中等专业学校试用教材

招收高中毕业生的工科专业通用

高等数学

（选学部分——空间解析几何与多元微积分）

张齐金　罗崇蓮　朱铉道　编

高等教育出版社

内容提要

本书是按照1982年教育部审定的中等专业学校《数学教学大纲(试行草案)》(招收高中毕业生的工科专业通用)中有关空间解析几何与多元微积分的要求编写的。这些内容属于选学部分。本书可以作为招收高中毕业生的中等专业学校工科有关各专业选用的教材。

编者的话

本书根据1982年教育部审定的中等专业学校《数学教学大纲(试行草案)》(招收高中毕业生的工科专业通用)编写．本书内容属于选学部分，供有关专业选用．

本书共分三章：向量代数与空间解析几何；多元函数微分学；二重积分．内容以讲清概念与计算方法为主，并通过例题介绍有关方面的应用．

本书由北京工业学院孙树本同志主审，参加审稿的还有杨裕生、王维锦、陈德彰、索润普．审稿的同志对本书提出了很多宝贵的意见，在此，表示衷心的感谢．

本书由张齐金、罗崇莲、朱铉道编写．限于编者水平，加以编写时间仓促，错误和不当之处在所难免．欢迎读者批评指正．

编　　者

1983.1

目　录

第一章 向量代数与空间解析几何

与平面解析几何相仿，空间解析几何也是用坐标法，把空间的点与三个有次序的实数、空间的图形与方程对应起来，从而用代数方法研究空间的几何问题. 正如平面解析几何的知识是学习一元函数微积分的重要基础一样，空间解析几何的知识对于学习多元函数微积分也是必不可少的.

本章首先介绍在工程技术上有着广泛应用的向量代数的基础知识，然后以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍一些最常见的空间曲面和曲线.

§1-1 向量及其加减法 向量与数量的乘法

一、向量的概念

在自然科学中经常遇到的量有两类：一类是只有大小没有方向的量，这类量叫做**数量**（或**标量**）. 如长度、面积、体积、质量、密度、功、能等等都是数量；另一类是不仅有大小而且有方向的量，这类量叫做**向量**（或**矢量**）. 如力、力矩、位移、速度、加速度等等都是向量.

数量用一个数就可以表示，而向量则不然. 向量的表示有几何表示及坐标表示两种，本节先介绍向量的几何表示.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

所谓向量的几何表示，就是用有向线段（一条带箭头的线段）表示向量．线段的长度表示向量的大小，箭头的指向表示向量的方向．图 1-1 是表示以 A 为起点，以 B 为终点的向量，记作 $\overrightarrow{AB}$．此外，有时也用黑体字母或用字母上面加箭头来表示向量，例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{i}$、$\vec{F}$ 等等．

图 1-1

向量的大小叫做向量的**模**．向量 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{i}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{i}|$．模等于 1 的向量叫做**单位向量**．模等于零的向量叫做**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{o}$．零向量没有确定的方向，也就是说它的方向是任意的．

如果两个向量的方向相同并且模相等，我们就称这两个**向量相等**．根据这个规定，一个向量和它经过平行移动以后所得的向量都是相等的．这种保持大小和方向而可以自由平移的向量叫做**自由向量**①．今后，我们只讨论自由向量（简称向量）．

二、向量的加减法

在物理学中，通过研究力的合成、速度的合成等，总结出了一般向量加法的平行四边形法则：

如图 1-2 所示，令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$，那末对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 就称为 $\boldsymbol{a}$ 与

---

① 除了自由向量，还有点向量和滑动向量．起点和方向相同并且模相等时才算相等的向量，叫做点向量（或胶着向量）．在同一条直线上方向相同并且模相等时才算相等的向量，叫做滑动向量．

$\boldsymbol{b}$ 的和，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

由图 1-2 容易看出，如果平移向量 $\boldsymbol{b}$，使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，那末由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这种求两个向量和的法则叫做**三角形法则**.

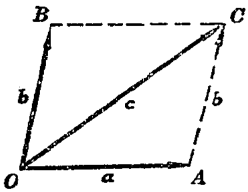

图 1-2

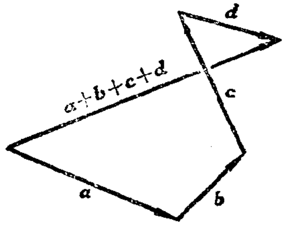

图 1-3

三角形法则还可以推广到求任意有限个向量的和. 例如，求已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ 的和时，只要依次把后一向量的起点放在前一向量的终点上，然后从 $\boldsymbol{a}$ 的起点向 $\boldsymbol{d}$ 的终点所引的向量就是和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$(图 1-3). 这个法则叫做向量加法的**多边形法则**.

在实际问题中，还经常遇到大小相等而方向相反的向量，如作用力和反作用力等. 称与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**(或**反向量**)，记作 $-\boldsymbol{a}$. 例如在图 1-2 中，$\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{a}$.

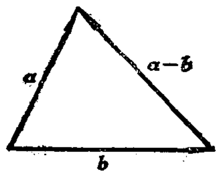

图 1-4

有了负向量的概念，就可以定义两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

按三角形法则，差向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的求法如下：把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点

重合，则由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量，就是差向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 1-4 所示.

容易验证，向量的加法有下列运算规律：

(i) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；（交换律）

(ii) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；（结合律）

(iii) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(iv) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

可见，向量的加法运算规律与实数的加法运算规律相同.

三、向量与数量的乘法

在应用中常遇到向量与数量的乘法，例如将速度 $\boldsymbol{v}$ 增大二倍，就是速度的方向不变，只是大小增大二倍，我们可以记为 $2\boldsymbol{v}$. 由此，引出向量与数量相乘（简称数乘）的定义如下.

定义 数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它是这样一个向量：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向；而它的模是 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

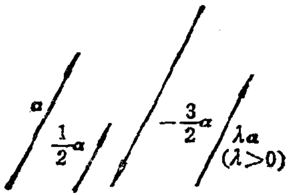

图 1-5

图 1-5 是向量数乘的几何表示.

根据数乘的定义容易得到：

(1) 如果 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，$\lambda$ 为数量，那末向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行；反之，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，那末 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ 为某一数量. 这就是说，两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行[①]的充要条件为 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

① 两向量平行，也称为两向量共线.

(2) 如果与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{a}^0$, 则

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$$

从而
$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果, 是一个与原向量同向的单位向量.

(3) 数乘有下列运算规律:

(i) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$; (结合律)

(ii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,
$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. (分配律)

例 1 用向量方法证明三角形两腰中点的连线平行于第三边,且等于第三边的一半.

证明 如图 1-6 所示, 设 P、Q 分别为 $\triangle ABC$ 的两腰 AB 及 BC 的中点,则

$$\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

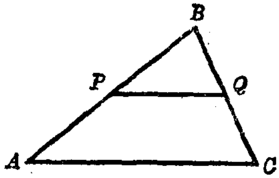

图 1-6

由两向量平行的充要条件可知, $\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 平行. 从而 $PQ /\!/ AC$.

又因为 $|\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$, 故线段 PQ 等于线段 AC 的一半.

例 2 设 M 是三角形 ABC 的重心, 证明对任意一点 O,

有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

证明 如图1-7所示.

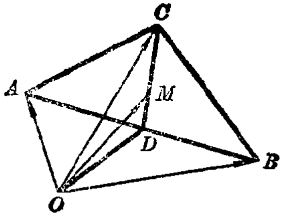

图 1-7

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}\\&=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})\\&=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\\&\quad+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\&=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{OC}\\&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\end{aligned}$$

习　题　1-1

1．给定非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，作出下列各向量:

(1) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$;　(2) $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;　(3) $2\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$;

(4) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$;　(5) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$;　(6) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$;

(7) $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

2．已知 $|\boldsymbol{a}|=13$，$|\boldsymbol{b}|=19$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=24$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

3．用三角形法则验证: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

4．说明下列各式的几何意义:

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$; (2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

5．向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 具有怎样的特征，才能满足下列各等式：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; (2) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$; (4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

6．M 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$.

7．如果四边形对角线互相平分，则它是平行四边形．试用向量方法证明之．

8．设 A, B, C, D 是一个四面体的顶点，M、N 分别是棱 AB、CD 的中点，证明

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

9．用向量方法证明梯形两腰中点的连线平行于底边，且等于两底和的一半．

§1-2 空间直角坐标系 向量的坐标

在讨论向量的坐标表示前，我们先引进空间直角坐标系．

一、空间直角坐标系

在空间选定一点 O，过点 O 作三条互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，它们都以点 O 为原点且一般具有相同的长度单位．这三条轴分别叫做 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称**坐标轴**．这样的三条轴就组成了一个**空间直角坐标系**．点 O 称为**坐标原点**(或原点)．

空间直角坐标系分为右手系和左手系．我们采用右手系，即当 x 轴正向按右手握拳方向以 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

向时，拇指的指向就是 z 轴的正向．如图1-8 所示．

三条坐标轴两两确定互相垂直的三个平面 xOy、yOz、zOx 统称为坐标面．它们把整个空间分成八个部分，每一个部分称为一个卦限．位于 xOy 坐标面的第 I、II、III、IV 象限上方的部分依次称为第 I、II、III、IV 卦限；而位于其下方的部分依次称为第 V、VI、VII、VIII 卦限．如图 1-9 所示．

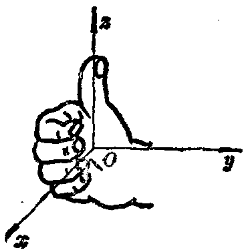

图 1-8

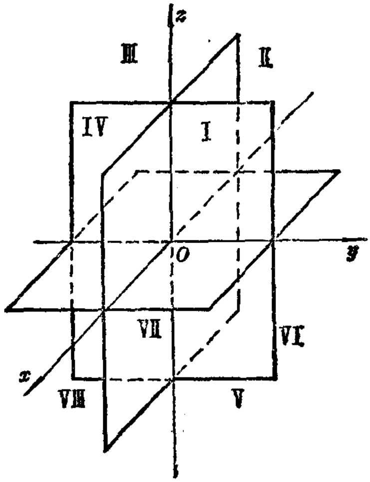

图 1-9

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与有序实数组 (x, y, z) 之间的对应关系．

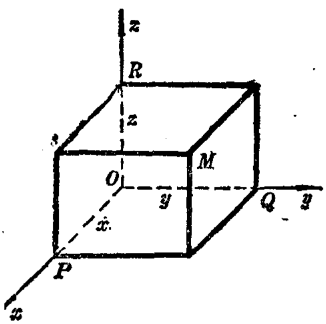

图 1-10

设 M 为空间一点，过点 M 分别作三个垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴的平面．它们与坐标轴的交点 P、Q、R 对应的三个实数依次为 x, y, z（图 1-10）．于是点 M 确定了一个有序实

数组(x, y, z). 反之, 如果给定了一有序实数组(x, y, z), 我们依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取与 x、y、z 相应的点 P、Q、R, 然后过 P、Q、R 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴, 这三个平面交于空间一点 M. 因此, 有序实数组(x, y, z)与空间的点一一对应. (x, y, z)就叫做点 M 的**直角坐标**, 并依次称 x、y、z 为点 M 的**横标、纵标和竖标**. 坐标为 (x, y, z) 的点 M, 记作 $M(x, y, z)$.

显然, 原点的坐标为 $O(0, 0, 0)$; x 轴、y 轴和 z 轴上的点的坐标分别是 $(x, 0, 0)$、$(0, y, 0)$、$(0, 0, z)$; xOy、yOz、zOx 三个坐标面上的点的坐标分别是$(x, y, 0)$、$(0, y, z)$、$(x, 0, z)$.

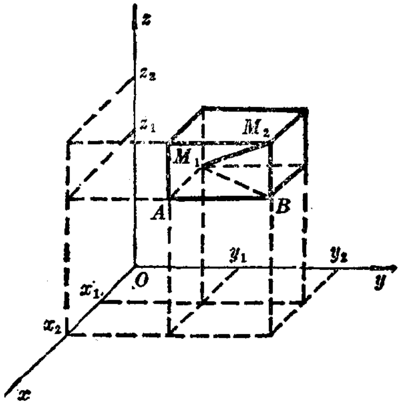

图 1-11

若 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$是空间两点, 过 M_1, M_2 分别作平行于各坐标面的平面, 组成一个长方体, 它的棱与坐标轴平行 (图 1-11). 由于

$$|M_1A| = |x_2 - x_1|$$

$$|AB| = |y_2 - y_1|$$

$$|BM_2| = |z_2 - z_1|$$

所以空间任意两点的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{|M_1B|^2 + |BM_2|^2}$$

$$=\sqrt{|M_1A|^2+|AP|^2+|BM_2|^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

即
$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 和原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为
$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 1 在 y 轴上求到两定点 $A(1, -2, 1)$ 与 $B(2, 1, -2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 y 轴上，所以设该点为 $M(0, y, 0)$，按题意有
$$|MA|=|MB|$$

即
$$\sqrt{(0-1)^2+(y+2)^2+(0-1)^2}$$
$$=\sqrt{(0-2)^2+(y-1)^2+(0+2)^2}$$

解此方程，得
$$y=\frac{1}{2}$$

故所求的点为 $M\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$.

二、向量的坐标表示式

设有一个起点为原点，而终点为 $M(x, y, z)$ 的向量 $\overrightarrow{OM}$（图 1-12），用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴、y 轴和 z 轴正向的单位向量（称为基本单位向量）. 则由向量的加法，得
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$$
$$=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

由于 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，于是

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式，简记为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,\ y,\ z\}$$

称 x, y, z（即 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的系数）为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 由于有序实数组 (x, y, z) 与点 M 是一一对应的，所以有序数组 (x, y, z) 与起点在 O 点，终点在 M 的向量 $\overrightarrow{OM}$ 也有一一对应关系.

图 1-12

有了向量的坐标表示式，就可以把由几何所规定的向量运算转变为向量坐标之间的数量运算.

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$，则有

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}\quad(\lambda\text{ 为实数})$$

即

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2\}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1\}$$

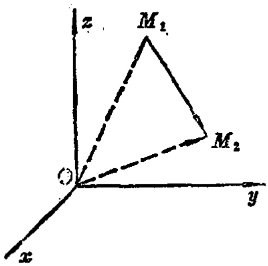

图 1-13

由此可见，对向量进行加、减及数乘，只须对向量的各坐标分别进行相应的数量运算就行了.

例 2 已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$（图 1-13）的坐标表示式.

解 作向量 $\overrightarrow{OM_1}$、$\overrightarrow{OM_2}$、$\overrightarrow{M_1M_2}$，则

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\
&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\
&\quad-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\
&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\
&=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}
\end{aligned}
$$

例 2 表明：**任一向量的坐标，等于其终点和起点的相应坐标之差.**

例 3 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, 求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 及 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

解
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})-(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\\
&=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}\\
3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}&=3(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})+2(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\\
&=(9\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})+(4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})\\
&=13\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

三、向量的模及方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模及方向表示(即几何表示)，也可以用它的坐标表示(即代数表示). 那末，又如何用向量的坐标表示它的模和方向呢?

任给一向量

$$\boldsymbol{a}=\{x,\ y,\ z\}$$

从图 1-14 容易得到

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}|&=|\overrightarrow{OM}|\\
&=\sqrt{OP^2+OQ^2+OR^2}\\
&=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (1\text{-}1)
\end{aligned}
$$

这就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的坐标表示式. 它与点 $M(x, y, z)$ 到原点的距离公式是一样的.

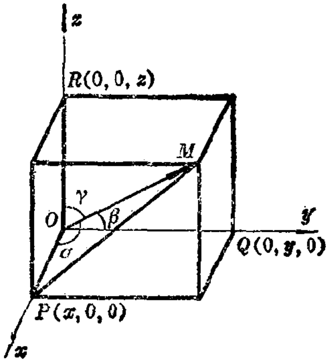

图 1-14

由图1-14还可以看出, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向还可以由这向量与三条坐标轴正向的夹角 α、β、γ 完全确定. 称 α、β、γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**, 并规定

$$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi,$$
$$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$$

因为

$$\angle MOP=\alpha,\ 且\ MP\perp OP$$

所以 $$x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$$

同理 $$y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta$$
$$z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

称 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 显然当方向余弦确定后, 方向角 α、β、γ 就确定了, 从而向量的方向也就确定. 由上面的关系式及(1-1)式, 得

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos\beta&=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}2)$$

(1-2)式称为方向余弦的坐标表示式.

把(1-2)式中各等式两边平方后再相加, 得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\qquad(1\text{-}3)$$

试读结束, 需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com