数学分析

(第二版)

上　册

刘玉琏　主编

高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

数 学 分 析

（第二版）

上 册

刘玉琏 吕 凤 苑德新 王大海 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析　上册/刘玉琏编 .—2 版 .—北京:高等教育出版社,1994.10(2001 重印)
ISBN 7-04-004884-1

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 数学分析 Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 11454 号

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	河北省香河县印刷厂	版　次	1988 年 4 月第 1 版
开　本	850×1168　1/32		1994 年 10 月第 2 版
印　张	10.25	印　次	2001年2月第7次印刷
字　数	260 000	定　价	10.70 元

内容提要

本书根据国家教委1991年制订的中学教师进修高等师范专科《数学分析教学大纲》，将第一版作为基础修订而成。为便于读者自学，还配有学习指导书。上册主要内容为极限论和一元函数微分和不定积分，下册主要内容为一元函数定积分、级数论和多元函数微积分，微分方程简介。实数理论作为附录列于书末。

本书注意结合中学教材和中学教师的实际，起点适中，内容简明，条理清楚，逻辑严谨，深入浅出，通俗易懂，便于自学。

本书可供卫星电视教育、教育学院、函授院校学员进修高师专科或自学的初中数学教师选作教材或参考书。

再版前言

本书系根据1991年12月国家教委制订的中学数师进修高等师范专科《数学分析教学大纲》，将第一版作为基础修订而成。本书贯彻“少而精，求实效”的原则，并根据成人、在职、业余和师范的特点，加强了一元函数微积分的理论和应用，同时精简了多元函数微积分的某些内容。

本版保留了第一版的体例，可与已播放的卫星电视《数学分析》声像教材配合。在保持第一版通俗易懂，便于自学的前提下，删掉超纲内容，相应地调整了习题，纠正了第一版的错漏，修饰某些文字叙述，注意了与中学数学的联系。

本版得到西昌师范专科学校何武铭老师的关心和支持，他对第一版提出了较全面的修订意见和建议，并编制了详尽的勘误表。本书第一版的责任编辑文小西同志，对本书的修订始终予以具体的帮助和指导。本书第二版责任编辑郑洪深同志，细致审读书稿，纠错补漏。他们为提高书稿的质量付出了劳动，在此谨向他们表示衷心感谢。

限于我们的水平，深感力不从心，谬误在所难免，敬希学员和老师们再予批评指正。

编　者

1993年8月于长春东北师大数学系

（邮编 130024）

前言

本书主要是为参加卫星电视教育学习的中学教师进修高等师范专科数学专业编写的《数学分析》教材。编写的主要依据是中学教师进修高等师范专科的《数学分析教学大纲》，并适当照顾了二年制师范专科学校和在职初中数学教师达到学历合格的两个《数学分析教学大纲》的内容和要求。本书分上、下两册。上册包括极限论和一元函数微积分，下册包括级数论和多元函数微积分，重点是极限论和一元函数微积分。与本书配套的还有刘玉琏、苑德新编的《数学分析学习指导书》(上、下册)，它能帮助读者明确学习要求，深入理解概念，掌握分析方法，进行自我检测，它是本书不可缺少的组成部分。

卫星电视教育是远距离大面积的开放性教育，读者是在没有教师辅导的条件下，不脱离教学岗位在职业余自学。为此，编写本书时注意到：一方面，力求起点适中，叙述详明，条理清晰，深入浅出，使其通俗易懂，适于自学；另一方面，力求联系中学数学教材，提高读者运用数学分析的知识分析、处理、研究中学数学教材的能力，使其学用结合，学以致用。

本书除配有思考题和计算题外，还配有一定数量中等水平的论证题，它有助于深入理解概念，巩固所学的理论，熟练掌握分析的方法，从而提高论证问题的能力。

《数学分析》和《数学分析学习指导书》承蒙四川大学秦卫平副教授和高等教育出版社本书责任编辑文小西同志认真审改，纠正一些错误和不妥之处，并提出许多宝贵的意见和建议，他们的辛勤劳动使书稿的质量有了明显的提高。编者对他们高度负责的精神和严格细致的工作作风深感敬佩。在此向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平不高，编写时间仓促，又没有编写电视教材的经

验。谬误和不妥在所难免，敬请老师们和读者批评指正。

编　者

1987.5于东北师大数学系

目　录

预备知识

§0.1. 集合论初步

集合已广泛地应用到各个层次的数学之中．小学数学中就含有集合的思想，中学数学介绍了集合的初步知识，高等数学的不同分支就是研究不同集合的性质、运算及其结构等．因此，集合语言和符号已成为数学通用的标准化的语言和符号，集合的理论已成为现代数学共同的基础理论．为了今后的学习，特别是学习函数概念，本段简要介绍集合的基础知识．

0.1.1.[①] 集合

数学概念是有联系的又是有层次的链条系列，即除起始那个环节外，任何一个新的数学概念都必须建立在已知的数学概念的基础上．因为集合正是数学概念链条系列的起始环节，即它是数学的**原始概念**(或**基本概念**)，也就是说，数学中没有比集合更为基本的概念了，所以集合是不能借助于其它概念（事实上也不存在这样的概念）予以定义的，只能用一些同义词予以描述．关于集合的描述，我们采用19世纪末集合论的创始人康托[②]的说法．

“所谓集合，是我们直观感到或意识到的，由确定的、彼此不同的对象结合在一起的联合体．”例如：

1）某教室内学生的全体组成一个集合．

2）1，2，3，4，5 这五个自然数组成一个集合．

3）多项式 $x^3-2x^2-x-2=0$ 的所有实根组成一个集合．

4）在坐标平面上，以原点为圆心、以正数 r 为半径的圆周

① 预备知识作为第 0 章，这里的第一个数字“0”表示第 0 章预备知识，下同。

② 康托(G，Cantor1845—1918)德国数学家。

上所有点组成一个集合。

5）大于3的所有实数组成一个集合。

6）能被5整除的所有的自然数组成一个集合。

由康托对集合的描述和上述集合的实例，可以见到，通常把具有某种特定性质的不同的对象的全体称为**集合**，或简称为**集**，其中每个对象称为集合的**元素**。如果集合中只有有限个元素，称该集合是**有限集**。例如：1)，2)，3)都是有限集。如果集合中有无限个元素，称该集合是**无限集**。例如：4)，5)，6)都是无限集。本书所遇到的集合主要是以实数为元素的集合，简称**数集**。

人们习惯用大写的拉丁字母 A，B，C，X，Y，…表示集合，用小写的拉丁字母 a, b, c, x, y，…表示集合的元素。我们约定用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集。

设 A 是一个集合。如果 a 是 A 的元素，则称元素 a **属于**集合 A，表为 $a\in A$。如果 b 不是 A 的元素，则称元素 b **不属于**集合 A，表为 $b\overline{\in}A$ 或 $b\notin A$。有时需要把集合 A 的元素所具有的共同性质 p 明确表示出来，这时用符号

$$A=\{x\,|\,p(x)\}$$

表示，其中"$p(x)$"表示元素 x 具有性质 p。上述符号的涵义就是集合 A 是由具有性质 p 的所有元素 x 所组成。例如，4)，5)，6)的集合可分别表为：

$$\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2=r^2,\ r>0\};$$
$$\{x\,|\,x>3,\ x\in\mathbf{R}\},$$
$$\{m\,|\,m=5n,\ n\in\mathbf{N}\}.$$

如果集合中只有有限个元素，并易于一一列举出来，就可用花括号将它们括起来。例如，集合2)只有5个元素：1，2，3，4，5，可表为

$$\{1,2,3,4,5\}.$$

由对集合的描述可知，一个集合 A 中的元素具有下列三个性质：

确定性 集合A中的元素都是确定的或分明的．对任意一个元素a，能够判断$a\in A$或$a\overline{\in}A$．二者必居其一，不能模棱两可。

互异性 集合A中的所有元素，虽具有共同的特性，但又是互异的．于是，如果集合A有两个(或多个)相同的元素，则把它们作为一个元素看待．例如，集合

$$\{1, 2, 1, 3, 2, 4, 5\}与\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

是相同的，即前者的元素并不比后者多。

无序性 集合A中的所有元素与它们排列的次序无关。例如，集合

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}与\{5, 4, 3, 2, 1\}$$

是相同的，即两个具有相同元素的集合，不因元素排列次序不同而不同。

0.1.2. 集合之间的关系

定义1． 若集合A的任意元素都是集合B的元素，则称集合A是集合B的**子集**，或集合B**包含**集合A，表为$A\subset B$。

若集合B包含集合A，即$A\subset B$，且集合B中至少有一个元素不属于A，则称集合A是集合B的**真子集**，表为$A\subset B$，且$A\neq B$。

例如，$A=\{x|x>3\}$，$B=\{x|x>1\}$。
显然，A是B的子集，而$2\in B$，且$2\overline{\in}A$，于是，A是B的真子集，即$A\subset B$，且$A\neq B$。

对任意集合A，总有$A\subset A$，即任意集合都是它自身的子集。

为了集合运算的需要，若集合A不包含任何元素，则称集合A是空集，表为$A=\varnothing$。例如：

$$\{x|x\neq x\}=\varnothing.$$

$$\{x|x<0，同时\ x>0\}=\varnothing.$$

$$\{x|方程\ x^2+1=0\ 的实根\}=\varnothing.$$

把空集$\varnothing$看作是任意集合A的子集，即$\varnothing\subset A$。

注 集合$\{x\mid$方程$x^2=0$的根$\}=\{0\}$不是空集，它是仅由一个元素0组成的集合。

定义2. 设A与B是两个集合。若$A\subset B$，同时$B\subset A$，则称集合A与B**相等**，表为$A=B$。

显然，$A=B$表示集合A与集合B有相同的元素。一般来说，证明两个集合A与B相等，要分两步进行：首先证明A的任意元素都属于B，即$A\subset B$；其次证明B的任意元素都属于A，即$B\subset A$。例如，

若$A=\{x\mid x=5+c,\ c\in\mathbf{R}\}$与$B=\{y\mid y=2+c,\ c\in\mathbf{R}\}$，则

$$A=B.$$

事实上，若任意$x\in A$，则存在$c_1\in\mathbf{R}$，使$x=5+c_1$或$x=2+(3+c_1)$。因为$3+c_1\in\mathbf{R}$，所以$x\in B$，即$A\subset B$。

同理可证$B\subset A$。于是，$A=B$。

注 两个集合相等和两个数相等都用等号“$=$”表示，但这两个“相等”的意义不同，不能混淆。

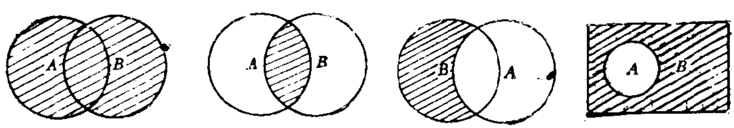
0.1.3. 集合之间的运算

定义3. 由集合A的元素与集合B的元素组成的集合，称为集合A与B的**并集**或**和集**，表为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

如图0.1(*a*)斜线部分。

定义4. 由既是集合A的元素同时又是集合B的元素组成的集合，称为集合A与B的**交集**或**乘集**，表为$A\cap B$，即



$A\cup B$
(*a*)

$A\cap B$
(*b*)

$B\setminus A$
(*c*)

$B-A$
(*d*)

图 0.1

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\ 同时 x\in B\}.$$

如图 0.1(b) 斜线部分。

定义5. 由属于集合 B 而不属于集合 A 的元素组成的集合称为 B 与 A 的**差集或余集**，表为 $B\setminus A$，即

$$B\setminus A=\{x\mid x\in B\ 且\ x\notin A\}.$$

如图 0.1(c) 斜线部分。特别当 $B\supset A$ 时称为集合 B 关于集合 A 的**补集**，记作 $B-A$。如图 0.1(d) 斜线部分。

例如，设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{3,4,5,6,7\}$。有

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\},$$

$$A\cap B=\{3,4,5\}.$$

再例如，设 $A=\{$甲，乙，丙$\}$，$B=\{$甲，乙，丙，丁，戊，己$\}$。有

$$A\cup B=\{甲，乙，丙，丁，戊，己\}.$$

$$A\cap B=\{甲，乙，丙\}.$$

$$B\setminus A=\{丁，戊，己\}.\quad (A\subset B).$$

上述两个集合的并集或交集的定义可以推广到任意有限个集合和无限个集合的并集或交集。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是无限多个集合。

它们的并集表为 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid 至少存在某一个自然数\ k,\ x\in A_k\}.$$

它们的交集表为 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid 对任意自然数\ k,\ x\in A_k\}.$$

例如，设 $A_n=\left\{x\mid -\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\right\}$，$n=1,2,3,\cdots$。有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\right\} = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\right\} = \{0\},$$

§0.2. 常 用 符 号

数学语言是由文字叙述和数学符号共同组成的．数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势，它能使定义、定理的叙述和定理证明过程简练明了．数学分析的一些专门符号将在正文中依次引入．这里先介绍几个数理逻辑的符号和常用的数学符号．

0.2.1．蕴含符号

符号“$\Longrightarrow$”表示“蕴含”或“若…，则…”．

符号“$\Longleftrightarrow$”表示“必要充分”或“等价”．

设P与Q表示两个陈述句或命题．

用蕴含符号连接起来，即

$$P \Longrightarrow Q,$$

表示P蕴含Q；或若有P，则有Q。也常说，Q是P的必要条件，P是Q的充分条件．

在正文中，蕴含符号“$\Longrightarrow$”常用汉字“则”或“有”代替。

用等价符号连接起来，即

$$P \Longleftrightarrow Q,$$

表示P与Q等价；或P蕴含Q（$P \Longrightarrow Q$），同时Q蕴含P（$Q \Longrightarrow P$），或P（或Q）成立的必要充分条件是Q（或P）成立．

例如：等边三角形$\Longrightarrow$等腰三角形．

$$x = 4 \Longrightarrow x^2 = 16。$$

等腰三角形$\Longleftrightarrow$三角形两个底角相等．

数 a 是偶数$\Longleftrightarrow a$ 的个位数字能被 2 整除．

根据排中律，命题

$$P \Longrightarrow Q \quad 与 \quad 非Q \Longrightarrow 非P$$

是等价的。如果要证明命题$P \Longrightarrow Q$为真，也可证明命题非$Q \Longrightarrow$非P为真，这就是证明命题或定理常用的反证法。

0.2.2. 量词符号

数理逻辑的量词只有两个：全称量词和存在量词。

全称量词的符号“$\forall$”，表示“任意”，“任意一个”或“任意给定的”。

存在量词的符号“$\exists$”，表示“存在”或“存在某个”。

设A，B都是集合，例如：

$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A$，有 $x \in B$。

$A = B \Longleftrightarrow A \subset B$，同时$B \subset A \Longleftrightarrow$

$\forall x \in A$，有 $x \in B$，同时$\forall x \in B$，有 $x \in A$。

$A \subset B$，且 $A \neq B$（即 A 是 B 的真子集）$\Longleftrightarrow$

$\forall x \in A$，有 $x \in B$，且$\exists y \in B$，有 $y \overline{\in} A$。

由此可见，用量词符号表示某些数学命题比用文字叙述简练。

注 本书只是形式地借用数理逻辑这两个量词符号，它可使文字叙述符号化，也便于正反命题对比。这里使用量词符号，不涉及逻辑运算。

0.2.3. 几个常用符号

1）阶乘符号

设 n 是自然数，符号“$n!$”读作“n 的阶乘”，表示不超过 n 的所有自然数的连乘积。例如：

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

为了使运算协调一致，规定 $0! = 1$。

2）双阶乘符号

设 n 是自然数，符号“$n!!$”读作“n 的双阶乘”，表示不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的自然数的连乘积。例如：

$$10!! = 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

$$13!! = 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1.$$

3）组合数符号

设 n 与 m 是自然数，且 $m\leqslant n$。符号“C_n^m”（或 $\binom{n}{m}$）表示“从 n 个不同元素取 m 个元素的组合数”。已知

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

有公式：　　$C_n^m = C_n^{n-m}$　和　$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

为了使运算协调一致，规定 $C_n^0 = 1$。

应用组合符号，二项式公式可简写为

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n.$$

4）最大数与最小数的符号

符号“max”表示“最大”，“max”是maximum（最大）的缩写。

符号“min”表示“最小”，“min”是 minimum（最小）的缩写。

$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数中最大数。

$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数中最小数。

例如：　　$\max\{7, 5, 4, 8, 2\} = 8$.

　　　　　$\min\{7, 5, 4, 8, 2\} = 2$.

在极值问题中，max表示极大，min表示极小。

5）和号

设有 n 个数：$a_1, a_2, \cdots, a_n$。这 n 个数的和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$