

51.5
7547

速成解析幾何與微分積分術

自 修 手 冊

譯者 陳大剛(解析幾何)
嚴夢輝(微分積分術)



徐氏基金會出版

序

在世界科學文明已進步到太空時代的今天，任何一個人都了解發展科學的重要性，談發展科學，必需提高大家研究科學的興趣，才能按步就班地求發展。

本基金會對於海內外中國人士從事發展科學研究的情況，向來都寄予深切的關心，過去六年，本會曾資助大學理工科畢業學生前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯世界著名科學技術書籍出版供給在校學生及社會大眾閱讀，其目的都在幫助促進科學發展。

我們深深希望自由中國的科學家和工程師們了解本基金會的用意，主動的重視科學技術書籍為發展科學的基本工具，從事寫作和翻譯，並且熱誠盼望與我們聯繫合作，我們願意運用基金從事各種出版工作，共同為我們邁進工業化的途徑而努力

徐氏基金會

1967年8月

譯 序

解析幾何學爲利用坐標以研究幾何之學科。由於坐標之溝通形與數間之關係，解析幾何學乃成爲幾何與代數間之橋樑。一方面，幾何中若干須費思攷及須用技巧之問題，常可藉坐標之助而逕行解決；另一方面，若干代數問題，亦由坐標之助，而獲得其幾何意義，於是化抽象爲直觀，使問題易於瞭解與想像，因而得到解決之方法。

更有進者，解析幾何與微積分之間，實具有密切之關係。許多幾何問題，如區域面積、曲綫長度、曲綫之切綫、或立體之體積等，常可應用微積分以獲得解答，而此等應用之基礎，則仍在解析幾何，因其以數字決定各點之位置，而以方程式描述幾何之圖形，故解析幾何學實爲學理工者最重要而必需研習之基礎學科。

本書係美國DePauw大學數學助理教授Thomas A. Davis 氏所編著，內容實用而有趣，其編輯方法，採取計劃自習方式 (Programmed Text)，由淺入深，化難爲易，祇須循序漸進，確可無師自通。儘管有人以爲：此種方式之教本，對於篇幅方面，似稍有浪費之嫌，對於內容方面，亦偶有重複之處，但以其有利提高研究效率，易使學者徹底瞭解，裨益促進科學發展，實仍有倡導推行之必要。

香港徐氏基金會，向以幫助促進科學爲主旨，久爲各方所贊佩，謬承邀譯此書，故樂於應命；唯專書遙譯工作，良非易事，特別本人雖一向效力工程、教育，但究非專攻數學，匆促從事，謬誤難免，尚祈方家學者，惠予匡正，實所感盼！

陳 大 剛

57年 8月 日

中正理工學院

致教師

本冊計劃自習教材之設計，乃爲學者對解析幾何學與微積分之初步教程，預作準備。其第一單元中所提供者，爲處理直線方程式所必需之教材與觀念。此等教材，在大專解析幾何學及微積分教科書前五六十面中，亦所常有，如坐標，不等式，絕對值，有向距離，距離公式，中點公式，直線之斜率，平行線與垂直線，兩線間之角，圖形與方程式，截距，對稱與漸近線，及直線。第二單元則討論圓錐曲線。

本冊教材、可作解析幾何學獨立教程之教本，以爲微積分課程作準備；亦可與微積分初步教程之課本，配合應用。

本計劃教材，內容完整，可單獨應用。學者可完全依照自己意圖，自行研習，亦可在教師每日指定預習、監督及測驗之下進修之。

本教材如供作解析幾何學及微積分教程之用，教師應立即開始有關微積分之課題，同時，學生則應從事實際演練之作業。務使講堂上講完微積分之際，學生已完成第一單元部份教材之學習，如是，則在進一步研究微積分時，解析幾何學即可加以應用。至第二單元，則可視教師之便利，適時予以介紹。

Thomas A. Davis

告學子

計劃自習教材，有如本教本者，具有數項特徵。第一，凡主要題材，均分析爲一系列簡單步驟，稱之爲欄，且將其次序妥爲安排，以便逐項提出。第二，學者需隨時勤作筆答，以資熟練。第三，關於所作答案之是否正確，學者可獲立即之證明。

此種教材之讀法，至爲簡單：

- 1.以書中所附之書籤（或卡片），將答案蓋住，俾僅可看到問題。
- 2.仔細閱讀每欄，非俟全欄讀完，不要書寫答案。
- 3.答案應作在適當位置或圖樣上，若需解答問題，求導公式，或證明定理，應在練習簿或空白帑上爲之。
- 4.將書籤下移，使書頁左邊該欄之答案，可以看到。
- 5.校驗所作答案。若答案正確，即繼續閱讀次欄，並依以上第2至第5各步驟重複爲之。所作答案，毋需與書上所供給者完全一致，但應運用思攷，判斷所作答案，是否與書上所供給者十分接近。

若答案錯誤，應檢討其原因，然後始能繼續閱讀次欄。

每一單元中之各欄，均連續編號，以便查閱。

此書並非一種測驗，實乃一套教材，如有必需，以前各步，自可隨時加以複習。

全書之中，有許多“快速”欄，“末端”欄及“綜結”等。所謂快速欄，乃適時提出一問題，可能爲汝所能答，亦可能爲汝所不能回答者。若回答正確，則答案中將告汝，以下幾欄，可以免讀，否則，若答案未能正確，則將予汝指導，繼續閱讀以次各欄，期能獲得正確答案。第2面第1欄中，有一快速欄之實例。

所謂末端欄，常出現於各章或某一段落之末尾，乃藉以測驗對各章或某段落內容瞭解之程度。對末端欄如能回答正確，則告知繼續閱讀次欄，如不能正確回答，則告汝需複習何欄，始能回答正確。第6面16欄有一末端欄之實例。第427面上，且將最重要之各末端欄列成一

表，以便查閱。

最後，凡導出一公式或證明一定理之若干欄，每於其後緊接一“綜結”。此等綜結，係將證明該定理或求導該公式，所應有之全部證明及求導手續，於一兩面之篇幅內，完全予以彙集。第426面上列有一綜結表。

末端欄及綜結，對於教材複習，特別有用。

大多數高中學生，常於其第一二兩學年內，學習代數及幾何課程，解析幾何學則係應用坐標系及代數，以研究幾何，故能將以上兩種課程予以結合。解析幾何學主要與以下兩類問題有關：

1. 給予含 x 及 y 之方程式，繪畫其圖形，換言之，即以幾何方式表示之。
2. 給予幾何圖形，尋求確能表示此圖形之方程式。

解析幾何學，不僅其本身即為一門有趣之學問，且提供甚多微積分方面之範例，故解析幾何學之知識，無論單獨予以學習，或與微積分同時研究，均為微積分教學成功所必需。

Thomas A. Davis

目 次

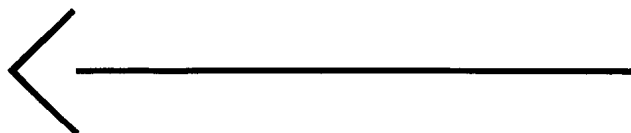
致教師.....	VII
告學子.....	IX
第壹單元 線	
第 一 章 一維坐標系.....	2
第 二 章 不等式與區間.....	8
第 三 章 絕對值.....	18
第 四 章 絕對值與不等式.....	26
第 五 章 有向距離.....	49
第 六 章 二維坐標系.....	59
第 七 章 平面上之距離.....	70
第 八 章 中點.....	79
第 九 章 斜角與斜率.....	92
第 十 章 平行線與垂直線.....	108
第 十 一 章 由一線至另一線間之角.....	117
第 十 二 章 圖形與方程式.....	133
第 十 三 章 截距、對稱與漸近線.....	148
第 十 四 章 直線.....	181
第貳單元 圓錐曲線	
第 十 五 章 圓錐曲線導論.....	206
第 十 六 章 圓.....	209
第 十 七 章 拋物線.....	234
第 十 八 章 橢圓.....	266
第 十 九 章 雙曲線.....	315

第 二 十 章 軸之平移.....	359
第二十一章 離心率.....	397
補充問題答案.....	413
綜結表.....	426
末端欄表.....	427
英漢名詞索引.....	429



第壹單元

線

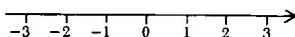


第壹單元

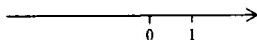
第一章

一 維坐標系

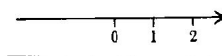
於下面一維坐標系 (One-dimensional coordinate system) 上，找出與 $-\frac{1}{2}$ ， $\frac{3}{10}$ ， -1.4 ， $\sqrt{2}$ ，及 $-\pi$ 相對應各點之位置，並標出之：



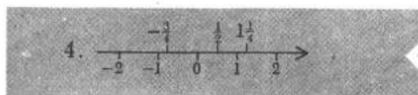
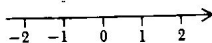
- 2 於下面直線上，找出與數值 2 相對應之點，並標出之：



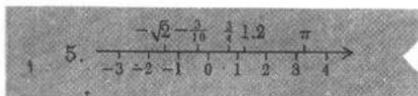
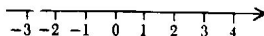
- 3 與數值 1 相對應之點，位於與數值 0 相對應之點之右一個單位長度，2 又在 1 之右一個同樣單位長度，定出與 -1 及 -2 相對應之位置，並標出之：



- 4 將已予(已知)線段, 分為任意等份, 當屬可能, 故與分數相對應之點, 其定位亦甚容易。在下面之線上, 定出與 $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$ 及 $-\frac{3}{4}$ 相對應之點之位置, 並予標出:



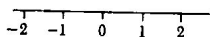
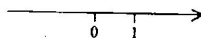
- 5 在下面之一維坐標系上, 定出與 $\frac{3}{4}$, 1.2 , $-\sqrt{2}$, $-\frac{3}{10}$ 及 π 等數相對應之各點, 並予標出:



- 6 直線上與每一數值相對應之點, 均可如上予以定出。因此, 如在已知直線上, 選定一原點 (Origin) 0, 獨一之單位長度, 及一正方向, 則數值與此直線上之____之間, 具有一對一之對應關係 (One-to-one correspondence)。

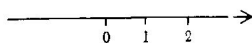
6 點

- 7 在下面之坐標系上, 原點以 (a)____表示, 單位長度以 (b)____與 (c)____間之距離表示, 正方向則為向 (d)____ (左或右)。



7. (a) 0
(b) 0
(c) 1
(d) 右

- 8 下面數字比例尺上，0 表示 (a)____，
右端之箭頭表示 (b)____ 方向，
0 與 1 之間之距離為 (c)_____

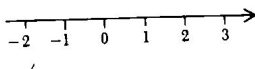


8 (a) 原點

(b) 正

(c) 單位長度或單位距離

- 9 下圖稱為一維坐標系，在此坐標系上，每一點有一對應之 (a)____，
每一數有一對應於 (b)____ 系中之 (c)_____。

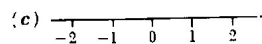
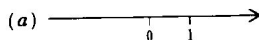


9 (a) 數

(b) 一維坐標

(c) 點

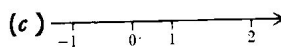
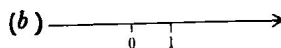
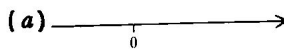
- 10 下列各項，那幾項表示一維坐標系，請選出之：



10 (a)

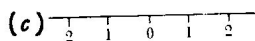
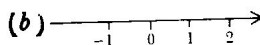
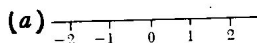
(c)

11 請再選出表示一維坐標系之各項：



11 (b)

12 選出表示一維坐標系之各項：



12 (a)
(b)

13 觀察 10, 11, 12 三欄中的九個圖，將能表示下列各項者，一一指出：

- (a) 直線
- (b) 點
- (c) 數
- (d) 原點
- (e) 獨一之單位長度
- (f) 正方向

10 欄			11 欄			12 欄		
(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

13 (a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

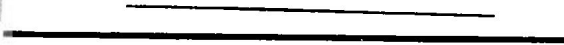
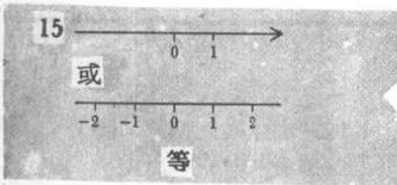
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

- 14 由上可知，10欄至12欄中的九個圖上，均有直線、點及數。但10欄中之**(b)**圖，11欄中之**(a)**圖及**(c)**圖，及12欄中之**(c)**圖，則均不能稱為坐標系。請舉出每一圖不能稱為坐標系之理由：

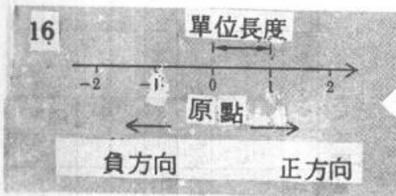
(b) _____
 (a) _____
 (c) _____
 (c) _____

- 14 (b) 圖上無原點及單位長度
 (a) 圖上無單位長度
 (c) 圖上無獨一之單位長度
 (c) 圖上無正方向

- 15 在下面之直線上，繪出一維坐標系

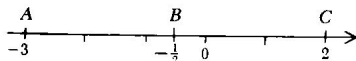


- 16 在15欄答案內之任一坐標系上，指出構成一維坐標系之特性的三個部份。



對15或16欄，如有困難，請讀7至14各欄。

17 研究下圖：



與2對應之點 C ，為數值2對應之圖形 (Graph)，數值2即為點 C 之坐標 (Coordinate)。在此圖上，那些是坐標？其對應之圖形為何？

坐標 圖形
 -3 (a) _____

$-\frac{1}{2}$ (b) _____

(c) _____ C _____

因此，坐標即是 (d) _____，而圖形即是 (e) _____。

- 17 (a) A (d) 數
 (b) B (e) 點
 (c) 2

- 18 如已知任一數 x ，則直線上有其唯一對應之點 P ，直線上每一點 P ，亦有其唯一對應之數 x ，故直線上數與點之間，具有_____關係。

18 一對一之對應

- 19 與點 P 對應之數 x ，稱為 P 之 (a) _____，而點 P 則稱為 x 之 (b) _____

- 19 (a) 坐標
 (b) 圖形

如有困難，請重讀17欄。

第二章

不等式與區間

不等式之複習

敘述 $a > b$ ，讀為“ a 大於 b ”，
 $c < d$ 讀為“ c 小於 d ”。在以下
各章中，對於等式，如

$$a = b, \quad 3x = 9 \quad x - 6 = 7$$

及不等式，如

$$a < b, \quad 3x > 9 \quad x - 6 < 7$$

均將加以處理。

方程式 $x + 4 = 9$ 為一數學的敘述，
任何數 x ，凡能使此敘述真確者，
稱為此方程式之解 (Solution)，
 $x + 4 = 9$ 有唯一之解 $x = 5$ 。反之，
不等式之解或解集 (Solution
set)，則為能使此不等式成為一
真確敘述之所有數值 x 之集合 (Collection)。因此，滿足 $x < 5$
之所有數值 x 之集合，即為不等式
 $x + 4 < 9$ 之解集。

下列各不等式之性質，對學習頗
有需要：

E 1. 若 $a < b$ ，且 $b < c$ ，則 $a < c$

E 2. 若 $a < b$ ，則 $a + c < b + c$

E 3. 若 $a < b$ ，而 $c > 0$ ，則 $ac < bc$

E 4. 若 $a < b$ ，而 $c < 0$ ，則 $ac > bc$

注意： c 為負數時，則不等式之大小反向。

E 5. 若 $a < b$ ，且 $c < d$ ，則 $a + c < b + d$