高等学校教材

大系统最优化

武汉水利电力学院 高文豪 编

高等学校教材

大系统最优化

武汉水利电力学院 高文豪 编

水利电力出版社

内 容 简 介

本书是为电力类各专业高年级学生，并兼顾该专业和其它工科专业研究生选修课的需要而编写的教材。本书共八章，主要讲述“大系统最优化”的基本知识，内容涉及到：运筹学、最优控制及大系统最优化的理论和方法。

书中内容通俗易懂，取材广泛，在阐明基本原理的同时，列举了较多例题，以便读者自学。

本书除作教材外，亦可供各级管理人员和工程技术人员自学参考。

高等学校教材

大系统最优化

武汉水利电力学院 高文豪 编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 10.5印张 236千字

1991年5月第一版 1991年5月北京第一次印刷

印数 0001— 1090册

ISBN 7-120-01231-2/TM·352

定价2.80元

前　　言

最优化是为了达到最优的目的，从所有可利用的方案中选择一个最好方案的学科。最优化的问题不仅在运筹学、系统工程和经济管理等学科内具有重要地位，而且在国民经济的各个部门和科学技术的各个领域中普遍存在，更重要的是最优化技术在制定国民经济计划、加强经济管理、控制人口增长以及工程领域内各个方面已得到了卓有成效的应用。因此，加强最优化理论和方法的研究、应用，对加速四化建设，提高管理水平，取得最高经济效益有着重要的意义。

关于最优化理论和方法的专著，近几年来，国内已有不少问世。这些著作的内容基本涉及到运筹学和现代控制理论中静态和动态的最优化理论和方法。

随着现代工业、空间技术和商业等的规模和复杂程度的日益增加，大系统不断增加。例如：大型工厂企业、大电力网、大交通网、大通讯网、国民经济管理系统、大型商业中心和公共服务系统等。只要这些大系统的规划、设计、筹建和运行稍有改进，就会获得巨大的社会经济效益。然而，企图直接应用通常的最优化理论和方法，“一揽子”解决大系统的最优化问题，无论在理论上还是在技术上都是行不通的。为了探讨新的处理方法，从本世纪60年代起，特别是70年代以来，不断有新的基本理论和方法提出。目前研究和应用较多的是递阶控制结构“分解——协调”方法的大系统最优化理论。这种理论和方法是以通常的静态最优化和动态最优化技术为基础的，这也正是本书要讲述的基本内容。

本书第一章介绍大系统最优化的基本知识；第二章至第三章讲述静态最优化知识；第五章至第七章讲述动态最优化知识；第四章和第八章介绍大系统最优化理论和方法。

本书由武汉水利电力学院高文豪编写，郭荣芳整理全书，华中理工大学陈珽教授主审，并提出了宝贵意见，在此表示衷心的谢意。

大系统最优化涉及的知识面广泛，而编者的业务水平和教学经验有限，书中错误和不妥之处在所难免，望广大读者批评指正。

编者

1990年1月

目 录

第一章 绪　　论

1-1 系统与大系统的概念

系统这一概念来源于人类长期的社会实践，但由于古代科学技术不发达，系统这个概念一直没有得到应有的重视。近半个世纪以来，系统作为一个研究对象在国际上引起了很多人的注意，系统吸引了众多领域和专家从事研究和应用，并逐步形成了一门新兴的科学。

本世纪20年代贝塔朗菲（L.Von.Bertalanffy）的理论生物学，40年代维纳的控制论、申农的信息论，60年代到70年代普里高津（I.Prigogine）的耗散结构理论、哈肯（H.Haken）的协合学理论等，构成了通向“系统时代”的阶梯。

70年代以来，系统理论，特别是大系统理论成为一些国际学术论坛的令人瞩目的中心议题。许多国家纷纷建立了专门的研究机构，掀起了“系统”研究的热潮，仅大系统理论的论文，已公开发表几千篇。在美国、日本、法国、英国、苏联、意大利、加拿大、波兰以及我国等许多国家中，有关研究机构、大学、军事部门、经济管理部门，都在开展大系统的理论研究及其实际应用工作。另外，国际上还有跨国的大系统研究机构，如1972年在维也纳成立的国际应用系统分析研究所(IIASA)，有各国的学者参加，进行国际协作研究涉及世界范围的大系统问题，如世界资源问题、能源问题、人口问题、生态问题、经济模型等。

“系统”这个名词目前使用得很广泛，例如工程技术中的控制系统、机械传动系统、建筑结构杆件系统等，医学生物学中的神经系统、消化系统、呼吸系统等，生产管理中的管理系统、调度系统等，社会经济方面的经济系统、人口系统等等；又如，一部计算机是由中央处理机、主储存器、接口、外部设备组成的系统，一个热力发电厂是由燃料运输机、锅炉、汽机、发电机、变压器等组成的生产系统，一个钢铁联合企业是由采、选、冶炼、轧制、包装、运输等多个部门和环节组成的生产系统等。人们生活的这个世界也可以看作一个极为复杂的系统。

系统无处不有，有小系统，有大系统。一个设备，一个部件都可以看作是小系统，而它本身又可属于更大的系统。如果跳出这些系统的工程、经济、社会的具体运动形态，统一地从系统的整体和局部之间的相互关系来加以考察和研究，就可以看到系统的一些共性，根据这些共性，综合不同的辞典、手册和专著中系统的论述，系统的定义大致可叙述如下。

系统（System）是具有特定功能的、相互间具有有机联系的许多要素(Element）构成的一个整体。系统具有下述特征。

1.整体性

系统是由许多要素按照一定方式组合起来的，为达到系统基本功能所必须具有的组成要素的集合，系统具有集合性。构成系统的各要素虽然具有不同的性能，但它们是根据逻

辑统一性的要求而构成的整体。系统不是各个要素的简单的集合，否则它就不会具有作为整体的特定功能。因此，即使每个要素并不都很完善，但它们可以综合、统一，成为具有良好功能的系统。反之，即使每个要素是良好的，但作为整体却不具有某种良好的功能，也就不能称之为完善的系统。

2.相关性

系统内各要素之间具有互相联系、互相制约的特定关系。例如，对于电子计算机系统来说，各种运算装置、存储装置、控制装置、输入输出装置等各个硬件，以及操作系统、程序等各种软件，都是构成要素，它们之间通过特定的关系，有机地结合在一起，形成了一个具有特定性能的计算机系统。

3.目的性

通常系统都具有目的性，特别是人所创造或改造的系统，更有明确的目的，而要达到既定的目的，系统要具有一定的功能。比如企业经营管理系统的目的是在限定的资源和现有职能机构等条件下，完成和超额完成国家下达的计划与规定的质量、成本、利润指标等。

4.环境适应性

任何系统总是存在并活动于特定的环境之中，与环境不断地进行物质、能量、信息的交换，外界环境的变化必然会引起系统内部各要素的变化，系统必须适应外部环境的变化。如企业，它是一个复杂的人造的系统，输入物质、劳动力、能源、信息，经过设计、制造等处理过程，输出产品、服务等。在处理过程中，如果设计、制造出来的产品不完全符合社会的需要，也就是不适应环境，可以通过检查、试验，找出差异，修正计划，改善产品。因此，有人认为，系统的特征还包括有输入、输出和反馈的功能。

什么是大系统（Large Scale System）呢？目前还没有一个严格的既便于理解又能被普遍接受的定义。一般所说的大系统，也涉及到四个现代化的各个方面，包括工程技术、社会经济、生物、生态等各个领域的复杂系统。如大型钢铁厂、电厂、化工厂的多级计算机控制与管理系统，区域性大电网的调度管理系统，水源供应系统，农田水利灌溉网，输油、输气管线系统；铁道、航空、城市交通管理与控制系统，大范围远距离通信系统，卫星通讯网，军事指挥系统，经济计划与管理系统，大型公共服务系统，大型科研项目与工程建设的计划协调与组织管理系统，生态系统及生物控制与调节系统等等。

大系统与一般系统相比，有下述特点：

1.规模庞大

系统规模的大小是指所包含的元件、部件等要素的多少。大系统包含的元件、部件的数目十分庞大，数以千、万、亿计。而大系统中的元件、部件本身也是个小系统，又是由许多较小的元件、部件所组成。例如，区域性电力系统，包括几百个发电厂、变电所，每个电厂又由许多发电机组成，它们由纵横数千里的输电配电线路联系起来，向成千上万个分布在广阔地区的用户供电。当然，规模庞大并不一定意味着占用的空间大。如人的脑组织，是由100亿个神经细胞组成的特大系统，但所占空间并不大。

2.结构复杂

大系统中各小系统、各元件、部件之间的相互联系十分复杂。例如，石油、化工联合企业综合自动化系统，各车间、各分厂、各总厂之间，不仅通过生产设备工艺流程，在物质流、能量流方面有复杂的相互联系，而且通过多级计算机及数据通信网络，在信息方面有复杂的相互联系；不仅有机器设备之间的相互联系，还有人和机器，人和人之间的相互联系；不仅有技术上的相互联系，还有经济上的相互联系。

3.功能综合

大系统所具有的功能往往是多方面的、综合性的。现代冶金、石油、化工等生产过程综合自动化系统，常常具有工艺过程控制、企业经营管理、资源综合利用、环境污染控制等多方面的综合功能。例如，在采用多级结构方案的大系统中，各级分别具有过程控制、调度管理、计划决策等功能。功能的综合性取决于目标的综合性。大系统的目标常常不只一个，而是多个的，比如大系统最优化通常有多个目标，如产量最高，质量最好，原料、能量消耗最少，成本、运行费用最低，可靠性能最高，环境污染最小等等。

4.因素众多

由于大系统规模庞大、结构复杂、功能综合，所以大系统涉及的因素众多。在大系统的规划、设计、筹建、运行过程中，需要考虑的内部因素多，需要观测辨识的参数多，需要管理、控制的状态多；同时大系统所处环境的外部因素也多，外界对系统的影响、干扰多，系统对外界的影响、作用也多。因此，大系统通常都是多输入、多输出、多干扰的多变量系统。大系统的因素众多还表现在，大系统既有“物”的因素，又有“人”的因素；既有经济的因素，又有社会的因素，而且许多因素是变化多端的，因而用来描述大系统的数学模型也往往是高阶、多维的代数方程、微分方程或差分方程，或多节点、多支路的网络。大系统多数是动态的，常有不确定的因素，控制和管理之间往往也没有确定的界线。因此无论是用经典的还是现代的控制理论去解决这类问题，都会遇到困难。从事系统最优化理论的工作者近年来作了大量研究工作，主要可概括为三个方面：第一是模型简化。模型简化方法很多，主要有集结法、摄动法、优势极点法、pade逼近法、时矩匹配法等。第二是模型分解。模型分解的方法主要有分解——协调法。第三是采用分散控制处理复杂数学模型。另外，对大系统的定性分析法，如稳定性、鲁棒性等的研究也进展很快。

1-2 最优化概述

系统科学大体可分为两大组成部分，一、系统识别，也就是用科学实验和理论分析的方法去认识客观对象的运动规律，这就是认识世界；二、则是用系统最优化理论和方法探讨在运动规律的制约下，如何使系统状态处于“最优”，这就是改造世界。前者主要回答如何表现现象和过程行为，即如何建立对象的模型；后者主要回答如何在一定的环境、技术条件和其它因素约束下，采取种种措施，使要表现的现象和过程行为的状态处于最优，如耗能最少、成本最低、可靠性最大、性能最好、重量最轻、风险最小、时间最短等等。

实际上人们做任何事，不管是分析问题，还是进行综合、作出决策，都要用一种标准衡量其结果是否达到了最优。在科学实验、生产技术改进、工程设计、生产计划管理和社

会经济问题中，人们总是希望采取种种措施，以便在有限的资源条件下或规定的约束条件下，得到最优的效果。这种寻求最优效果的愿望几乎渗透到生产过程的各个方面和各个领域，经过不断实践和提炼，产生并发展了最优化的理论和方法。

在进行一项工作（例如产品设计、经济管理、电网调度等）时，应用最优化技术可以较快地选择出最优方案，或作出最优决策。因此最优化技术在社会经济领域和工程学领域得到了广泛地应用，最优化理论和方法发展也十分迅速。

在20世纪50年代以前，解决最优化问题的数学方法只限于古典求导方法和变分法（求无约束极值），或是拉格朗日（Lagrange）乘子法解决等式约束下的条件极值问题。这类求可导函数或泛函极值的必要充分条件的方法属于经典最优化方法。

由于科学技术和生产的迅速发展，实践中许多最优化问题已经无法用古典方法来解决。又由于电子计算机的发展和完善，使许多最优化方法得以实现。50年代末以来出现了许多用计算机解最优化问题的理论和方法，其中有代表性的是库恩（H.W.Kuhn）和塔克（A.W.Tucker）两人推导的关于不等式约束条件下的非线性最优必要条件（称为库恩——塔克定理），贝尔曼（Bellmon）的动态规划理论，庞持里亚金（Pontriagin）的极大值原理，以及大系统的“分解——协调”理论，这些构成了现代最优化理论的基础，也是本书要介绍的内容。

1-3 说明系统最优化的简例

本节通过一个简单的例子具体说明用最优化方法解决实际问题的步骤，并借以对系统最优化概念形成一个较具体的印象。

例 1-1 有两个电厂，功率输出分别为x_1、x_2，最大功率输出分别为p_1、p_2。设两个电厂输出的总功率不小于L，总费用函数可抽象为$f(\boldsymbol{x})=x_1+2x_2$，即电厂 2 的生产成本为电厂 1 的两倍，求两电厂负荷（或输出功率）的最优分配方案，即使生产总费用最小的负荷分配方案。

解 最优负荷分配问题的数学模型可表示为

$$\min \quad f(\boldsymbol{x})=x_1+2x_2 \tag{1-1}$$

$$\text{s.t.} \quad \left.\begin{aligned} x_1+x_2 &\geqslant L \\ x_1 &\leqslant p_1 \\ x_2 &\leqslant p_2 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

上述数学模型实际上是求函数$f(x)$在式（1-2）的约束条件下的极小值的问题。

解上述最优化问题有许多方法，下面先用图解法解，以加强直观性。

见图1-1，在以x_1、x_2为坐标轴的直角坐标系中，$x_1\geqslant 0$和$x_2\geqslant 0$两个约束条件同时存在是指函数定义域为包括x_1轴与x_2轴在内的第一象限，如果加上约束条件$x_1\leqslant p_1$和$x_2\leqslant p_2$，则是指包括四个边在内的四边形op_1Ap_2的面积。若再加上约束条件$x_1+x_2\geqslant L$，则函数$f(\boldsymbol{x})$的定义域只限于三角形ABC所围成的面积了，即三角形ABC内（包括三个边

在内）各点都是两个电厂允许的运行范围，因此每一个点都是式（1-1）和式（1-2）的一个解。这种解一般称可行解。

由于函数$f(\boldsymbol{x})=x_1+2x_2=$常数的等值线随着所取的常数逐渐减小而沿箭头方向向左下方平行移动，显见，$\min\ f(\boldsymbol{x})$（即函数的极小值）出现在$x_1=p_1$，$x_2=L-p_1$这一点上，即三角形ABC的顶点C上。C点表示：电厂1的输出功率达到本厂的最大功率，其余功率$L-p_1$由电厂2承担。这样分配两个电厂的输出功率，就能使总费用最小。从上述简单例子看出，用最优化方法解决这类实际问题一般分三个步骤进行：

（1）建立最优化问题的系统数字模型（或其它型式的模型如网络模型等），列出目标函数，确定所研究系统的变量和约束条件（约束式）。

（2）分析模型，选择合适的求解方法。

（3）模型求解。

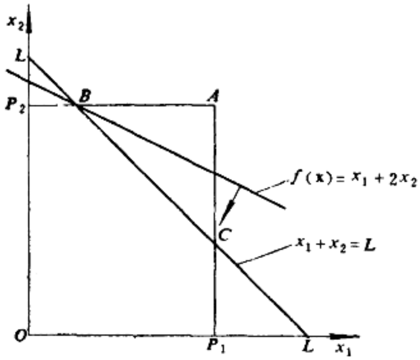

图 1-1 图解法求最优负荷分配问题

只有极简单的最优化问题，才可以用图解法或简单的函数求极值方法来解。一般的最优化问题都要用最优化方法如静态最优化方法或动态最优化方法，并借助于电子计算机来求解。

从上述例子也可看出，最优化方法是数学上一种求极值的方法。

1-4 最优化的常用术语

从上节的例子看出，最优化方法的第一步是建立系统的数学模型，其中常用术语包括系统变量(x_1,x_2)，目标函数$[f(\boldsymbol{x})]$，约束条件[式（1-2）]，下面分别说明之。

一、系统变量

所谓“最优化”，是指系统的最优化，根据系统的定义，一个部件，一个设备都可看作系统。系统变量就是指最优化问题中或系统中待求的某些量，亦可简称为变量。如上节例子中，x_1，x_2分别是电厂1和电厂2的输出功率，是待求的可以变化的量。又如电路的最优化设计中要确定的变量主要是电路元件（$R.L.C$）的参数。结构优化设计中要确定的变量可以是截面的高或宽、截面面积、截面惯性矩等截面参数。

系统变量个数愈多，最优化问题愈复杂，所需的计算时间也愈长；另一方面，系统变量愈多，最优化的自由度愈大，可望取得的效益愈好。所以要精心地选择那些对优化效果有影响的参数作为系统变量，而且要合理地选择系统变量的数目。

二、目标函数（或目标泛函）

“最优化”有一定的标准或评价方法。目标函数是这种标准的数学形式[例1-1中$f(\boldsymbol{x})$]。目标函数$f(\boldsymbol{x})$可以是效果函数，也可以是费用函数。目标函数是效果函数时，$f(\boldsymbol{x})$取极

大值，费用函数不得超过某个上界则是这种最优化问题的约束；反之，目标函数是费用函数时，$f(\boldsymbol{x})$取极小值，而效果函数不得小于某个下界就成为这个求极小值问题的约束了。上述费用和效果的概念都是广义的，如：费用可以是经费，也可以是时间、人力、能量、燃料、材料或其它资源。效果可以是性能指标、利润、效益、精度、灵敏度等。

在上节例子中，目标函数是费用函数，即$f(\boldsymbol{x})$取极小值，约束条件中有$x_1+x_2\geqslant L$，即效果函数不得小于下限L，因此，用上节例子可以证实：以费用函数表示的目标函数$f(x)$取极小值，受到效果函数（总输出功率）不得小于L值的限制。

求极大值和求极小值实际上是没有什么原则性区别的，因为求$f(\boldsymbol{x})$的极小值相当于求$-f(\boldsymbol{x})$的极大值。所以以后要介绍的庞特里亚金的极大值原理，也有人称极小值原理。

三、约束条件

对系统变量的变化范围加以限制，或者规定它们之间的相互关系称为约束[例1-1中式（1-2）]，如要变量为非负这是一种约束；可用的资源如人力、设备、原料、经费、时间等常常是有限的；问题求解应满足一定技术要求，如控制系统设计必须达到的某些指标这也是一种约束，此外还应满足系统的基本方程，如控制系统的状态方程等均是约束。

约束条件有显约束和隐约束。对某个或某组变量的直接限制的约束条件称为显约束，如电网最优调度中各电厂的最大输出功率，结构优化设计中钢筋混凝土的最小或最大配筋率，纵向钢筋的最小直径等，这类约束比较简单，一般都是显约束条件。对某些与变量关系无法说明的量加以限制的约束条件称为隐约束。如结构优化设计中的强度、稳度、频率等的限制，它们一般与变量没有直接关系，必须通过复杂的结构计算才能求得，因而常称隐式约束条件。

约束条件还可以分等式约束和不等式约束两种。要注意的是，从理论上讲，一个等式约束可以在优化过程中消去一个变量，但实际上这样做无论是静态最优化或是动态最优化问题，计算上往往很困难，因而一般都不采用这种办法。

综上所述，最优化问题的数学模型可以表示成如下形式

$$\min \quad f(\mathbf{x}) \quad x\in E^n \tag{1-3}$$

$$\text{s.t.} \quad \left.\begin{aligned} &g_i(\mathbf{x})\leqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m-r)\\ &n_j(\mathbf{x})\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,r)\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

式（1-3）为目标函数，式（1-4）为约束条件。

第二章　线　性　规　划

线性规划是应用最广泛的一种数学规划方法，也是应用最早的一种最优化方法。最早研究这方面问题的是苏联数学家康脱洛维奇，他在1939年就建议用线性数学模型来探讨提高组织和生产的效率问题。美国人丹茨格（G.B.Dantzig）在1947年提出了单纯形（Simplex）算法和许多有关的理论，为线性规划奠定了理论基础。50年代，线性规划已成为经济学家分析经济问题的重要工具，在这方面苏联的康脱洛维奇和美国的库甫曼（T.C.Koopmans）的贡献尤为突出，他们在1975年联合得到过诺贝尔经济学奖金。线性规划的广泛应用与计算机的发展紧密相关，特别是用电子计算机来处理成千上万个约束和变量的大规模线性规划之后，线性规划已广泛用于工业、农业、商业、交通运输和管理等各个领域。

线性规划可以看作是非线性的一种特殊形式，在非线性规划算法中有相当一部分是从线性规划引伸发展而来，有时可以把非线性规划问题转化为一系列线性规划（Linear-programming）求解。

本章主要介绍线性规划最常用的单纯形法及有关的运算方法。

2-1　线性规划的一般形式

线性规划问题的一般形式是求目标函数

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

的极大值（或极小值），并满足约束条件

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1\\&a_{21}x_2+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2\\&\cdots\cdots\\&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m\\&x_i\geqslant 0\ \ (i=1,2,\cdots,\ n)\end{aligned}$$

或写成

$$\max\quad z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i \tag{2-1}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\ (i=1,2,\cdots,\ m) \tag{2-2}$$

$$x_j\geqslant 0\ \ (j=1,2,\cdots,\ n) \tag{2-3}$$

下面举两个简单的线性规划的例子，并用图解法求解，借以直观地总结出线性规划问题的一般规律。

例 2-1 某一生产单位，生产甲、乙两种产品，如日产量分别为x_1和x_2，甲产品每件耗用原材料 2 个单位，乙产品每件耗用 3 个单位，而日供应原料为100个单位。甲产品每件加工工时为 4 小时，乙产品的加工工时为 2 小时，每日可用工时为120 小时。甲产品价值 6 元，乙产品价值 4 元。试问甲、乙产品日产量各为多少，才能使日产值为最大？

将上述问题用数学模型表示，即是选x_1与x_2使目标函数

$$z=6x_1+4x_2$$

取极大值且约束条件为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{原料约束} & 2x_1+3x_2\leqslant 100\\ \text{工时约束} & 4x_1+2x_2\leqslant 120\\ \text{非负约束} & x_1,x_2\geqslant 0\end{array}\right\}\qquad(2\text{-}4)$$

对于这个简单问题，可采用图解法。在图2-1的平面坐标系中，非负约束$x_1,x_2\geqslant 0$表明约束条件$2x_1+3x_2\leqslant 100$是以直线$2x_1+3x_2=100$（直线过DF）为界的左下方的半平面；约束条件$4x_1+2x_2\leqslant 120$是以直线$4x_1+2x_2=120$（直线过EB）为界的左下方的半平面。同时满足这四个约束条件（包括$x_1,x_2\geqslant 0$）的点的集合，即四个半平面相交构成的区域$ABCD$是例2-1这个线性规划问题的解的集合，一般称之为可行域。下面在该区域中找出对应目标函数z的最大值。

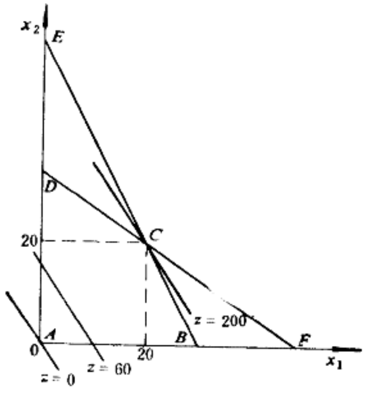

图 2-1 例2-1的图形

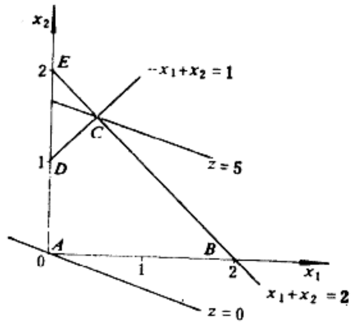

图 2-2 用图解法解例2-2的图形

仿第一章例题的分析，由于目标函数$z=6x_1+4x_2=$常数的等值线随着所取的常数逐渐增大，其对应的等值线族是向右上方平行移动的，如图2-1所示。显然离开原点越远的直线，z值越大，即日产值越大。因此本例中的线性规划问题就是在图 2-1的$ABCD$区域中找一个点，使得通过这个点的直线z离原点最远，这个点就是最优解。图2-1中的c点即是最优解，c点是直线DF和EB的交点，即是直线$2x_1+3x_2=100$与直线$4x_1+2x_2=120$的交点，可知$x_1=20$，$x_2=20$，为本题的最优解，也就是说甲产品日产20件，乙产品日产20件时日产值最高，其值为200元。

从上面例可以看出，合乎约束条件的x_1、x_2值都在多边形$ABCD$和它的边界上，而最

优解对应于多边形的一个顶点。

为了进一步研究线性规划解的各种可能性，下面再举一例。

例 2-2 用图解法解下述线性规划问题。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=x_1+3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1+x_2\leqslant 1 \\
& x_1+x_2\leqslant 2 \\
& x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

图2-2四边形$ABCD$所围的面积是可行域，其中A、B、C、D各点叫做约束集的顶点，对于线性约束，这种点的数目是有限的。

这里目标函数的等值线$x_1+3x_2=z=$常数的直线随所取常数值逐渐增大，其对应的等值线将沿右上方平行移动，当平移到c点时，z的取值最大，这就得到了本例的最优解（$z=5$）。

由上可知，最优解在可行域的顶点。如果问题是求z的极小值，那么这个问题的解应当是可行域的另一个点A，这也是一个顶点（对应$z=0$）。

如果问题是要使$z=2x_1+2x_2$为最小，那么最优解应当是顶点B和C及其这两个顶点连线上所有的点。

如果我们取消约束$x_1+x_2\leqslant 2$，则允许域即成为无限大，并且解也变为$z\to\infty$。

如果约束$x_1+x_2\leqslant 2$被$x_1+x_2\leqslant -1$取代，则可行域是空的，即无解。

通过图解法看到，线性规划问题的解有下列几种情况：

若可行域是空集，这时无可行解；

若可行域无界，则可能出现无界解；

若存在一个最优解，则一定在可行域的某个顶点上得到；

若两个顶点上同时得到最优解，则这两个顶点连线上任一点都是最优解。

图解法不能解决多变量的线性规划问题，故本章介绍一种代数方法——单纯形法。

2-2 线性规划的标准形式

线性规划问题的标准形式是

$$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j \tag{2-5}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{2-6}$$

$$x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2-7}$$

写成矩阵形式是

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z=\mathbf{C}^T\mathbf{x} \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \\
& \mathbf{x}\geqslant 0
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$是系数矩阵；$\mathbf{C}=[c_1,c_2,\cdots,c_n]^T$；$\mathbf{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^T$；$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$。

本章讨论的是在可行域中有解，而且不止一个解的情况，因为无解与只有一个解表明线性规划不存在最优化问题，所以下面只讨论在可行域中有解，且有不止一个解的情况，即

$$\text{ranK}\mathbf{A}=m$$

$$n>m$$

的情况。$n-m$称为线性规划的自由度。

线性规划的标准形式有四个特点：

（1）目标函数属于极小化类型（也可为极大化类型）；

（2）所有约束条件由等式表示；

（3）所有变量限于非负，这个约束条件又称非负约束；

（4）每个约束条件右端的常数为非负值。

目标函数中变量x_j的系数$c_j(j=1,2,\cdots,n)$称目标函数系数，也可按问题的经济含义称收益系数或价值系数、费用系数及利润系数；约束条件中的右端常数 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$称需要系数或限定系数。约束条件中变量的系数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$称为约束条件的组成系数，亦称消耗系数或工艺系数。

将线性规划的一般形式化为标准形式时，可能出现的几种情况及处理方法如下。

（1）目标函数为极大化类型。将目标函数乘以（-1），即可化为等价的极小化类型问题。

（2）约束条件为不等式时，分两种情况处理：

1）约束条件为小于（或等于）形式。在不等式的左端加上一个非负的新的变量即可化为等式，新增的非负变量称为松驰变量（Slack Variable）。

2）约束条件为大于（或等于）形式时，在不等式左端减去一个非负的新变量即可化为等式。新增的非负变量称为剩余变量（Surplus Variable）。

（3）变量有负约束时，如$x_j\leqslant 0$，则用非负变量x_j'代替之，使$x_j=-x_j'$。

（4）变量符号不受限制。标准形式中要求变量为非负，碰到变量无非负约束时，可以用两个非负的新变量之差来代替该变量，如将符号不受限制的变量x_j写成$x_j=x_j'-x_j''$，新变量x_j'和x_j''为非负，而x_j的符号由x_j'和x_j''的大小决定。

（5）变量有上下限值。对于这种情况可将上下限值分别处理。引进新的变量使其等于原变量减去下限值。如此则下限为零，满足了标准形式的非负要求。例如，有变量要求满足$a\leqslant x_j\leqslant b$，则以$x_j'=x_j-a$代替$x_j$，于是$0\leqslant x_j'\leqslant b-a$满足了标准形式的非负要求。并用新变量替换目标函数和约束条件中所有的x_j，再将上限约束列为新的约束条件并化为等式。

下面举例说明如何将一般非标准形式的线性规划问题化为标准形式的线性规划问题。

例 2-3 将下列线性规划问题化为标准形式。

$$\min\quad z=2x_1-x_2+x_3$$

$$\text{s.t.}\quad x_1+3x_2-x_3\leqslant 20$$

$$2x_1-x_2+x_3\geqslant 21$$
$$x_1-4x_2-4x_3\geqslant 2$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\text{符号不限}$$

解 （1）因为x_3符号不限，以$x_3'-x_3''=x_3$代人目标函数和所有约束方程中，x_3'、x_3''均为非负变量。

（2）对第一个约束，加上松弛变量x_4将其化为等式。

（3）对后两个约束，分别减去剩余变量x_5和x_6将其化为等式。

（4）为了保持目标函数不变，使x_4、x_5和x_6的目标函数系数为零。

得本线性规划问题标准形式为

$$\begin{aligned}
\min\quad & z=2x_1-x_2+x_3'-x_3''+0\cdot x_4+0\cdot x_5+0\cdot x_6\\
\text{s.t.}\quad & x_1+3x_2-x_3'+x_3''+x_4=20\\
& 2x_1-x_2+x_3'-x_3''-x_5=12\\
& x_1-4x_2-4x_3'+4x_3''-x_6=2\\
& x_1、x_2、x_3'、x_3''、x_4、x_5、x_6\geqslant 0
\end{aligned}$$

例 2-4 将下列线性规划问题化为标准形式。

$$\begin{aligned}
\max\quad & z=x_1+2x_2+4x_3\\
\text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2+3x_3=20\\
& 3x_1+x_2+4x_3=25\\
& x_1,\ x_2\geqslant 0,\ 2\leqslant x_3\leqslant 6
\end{aligned}$$

解 （1）将目标函数乘上（-1），化为极小化类型；

（2）再将$x_3'=x_3-2$代入目标函数和约束条件中，则问题化为

$$\begin{aligned}
\min\quad & z'=-x_1-2x_2-4x_3'-8\\
\text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2+3x_3'=14\\
& 3x_1+x_2+4x_3'=17\\
& x_3'\leqslant 4\\
& x_1,\ x_2,\ x_3'\geqslant 0
\end{aligned}$$

（3）将变量x_3'的上限约束化为等式，得标准形式为

$$\begin{aligned}
\min\quad & z'=-x_1-2x_2-4x_3'+0\cdot x_4-8\\
\text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2+3x_3'=14\\
& 3x_1+x_2+4x_3'=17\\
& x_3'+x_4=4\\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0
\end{aligned}$$

解题时可略去目标函数中的常数项-8，在计算z值时再考虑。

2-3 单纯形法原理

一、几个常用术语和定理

下面先介绍几个常用术语。