直角坐标、圆柱坐标和球坐标系统中的表达式及三种坐标系的转换关系；第二章至第五章为静电场场强、电位、电能和电容计算；第六章和第七章为恒定磁场场强、磁力和电感计算；第八章为边值问题解，包括分离变量法、复函数法和数值计算法等；第九章至第十二章为时变场和电磁波动问题，包括麦克斯韦方程组、电磁波在各向同性和异性媒质中的传播特性、波导及谐振腔和电磁辐射。每章均由理论、题解和习题三部分组成，本书提供的镜象法公式比较齐全，位场数值计算方面提供有典型计算程序。全书有不同类型和风格的题目近千道，其中包括少量研究生入学试题，书末附有全部答案。

参加本书编译的有陈国瑞、李春晖、岳怡和周书荣，第一章至第四章由岳怡编译，第五章由周书荣编译，第六章至第十二章由李春晖编译，李春晖完成全部题解工作，周书荣完成插图底图绘制工作，陈国瑞负责全书校译和审定。

本书编译过程中，主要参考美国普渡大学小赫约特（William H.Hayt, Jr）教授的“工程电磁学”一书，该书是美国最通用的教科书之一，也参考了一些海内外同类书籍。

本书付印前虽经反复校勘，但限于水平，书中不妥和错误之处，恐仍在所难免，敬请读者批评指教。

编译者

1988 年 3 月于西北工业大学

目 录

第一章　矢量分析

§1.1　矢量代数

在空间，既有大小又有方向的量称为矢量 (Vector)，通常用带箭头的字母$\vec{A}$或黑体字母$\boldsymbol{A}$表示．本书约定用后者表示．矢量的大小称为绝对值，用$|\boldsymbol{A}|$或A表示．只有大小而无方向的量为标量（Scalar），标量只用实数表示．

基本矢量代数公式有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \qquad \text{(交换律)} \qquad (1-1)$$

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \qquad \text{(结合律)} \qquad (1-2)$$

$$\left.\begin{aligned}(m+n)\boldsymbol{A}&=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{A}\\ m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(分配律)} \qquad (1-3)$$

式中 m 和 n 为标量，$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为矢量．

§1.2　单位矢量和矢量分量

模值为 1 的矢量称为单位矢量（Unit Vector），矢量$\boldsymbol{B}$的单位矢量用 $\boldsymbol{a}_B$ 表示，它等于

$$\boldsymbol{a}_B=\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} \qquad (1-4)$$

矢量可以分解，在空间直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{a}_x+B_y\boldsymbol{a}_y+B_z\boldsymbol{a}_z \qquad (1-5)$$

$$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2} \qquad (1-6)$$

式中$B_x\boldsymbol{a}_x$称为矢量$\boldsymbol{B}$在x方向的分矢量．$\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$和$\boldsymbol{a}_z$分别为直角坐标系中x，y和z轴方向的单位矢量，或称基本单位矢量．关于其它坐标系的矢量分量见 §1.4 节．

【例1】指出单位矢量和基本单位矢量的关系．

解：将式（1－5）和（1－6）代入（1－4）得出

$$\boldsymbol{a}_B=\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}\boldsymbol{a}_x+\frac{B_y}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}\boldsymbol{a}_y+\frac{B_z}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}\boldsymbol{a}_z$$

或

$$\boldsymbol{a}_B=\cos\alpha\ \boldsymbol{a}_x+\cos\beta\ \boldsymbol{a}_y+\cos\gamma\ \boldsymbol{a}_z$$

$$\cos\alpha=\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}};\quad \cos\beta=\frac{B_y}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}};\quad \cos\gamma=\frac{B_z}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}$$

上式称为方向余弦.

§1.3 标量积和矢量积

矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的标量积，亦称点积（Scalar or Dot Product）．点积是标量，可写成:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{1-7a}$$

或

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{1-7b}$$

根据式（1－5），标量积又可写成

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1-7c}$$

标量积服从交换律

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1-8}$$

也服从分配律

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1-9}$$

若矢量$\boldsymbol{A}\neq0$，$\boldsymbol{B}\neq0$，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$垂直的条件为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1-10}$$

标量积在物理上的应用例子是作功和通量.

【例2】利用图1－1以标量积导出余弦公式

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

解: $\because\quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

$\therefore\quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

根据式（1－7）得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

两矢量的矢量积也称叉积（Vector or Cross Product），叉积是矢量，其表达式为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(AB\sin\theta)\ \boldsymbol{a}_c\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{1-11a}$$

$\boldsymbol{C}$垂直于$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$所在平面．$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$三者符合右螺旋规则，$\boldsymbol{a}_c$为$\boldsymbol{C}$的单位矢量（图1－2）．

于是

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{1-11b}$$

矢量积的其它表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=&\ (A_x\boldsymbol{a}_x+A_y\boldsymbol{a}_y+A_z\boldsymbol{a}_z)\times(B_x\boldsymbol{a}_x+B_y\boldsymbol{a}_y\\&+B_z\boldsymbol{a}_z)\\=&\ (A_yB_z-A_zB_y)\ \boldsymbol{a}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\ \boldsymbol{a}_y\\&+(A_xB_y-A_yB_x)\ \boldsymbol{a}_z\end{aligned}\tag{1-12}$$

或

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{bmatrix}\tag{1-13}$$

矢量积服从分配律

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\tag{1-14}$$

但不服从交换律．改变$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$次序，乘积符号相反，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}\tag{1-15}$$

若矢量$\boldsymbol{A}\neq 0$和$\boldsymbol{B}\neq 0$，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$平行的条件为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0\tag{1-16}$$

矢量积在物理上应用例子很多，如带电粒子在磁场中运动时受到的力$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，力矩$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F}$等，矢量积的模在几何上代表平行四边形的面积．

【例3】求由矢量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}_x+3\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z$和$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$组成的平行四边形面积（图1－3）．

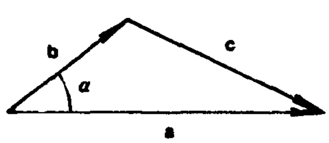

图 1-1

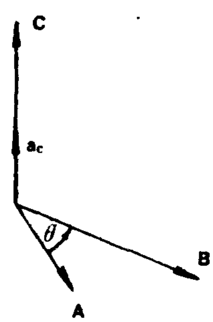

图 1-2

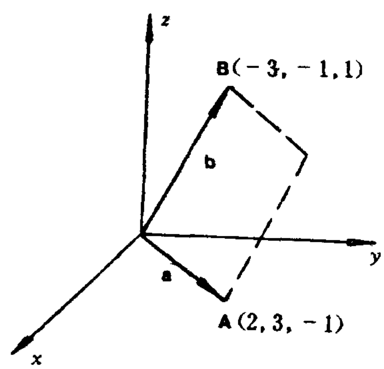

图 1-3

解：矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$构成平行四边形两邻边．利用式（1－12），有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=[3\cdot1-(-1)(-1)]\,\boldsymbol{a}_x+[(-1)(-3)-2\cdot1]\,\boldsymbol{a}_y\\&\quad+[2(-1)-3(-3)]\,\boldsymbol{a}_z\\&=2\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+7\boldsymbol{a}_z\end{aligned}$$

平行四边形面积:

$$|c|=\sqrt{2^2+1^2+7^2}=7.35$$

三重标量积也称混合积（Triple Scalar Product），混合积是标量，可写成

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{1-17}$$

在直角坐标中混合积也可用行列式表示

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{bmatrix} \tag{1-18a}$$

混合积可以用（$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$）轮换法运算，即

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1-18b}$$

混合积的几何意义是平行六面体的体积.

对非零矢量，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$共面的条件为

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0 \tag{1-19}$$

或

$$\begin{bmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{bmatrix}=0 \tag{1-20}$$

三重矢量积（Triple Vector Product）是矢量，即

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1-21}$$

注意：$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$，说明三重矢量积不符合结合律，式中括号的作用不容忽视．但对三重标量积总是先运算矢量积，所以，括号可以去掉，如

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$$

【例4】试证明

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$$

证：由式（1－21）

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \qquad ①$$

由式（1－11）

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

再由式（1－21）

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=-[(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}] \qquad ②$$

①和②不相等．　　证毕．

§ 1.4 圆柱坐标系和球坐标系

矢量本身有完全确定的物理意义，和坐标系无关，但在求解具体物理问题时常常需要引入坐标系，有时还需进行坐标变换．直角坐标系（笛卡尔坐标）、圆柱坐标系（柱坐标）和球坐标系是三种最常用的坐标系（图 1 – 4）．

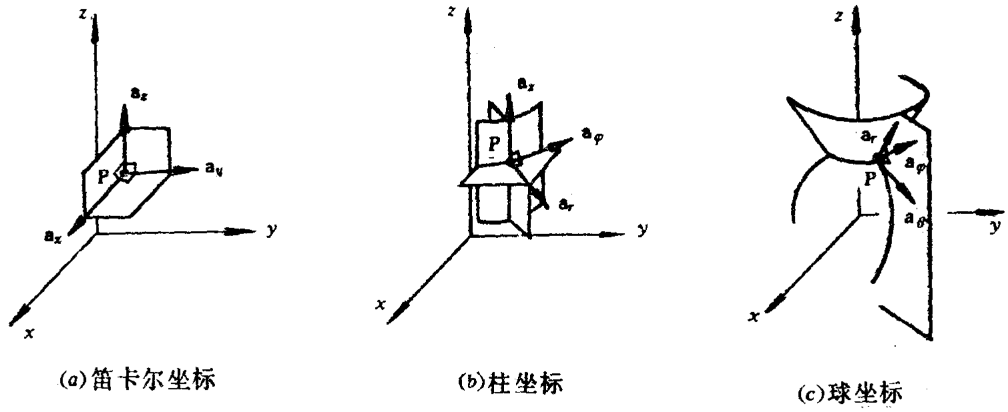

图 1–4

矢量在三种不同坐标系中的分量表示分别为

$$\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{a}_x + A_y\,\boldsymbol{a}_y + A_z\,\boldsymbol{a}_z \qquad \text{直角坐标} \quad (1-22a)$$

$$\boldsymbol{A} = A_r\,\boldsymbol{a}_r + A_\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi + A_z\,\boldsymbol{a}_z \qquad \text{圆柱坐标} \quad (1-22b)$$

$$\boldsymbol{A} = A_r\,\boldsymbol{a}_r + A_\theta\,\boldsymbol{a}_\theta + A_\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi \qquad \text{球坐标} \quad (1-22c)$$

$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{a}_\varphi$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 为圆柱坐标系的单位矢量，三者成正交关系；

$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{a}_\theta$ 和 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 为球坐标系的单位矢量，三者成正交关系．

1. 圆柱坐标和直角坐标的变换关系

两种坐标之间的变换为

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad (1-23)$$

和

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad (1-24)$$

已知

$$\left.\begin{aligned} A_r &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_r \\ A_\varphi &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_\varphi \\ A_z &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_z \end{aligned}\right\} \qquad (1-25)$$

将式（1－22a）代入式（1－25）可得矢量分量的变换关系

$$\left.\begin{aligned} A_r &= (A_x\boldsymbol{a}_x + A_y\boldsymbol{a}_y + A_z\boldsymbol{a}_z)\cdot\boldsymbol{a}_r \\ \text{即}\quad A_r &= A_x\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_r + A_y\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_r \\ \text{同理}\quad A_\varphi &= A_x\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_\varphi + A_y\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_\varphi \\ A_z &= A_z \end{aligned}\right\} \tag{1-26}$$

根据图1－4（b），式（1－26）中单位矢量的标量积列于表1－1中。

表中 φ 为单位矢量 $\boldsymbol{a}_r$ 和 $\boldsymbol{a}_x$ 之间的夹角，即方位角。于是根据式（1－23）至（1－26）及表1－1，即可完成直角坐标和圆柱坐标的相互变换。

【例5】试将矢量 $\boldsymbol{B}=y\boldsymbol{a}_x-x\boldsymbol{a}_y+z\boldsymbol{a}_z$ 变换为圆柱坐标表示。

解：由式（1－25）或（1－26）得

$$B_r=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}_r=y(\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_r)-x(\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_r) \tag{①}$$

$$B_\varphi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}_\varphi=y(\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_\varphi)-x(\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_\varphi) \tag{②}$$

$$B_z=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}_z=B_z \tag{③}$$

由表1－1和式（1－23），进一步变换①、②和③式，得 $B_r=0$，$B_\varphi=-r$，$B_z=z$。于是

$$\boldsymbol{B}=-r\boldsymbol{a}_\varphi+z\boldsymbol{a}_z$$

2．球坐标和直角坐标的变换，类似于圆柱坐标和直角坐标的关系，球坐标和直角坐标之间的关系可写为

$$\left.\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\varphi \\ y&=r\sin\theta\sin\varphi \\ z&=r\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

和

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2} && (r\geqslant 0) \\ \theta&=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} && (0\leqslant\theta\leqslant\pi) \\ \varphi&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \tag{1-28}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} A_r&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_r \\ A_\theta&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_\theta \\ A_\varphi&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

将式（1－22a）代入式（1－29）得

$$\left.\begin{aligned} A_r &= A_x\,\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_r + A_y\,\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_r + A_z\,\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_r \\ A_\theta &= A_x\,\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_\theta + A_y\,\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_\theta + A_z\,\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_\theta \\ A_\varphi &= A_x\,\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_\varphi + A_y\,\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1-30)$$

根据图 1－4(c)，式（1－30）单位矢量的标量积见表 1－2。

表 1–1

	$\boldsymbol{a}_r$	$\boldsymbol{a}_\varphi$	$\boldsymbol{a}_z$
$\boldsymbol{a}_x\cdot$	cosφ	$-$sinφ	0
$\boldsymbol{a}_y\cdot$	sinφ	cosφ	0
$\boldsymbol{a}_z\cdot$	0	0	1

表 1–2

	$\boldsymbol{a}_r$	$\boldsymbol{a}_\varphi$	$\boldsymbol{a}_\theta$
$\boldsymbol{a}_x\cdot$	sinθcosφ	cosθcosφ	$-$sinφ
$\boldsymbol{a}_y\cdot$	sinθsinφ	sinθsinφ	cosφ
$\boldsymbol{a}_z\cdot$	cosθ	$-$sinθ	0

表 1－2 中 θ 为单位矢量 $\boldsymbol{a}_z$ 和 $\boldsymbol{a}_r$ 之间的夹角，即俯仰角．φ 为 $\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 之间的夹角，即方位角．于是根据式（1－27）至（1－30）及表 1－2 可完成球坐标和直角坐标间的相互变换．

§ 1.5　矢量场

若空间任一点 P（x，y，z）都有矢量 $\boldsymbol{A}$（x，y，z）与之对应，则 $\boldsymbol{A}$ 是位置的矢量函数．在直角坐标系中

$$\boldsymbol{A} = A_x(x, y, z)\,\boldsymbol{a}_x + A_y(x, y, z)\,\boldsymbol{a}_y + A_z(x, y, z)\,\boldsymbol{a}_z$$

因此，一个空间矢量场需要三个标量函数 A_x，A_y 和 A_z 才能完全确定．随时间变化的矢量场称为时变场．

可以用力线或矢线图表示矢量场．曲线 c 上每一点的切线与矢量在该点的方向一致时，曲线 c 就被称为矢线或力线．例如

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = -x\,\boldsymbol{a}_x - y\,\boldsymbol{a}_y$$

经坐标变换后

$$\boldsymbol{A} = -r\,\boldsymbol{a}_r$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

矢量模值为 r，方向沿径向指向圆心，可得矢量场，如图1－5所示。

根据矢量定义，也可以通过矢量微分方程

$$\boldsymbol{A} \times d\boldsymbol{l} = 0 \qquad (1-31)$$

得到矢量场图．对直角坐标，矢线的微分元

$$d\boldsymbol{l} = dx\,\boldsymbol{a}_x + dy\,\boldsymbol{a}_y + dz\,\boldsymbol{a}_z$$

于是得

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)}=\frac{dy}{A_y(x, y, z)}=\frac{dz}{A_z(x, y, z)} \qquad (1-32a)$$

同理，对圆柱坐标系，矢线的微分元

$$d\boldsymbol{l}=dr\,\boldsymbol{a}_r+rd\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi+dz\,\boldsymbol{a}_z$$

相应的力线方程为

$$\frac{dr}{A_r}=\frac{rd\varphi}{A_\varphi}=\frac{dz}{A_z} \qquad (1-32b)$$

对球坐标系，矢线的微分元

$$d\boldsymbol{l}=dr\,\boldsymbol{a}_r+rd\theta\,\boldsymbol{a}_\theta+r\sin\theta d\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi$$

相应的力线方程

$$\frac{dr}{A_r}=\frac{rd\theta}{A_\theta}=\frac{r\sin\theta d\varphi}{A_\varphi} \qquad (1-32c)$$

求解力线方程后，就可以画出矢量场图.

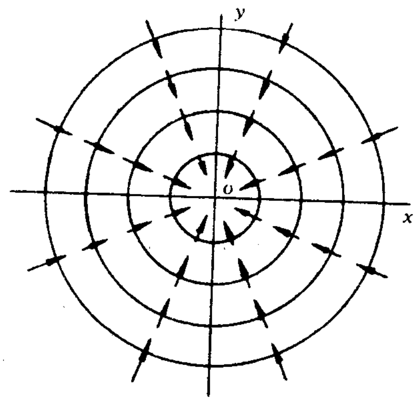

图 1-5

【例6】试通过力线方程，求 $\boldsymbol{A}=-x\,\boldsymbol{a}_x-y\,\boldsymbol{a}_y$ 的矢量场图.

解：这是一个二维场，由式（1－32a）有

$$\frac{dx}{-x}=\frac{dy}{-y}$$

两边分别积分后

$$c+\ln x=\ln y+c_1$$

或

$$y=kx \qquad k\text{为任意常数.}$$

由此可画出一簇辐射形的矢量场图（见图1－5）.

题　解

1. 确定起点为 $P(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 的矢量 $\boldsymbol{r}$，并求它的模及其单位矢量.

解：P 的位置矢量是 $\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{a}_x+y_1\boldsymbol{a}_y+z_1\boldsymbol{a}_z$，$Q$ 的位置矢量是 $\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{a}_x+y_2\boldsymbol{a}_y+z_2\boldsymbol{a}_z$

故 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2\boldsymbol{a}_x+y_2\boldsymbol{a}_y+z_2\boldsymbol{a}_z)-(x_1\boldsymbol{a}_x+y_1\boldsymbol{a}_y+z_1\boldsymbol{a}_z)$

$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_x+(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_y+(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_z$$

模 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

单位矢量 $\boldsymbol{a}_r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\dfrac{(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_x+(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_y+(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$

2. 写出单位矢量的表达式。该矢量从 z 轴上的 $z=h$ 点指向圆柱坐标中的（r，φ，0）点，参见图 1—6.

解：矢量 $\boldsymbol{R}$ 是两矢量之差，即

$$\boldsymbol{R}=r\,\boldsymbol{a}_r-h\,\boldsymbol{a}_z$$

单位矢量

$$\boldsymbol{a}_R=\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}=\frac{r\,\boldsymbol{a}_r-h\,\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

在上两式中尽管 φ 没有明显地表示出来，然而，$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{a}_R$ 都通过 $\boldsymbol{a}_r$ 随 φ 而变化。

3. 试求在柱坐标中点 $P(5,3\pi/2,0)$ 和点 $Q(5,\pi/2,10)$ 之间的距离（图 1－7）.

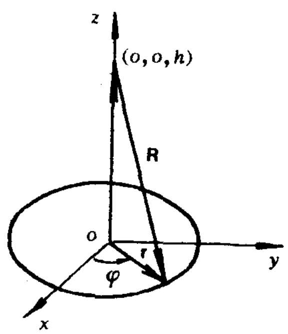

图 1—6

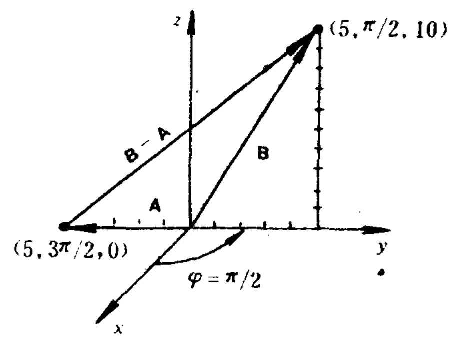

图 1—7

解：首先求出直角坐标位置矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A}=-5\,\boldsymbol{a}_y$$

$$\boldsymbol{B}=5\,\boldsymbol{a}_y+10\,\boldsymbol{a}_z$$

于是

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=10\,\boldsymbol{a}_y+10\,\boldsymbol{a}_z$$

两点间的距离为

$$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=10\sqrt{2}$$

4. 求一垂直于 $\boldsymbol{A}=2\,\boldsymbol{a}_x-6\,\boldsymbol{a}_y-3\,\boldsymbol{a}_z$ 和 $\boldsymbol{B}=4\,\boldsymbol{a}_x+3\,\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z$ 所在平面的单位矢量.

解法1:

令矢量 $\boldsymbol{C}=C_1\,\boldsymbol{a}_x+C_2\,\boldsymbol{a}_y+C_3\,\boldsymbol{a}_z$ 垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所在平面，那么 $\boldsymbol{C}$ 既与 $\boldsymbol{A}$ 垂直，也与 $\boldsymbol{B}$ 垂直. 因此

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}=2C_1-6C_2-3C_3=0$$

即 $$2C_1-6C_2=3C_3 \qquad ①$$

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}=4C_1+3C_2-C_3=0$$

即 $$4C_1+3C_2=C_3 \qquad ②$$

解联立方程①和②得

$$C_1=\frac{1}{2}C_3, \qquad C_2=-\frac{1}{3}C_3$$

故 $$\boldsymbol{C}=C_3\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_x-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z\right)$$

于是 $\boldsymbol{C}$ 方向的单位矢量是

$$\boldsymbol{a}_c=\pm\frac{\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{C}|}=\pm\frac{C_3\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_x-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z\right)}{\sqrt{C_3^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+(1)^2\right]}}$$

$$=\pm\left(\frac{3}{7}\boldsymbol{a}_x-\frac{2}{7}\boldsymbol{a}_y+\frac{6}{7}\boldsymbol{a}_z\right)$$

解法2:

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所在平面的矢量，以 $\boldsymbol{C}$ 表示，则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ 2 & -6 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{bmatrix}=15\boldsymbol{a}_x-10\boldsymbol{a}_y+30\boldsymbol{a}_z$$

于是单位矢量是

$$\boldsymbol{a}_c=\frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}=\frac{15\boldsymbol{a}_x-10\boldsymbol{a}_y+30\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{(15)^2+(-10)^2+(30)^2}}=\frac{3}{7}\boldsymbol{a}_x-\frac{2}{7}\boldsymbol{a}_y+\frac{6}{7}\boldsymbol{a}_z$$

另一方向相反的单位矢量由 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 确定，即 $(-3\boldsymbol{a}_x+2\boldsymbol{a}_y-6\boldsymbol{a}_z)/7$

5. 若 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{a}_x-3\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x+4\boldsymbol{a}_y-2\boldsymbol{a}_z$ 求:

(a) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

(b) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$

解：问题 (a)，有两种解法。

解法1:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{a}_x-3\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z)\times(\boldsymbol{a}_x+4\boldsymbol{a}_y-2\boldsymbol{a}_z)$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{a}_x\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 4 & -2\end{bmatrix}-\boldsymbol{a}_y\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}+\boldsymbol{a}_z\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=10\boldsymbol{a}_x+3\boldsymbol{a}_y+11\boldsymbol{a}_z$$

解法2:

$$(2\boldsymbol{a}_x-3\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z)\times(\boldsymbol{a}_x+4\boldsymbol{a}_y-2\boldsymbol{a}_z)$$