研究生系列教材

近代解析应用数学基础

王长清　编

西安电子科技大学出版社
2001

图书在版编目(CIP)数据

近代解析应用数学基础/王长清编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2001.10
研究生系列教材
ISBN 7-5606-1027-7

Ⅰ.近… Ⅱ.王… Ⅲ.解析函数-研究生-教材 Ⅳ.O174.55

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第030528号

策　　划　梁家新　马乐惠
责任编辑　杨宗周
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)8227828　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail:xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　西安兰翔印刷厂
版　　次　2001年10月第1版　2001年10月第1次印刷
开　　本　850毫米×1168毫米　1/32　印张14.3125
字　　数　347千字
印　　数　1～2000册
定　　价　18.00元
ISBN 7-5606-1027-7/O·0051

前　　言

本书是在作者为北京大学电子学系研究生开设的“近代解析应用数学基础”课程讲稿的基础上，经作者再度加工、充实而成的. 为研究生开设这门课程主要基于以下原因：

我国大部分高校中的理工类本科生，在校学习的高等数学，大体上只是掌握了19世纪末以前所发展的数学的基本知识，其内容基本属于经典数学的范围，而对现代数学几乎没有涉及. 这种情况远远不能适应现代科学技术发展的需要. 因为，当这些本科毕业生阅读本行业的某些现代文献时，往往受阻于不能理解文献中所运用的现代数学工具，极大地妨碍了他们迅速掌握本专业不断发展的现代理论和技术.

高科技的发展已把社会推进到数学工程技术的新时代. 有人说：“高科技本质上是一种数学技术”，现代数学的概念已大量出现在科学技术文献中，它的许多名词术语(如空间、拓扑、流形、算子、泛函等)已经成为现代的科学语言，如果不掌握现代数学的基本概念和知识，就难以从事现代水平的科学研究.

为了尽快改变数学教育的落后状况，在对本科高等数学教学内容进行改革之前，应首先加强研究生的现代数学知识教育，正是基于这一考虑，决定开设一门相关的课程. 在设计这一课程时所遇到的主要问题是，电子学系学生的学习任务本来就已非常繁重，不可能有足够的时间用于加强现代数学知识的学习. 可行的办法是，根据所涉及的数学需要，照顾到科学性、系统性和统一性，开设一门有适度的广度和深度，能基本满足需要的研究生

课程．

现代数学中泛函分析处于核心地位，它的许多概念和方法是在总结各数学分支相似点的基础上提炼抽象出来的，许多分散在各数学分支中的事实得到了统一的处理．本课程将以泛函分析的理论为主线，把与电子学有紧密关系的几个应用方面联系起来，形成一个有机的整体．在本课程中，除了泛函分析的基本知识外，还重点讨论了泛函的极值问题和算子方程(包括微分方程、积分方程和变分方程等)的基本理论，尤其是较详细地讨论了这些问题的数值解法．这是因为，在计算机技术高度发展的今天，把各种复杂问题最终归于用计算机求得数值近似解已成为主要潮流．

人们早就发现古典函数的概念已经不够用了，一些数学问题没有广义函数的概念就很难进行深入的讨论．一些物理理论也需要直接建立在广义函数的基础之上，这使得广义函数的基本知识已成为科技工作者所必须了解的数学基础．因此，本书用专门一章介绍了广义函数的基础知识．

小波变换和小波分析作为一种最新发展的数学理论和方法，已在科学技术界引起广泛关注．在数学领域，它是泛函分析、调和分析和数值分析长期发展的完美结晶，是正在迅速发展中的新的数学分支．在科技应用领域，它被认为是分析方法的重大突破，已在很多重要方面得到了成功的应用．在今天，作为一名科技工作者，如果不了解小波分析的基本知识，将会在一定程度上限制其能力的发挥．本书用了较大篇幅介绍小波变换和小波分析的基本理论和方法．

本课程由于是应用性的，涉及的范围又比较广泛，故把重点放在基本概念、理论和方法的理解上，尽量避免复杂冗长的证明，即使在应用方面也只讲到基本原理为止，不进行详细的讨论．

本书的前三章主要介绍泛函分析的基本概念和基本知识，并作为全书的基础．这方面的内容主要包括集合与映射，常用的抽象空间的概念和性质，线性算子和线性泛函的基础知识．第四章讨论泛函的极值问题，包括优化方法和变分法的基本理论和方法．第五章讨论算子方程(微分方程、积分方程和变分方程)的性质和数值近似解法，包括变分原理、有限元法和加权余量法等．第六章讨论广义函数的基本概念、基本运算和 Fourier 变换等，还包括 Sobolev 空间的简要介绍．第七章专门讨论小波变换和小波分析，包括窗口 Fourier 变换，连续小波变换，离散小波变换，多分辨分析和正交小波基的构造，小波算法等．

在每章后面给出了习题和参考书目，所列书目一方面供读者学习参考，另一方面也想说明本书在编写过程中所主要参考的资料．这些资料对本书的编写有很大助益，在此对这些书的各位作者表示感谢！

作为一名非数学工作者编写这样的教材，深感力不从心，定有不少不妥甚至谬误之处，深望读者予以指正．

编　者

2001 年 6 月于北京大学承泽园

目　录

第一章 度 量 空 间

1.1 集 合 与 映 射

1.1.1 集合的概念

一般认为，现代数学以康托尔(Cantor)建立集合论(1874 年)为起点．现代数学的研究对象是一般集合、各种抽象空间和流形，它们都能用集合与映射的概念统一起来．因此，集合是现代分析数学中的一个基本概念，甚至可以说，集合论是现代数学的理论基础．

任何一个理论系统都包含一些不加定义而直接引入的基本概念，集合就是集合论中的这样一个基本概念．对任何一个基本概念下定义，必须借助于比它更为基本的概念．因此，总有一些概念只能通过举例、打比方或说明对它进行描述，一切想对集合作出所谓严谨的、合乎数学要求的定义的尝试都是徒劳的，反而引出一系列悖论．

康托尔对集合概念曾做过如下的描述："**把一些明确的(确定的)、彼此有区别的、具体的或想像中抽象的东西看作一个整体，便叫做集合．**"；另一种较明确的描述是："**当我们把一些确切的对象汇集在一起而当作一个单一的总体来考虑时，这一总体就被称之为集合**"；还有一种更扼要的提法为："**集合是具有一定范围的、确定的对象的全体**".

由以上描述可知，集合是指由一些对象构成的集体，这些对

象既有明确的范围，又能明确地与其它对象相区分，而并不限制对象的类型．

1.1.2 集合的表示和举例

为了方便，需要用简明的方式把集合表示出来，让人一目了然地理解所表示的是个什么样的集合，其功能是把集合所包含的对象或元素明确无误地表达出来，既确定了范围，又不遗漏任何元素．通常，集合用单个大写字母 A、B、C 等代表，有时也用花括号表示，而集合所包含的元素，则常用小写字母表示，如 a、b、c 等．集合的表示方法最常用的有两种：

（1）枚举法．把集合中的元素逐个列出，这仅适用于元素不多或元素之间有明确关系的集合．例如集合 A 包含三个元素 a、b、c，即可表示为 $A=\{a, b, c\}$.

（2）描述法．把集合中所有元素共有的性质或应该满足的条件用数学形式表达出来．例如集合 B 是函数 f 所有零点的集合，则可表示为 $B=\{x|f(x)=0\}$.

下面的一些集合是经常遇到的：

（1）自然数的全体所构成的集合 $\mathbf{N}$ 为

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

类似的集合还有：全体整数之集合 $\mathbf{Z}$，全体有理数之集合 $\mathbf{Q}$，全体无理数之集合 $\mathbf{\Omega}$，全体实数之集合 $\mathbf{R}$ 和全体复数之集合 $\mathbf{C}$.

（2）区间$[a, b]$上有定义且连续的全体函数之集合，即

$$\mathbf{C}[a, b] = \{f(x) \mid f(x) \text{ 在}[a, b] \text{ 上连续}\}$$

（3）正弦信号全体所成之集合，即

$$S_{\mathrm{C}} = \{x \mid x(t) = \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{j}(2\pi f t+\theta)}];\ -\infty < t < \infty;\ \alpha, \theta, f \in R\}$$

（4）能量有限信号全体所成之集合，即

$$S_{\mathrm{E}}(K) = \left\{x \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\mathrm{d}t \leqslant K,\ K \text{ 为有限数}\right\}$$

(5) 全体周期信号所成之集合，即

$$S_{\mathrm{R}}(T)=\{x \mid x(t+T)=x(t),\ -\infty<t<\infty\}$$

假设 A 和 B 为两个集合，如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B，就称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作 A 含于 B 或 B 包含 A. 如果 A 是 B 的子集且 B 中至少有一个元素不属于 A，则 A 叫做 B 的真子集，记作 $A \subseteq B$，B 也叫做 A 的扩集．一个元素也没有的集合称做空集，用 $\varnothing$ 来表示或用 $\{\}$ 表示，但需注意，空集不是只有零元素的集合，因为零也是一个元素．如果集合所包含元素的个数是有限的，就叫做有限集；如果所包含的元素是无限的，就称之为无限集．

1.1.3 集合的简单运算

设 A 和 B 为两个集合，由集合 A 与集合 B 的一切元素所组成之集合称之为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

由集合 A 与集合 B 所共有的元素所组成之集合称之为 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由属于集合 A，但不属于集合 B 的元素所组成之集合称之为 A 与 B 的差，记作 $A-B$ 或 $A \backslash B$，即

$$A \backslash B=\{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

很容易证明，集合具有下面的运算性质：

(1) 交换律　$A \cup B=B \cup A$，$A \cap B=B \cap A$；

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)$，

$(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)$；

(3) 分配律　$A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)$，

$A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C)$；

(4) $A \cup A=A$，$A \cap A=A$；

(5) $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$;

(6) $A\cup B\supset A$, $A\cup B\supset B$.

如果 E 为基本集，$A\subset E$，则 $E-A$ 叫做 A 的余集(或补集)，记作 A^C. 例如，$\mathbf{Q}\cup\Omega=\mathbf{R}$，$\mathbf{Q}\cap\Omega=\varnothing$，$\mathbf{R}$ 为基本集，则有

$$\mathbf{Q}^C=\Omega,\quad \Omega^C=\mathbf{Q}$$

如果 A、$B\subset\mathbf{C}$，则存在以下对偶律：

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$$

设 A、B 为任意两个集合，对于 $x\in A$，$y\in B$，以 (x, y) 表示有序元素时，则所有有序元素对组成之集合称之为 A 与 B 的笛卡尔积，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x, y)\mid x\in A, y\in B\}$$

当 A、B 中有一个为空集时，规定 $A\times B=\varnothing$.

上述笛卡尔积的定义可推广为一般的情况，设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个集合，$x_i\in A_i$，$i=1, 2, \cdots, n$，则它们的笛卡尔积定义为

$$\begin{aligned}&A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\\&=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

由此可知，两个实直线 $\mathbf{R}$ 的笛卡尔积就是实平面 $\mathbf{R}^2$，表示为 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$. 类似地，$n$ 个实直线 $\mathbf{R}$ 的笛卡尔积成为 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$.

1.1.4 映射

定义 1.1.1(映射) 设 A、B 为两个非空集合，如果对于集合 A 的任一元素，按照某种确定的法则 φ，集合 B 中都有确定的元素与之对应，则称 φ 为一个从集合 A 到集合 B 的映射，并记作

$$\varphi: A\to B$$

当映射使 x 与 y 对应，$x\in A$，$y\in B$ 时，记作