高中数学

龙门专题

# 数列 极限 数学归纳法

（修订版）

傅荣强 主编

4,5,6,7,8,9,10.

龍門書局

# 数列 极限 数学归纳法

(修订版)

主　编　傅荣强

本册主编　王文彦　张　博
雷印琛　郭艳君

龍門書局

（修订版）

**数列 极限 数学归纳法**

傅荣强　主编

责任编辑　王　敏　乌　云

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂印刷

科学出版社总发行　　各地书店经销

*

2002年1月修　订　版　　开本：880×1230　A5

2002年8月第六次印刷　　印张：6 1/2

印数：120 001—150 000　字数：240 000

ISBN 7-80160-135-1/G·171

**定　价：7.00元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 前　　言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用，使学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》，就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计55种，其中初中数学12种，高中数学12种，初中物理5种，高中物理7种，初中化学4种，高中化学10种，高中生物5种。

本套书在栏目设置上，主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——"基础篇"和"综合应用篇"（高中为"3 + X"综合应用篇）。"基础篇"中的每节又分为"知识点精析与应用"、"视野拓展"两个栏目。其中"**知识点精析与应用**"着眼于把基础知识讲透、讲细，帮助学生捋清知识脉络，牢固掌握知识点，为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。"**视野拓展**"则是在牢固掌握基础知识的前提下，为使学生成绩"更上一层楼"而准备的。需要强调的是，这部分虽然名为"拓展"，但仍然立足于教材本身，主要针对教材中因受篇幅所限言之不详，但却是高（中）考必考内容的知识点（这类知识点，虽然不一定都很难，但却一直是学生在考试中最易丢分的内容），另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高（中）考形势，综合题与应用题越来越多，试行"3 + X"高考模式以后，这一趋势更加明显。"综合应用篇"正是为顺应这种形势而设，旨在提高学生的综合能力与应用能力，使学生面对纷繁多样的试题，能够随机应变，胸有成竹

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨　作为龙门书局最新推出的《龙门专题》，有以下几个特点：

1. 以"专"为先　本套书共计55种，你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. *讲解细致完备* 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解和记忆。

3. *省时增效* 由于"专题"内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. *局限性小* 与教材"同步"与"不同步"相结合。"同步"是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；"不同步"是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即"点、线、面、体"和"平行、垂直、成角、距离、面积、体积"。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从"专题"中体味"万变不离其宗"的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5. *主次分明* 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本套书的另一特点是充分体现"减负"的精神。"减负"的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2001 年 11 月 1 日

# 编委会（高中数学）

（修订版）

# 目　录

# 第一篇　基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简说研究"数"和"形"的学科.代数是它的侧重研究运算方法的分支.数列、数列的极限、数学归纳法是代数的三个节点.

数列是按一定次序排列的一列数.

从映射、函数的观点看,数列是一个序号集合到另一个数的集合的映射 $f:A\to B$.其中,$A=\mathbf{N}^*$,或 $A=\{1,2,\cdots,n\}$,$B\subsetneqq\mathbf{R}$.因此,数列$\{a_n\}$可以看作是定义域为 $A$、值域为 $B$、对应法则为 $f$ 的函数 $a_n=f(n)$的一列函数值 $a_1=f(1)$,$a_2=f(2)$,$\cdots$.

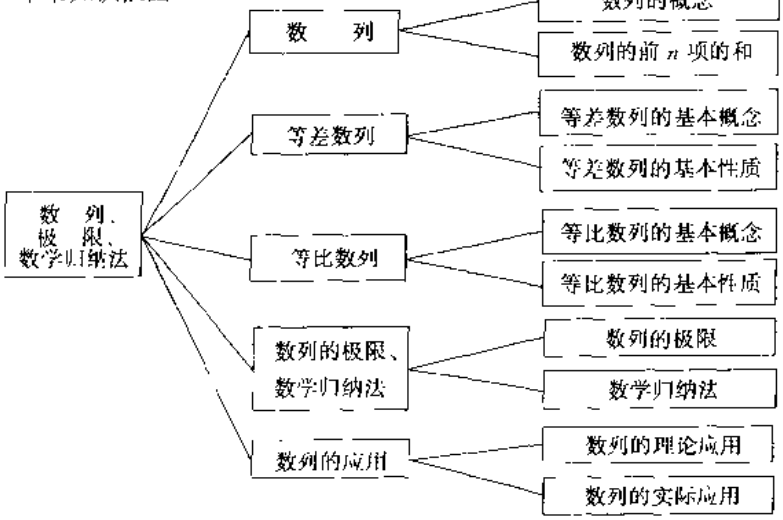
数列研究的主要问题是:(1)根据已知条件,求出通项公式 $a_n=f(n)$;(2)通过通项公式 $a_n=f(n)$研究数列的性质.

数列课题的知识载体是通项 $a_n$、前 $n$ 项的和 $S_n$;模型函数是等差数列、等比数列.

数列的极限,其本质是研究无穷数列的变化趋势.

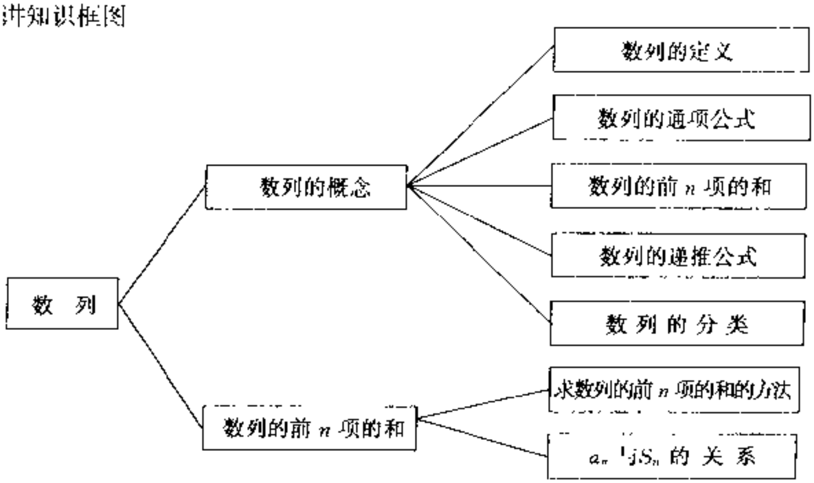
数学归纳法,其本质是研究与正整数有关的命题的推理论证方法.

本书知识框图



# 第一讲　数　列

本讲知识框图




## 1.1　数列的概念

### 重点难点归纳

**重点**　①数列的定义.②数列的通项公式的定义.

**难点**　正确运用数列的递推公式求数列的通项公式.

**本节需掌握的知识点**　①数列的定义.②数列的通项公式的定义.

### 知识点精析与应用

**【知识点精析】**

*1.数列的定义*

数列是按一定次序排列的一列数.在函数意义下,数列是定义域为正整数集 $N^*$(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)的函数 $f(n)$当自变量 $n$ 从1开始依次取正整

数时所对应的一列函数值 $f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$.通常用 $a_n$ 代替 $f(n)$,于是数列的一般形式为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,简记为 $\{a_n\}$.其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 依次叫做数列 $\{a_n\}$ 的第1项,第2项,…,第 $n$ 项,$a_1$ 也叫首项,$a_n$ 也叫通项.对项数有有限的数列而言,最后一项一般称为末项.

2.数列的通项公式

一个数列 $\{a_n\}$ 的第 $n$ 项 $a_n$ 与项数 $n$ 之间的函数关系,如果可以用一个公式 $a_n=f(n)$ 来表示,我们就把这个公式叫做这个数列的通项公式.如,数列1,4,9,16,…的通项公式为 $a_n=n^2$.正像不是所有的函数关系都能用解析式表示出来一样,也不是每个数列都能写出它的通项公式.如,数列1,2,3,-1,4,-2就没有通项公式.有的数列,虽然有通项公式,但在形式上却不一定是惟一的.如,数列 -1,1,-1,1,…的通项公式可写成 $a_n=(-1)^n$,也可写成 $a_n=\cos n\pi$.

3.数列的前 $n$ 项的和

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 叫做数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项的和.

4.数列的递推公式

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第1项(或前几项),且任一项 $a_n$ 与它的前一项 $a_{n-1}$(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示,那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.

5.数列的分类

(1)有穷数列、无穷数列:按照数列的项数是有限项还是无限项来分,数列可划分为有穷数列,无穷数列.如:数列1,2,…,2001和数列1,3,5,…,$2n-1$,…分别是有穷数列和无穷数列.

(2)递增数列、递减数列:按照数列的项与项之间的大小关系"$a_{n+1}>a_n$,或 $a_{n+1}<a_n$"来分,数列可划分为递增数列、递减数列.如:数列1,2,4,…,$2^{n-1}$,…和数列2002,2001,…,1949分别是递增数列和递减数列.

递增数列与递减数列统称为单调数列.

(3)有界数列、无界数列:按照数列的任何一项的绝对值是否都小于某一正数来分,数列可划分为有界数列,无界数列.如:数列 $\{\sin 1921n\}$ 和数列 $\{n^{1922}\}$ 分别是有界数列和无界数列.

(4)摆动数列:$a_{n+1}>a_n$ 或 $a_{n+1}<a_n$ 不确定.如:数列 -2,2,-2,2,…是摆动数列

(5)常数数列:$a_{n+1}=a_n$.如:数列2003,2003,…,2003,…是常数数列.

【解题方法指导】

1.用观察法求数列的通项公式

用观察法求数列的通项公式应从三个方面考虑:

## 4

(1)掌握一些简单数列的通项公式,见表3-1.

**表 3-1**

| 简 单 数 列 | 通 项 公 式 |
|---|---|
| 1,1,1,1,… | $a_n=1$ |
| 1,2,3,4,… | $a_n=n$ |
| 2,4,6,8,… | $a_n=2n$ |
| 1,3,5,7,… | $a_n=2n-1$ |
| 1,2,4,8,… | $a_n=2^{n-1}$ |
| 2,6,12,20,… | $a_n=n(n+1)$ |
| 1,4,9,16,… | $a_n=n^2$ |
| 1,8,27,64,… | $a_n=n^3$ |
| 1,-1,1,-1,… | $a_n=(-1)^{n-1}=\cos(n-1)\pi$ |
| -1,1,-1,1,… | $a_n=(-1)^n=\cos n\pi$ |
| 1,-2,3,-4,… | $a_n=(-1)^{n-1}n$ |
| 0,1,0,1,… | $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}=\left\|\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right\|$ |
| 1,0,1,0,… | $a_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}=\left\|\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\|$ |
| 1,11,111,1111,… | $a_n=\dfrac{10^n-1}{9}$ |

(2)正、负号的交错“+,-,+,-,…”和“-,+,-,+,…”分别用$(-1)^{n+1}$和$(-1)^n$调解.

(3)求形如$\{a_nb_n\}$、$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$等形式的数列的通项公式,先分别求出$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式,再组合为一体.

[**例 1**] 求下列数列的一个通项公式:

(1)1,-1,1,-1,…; (2)3,5,9,17,33,…;

(3)$\dfrac{1}{2}$,2,$\dfrac{9}{2}$,8,$\dfrac{25}{2}$,…; (4)1,0,$-\dfrac{1}{3}$,0,$\dfrac{1}{5}$,0,$-\dfrac{1}{7}$,0,….

**分析** 用观察法考察数列中的每一项与它的序号之间的对应关系,归纳各项数值的变化规律.

**解** (1)$a_n=(-1)^{n+1}$. (2)$a_n=1+2^n$.

(3)数列的项,有的是分数,有的是整数,可将数列的各项都统一成分数再观察.在数列$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$中,分母为2,分子为$n^2$,所以$a_n=\frac{n^2}{2}$.

(4)把数列改写成$\frac{1}{1},\frac{0}{2},\frac{-1}{3},\frac{0}{4},\frac{1}{5},\frac{0}{6},\frac{-1}{7},\frac{0}{8},\cdots$.分母依次为$1,2,\cdots$,而分子$1,0,-1,0,\cdots$周期性出现,因此,我们可以用$\sin\frac{n\pi}{2}$表示,所以$a_n=\frac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n}$.

2.根据数列的递推公式求数列的通项公式

[例2] 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_{n+1}=2a_n+1$,写出数列的前6项及$\{a_n\}$的通项公式.

**分析** 已知中$a_{n+1}=2a_n+1$,一般称为数列的递推公式.由数列的首项和递推公式可直接写出数列中的各项,通项公式可用累乘法来求.

**解** $\because a_1=3,a_{n+1}=2a_n+1,\therefore a_2=7,a_3=15,a_4=31,a_5=63,a_6=127.$

$a_{n+1}=2a_n+1$变形为$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$,由此得下面$n-1$个式子

$a_n+1=2(a_{n-1}+1),a_{n-1}+1=2(a_{n-2}+1),a_{n-2}+1=2(a_{n-3}+1),\cdots,a_2+1=2(a_1+1)$.

将这$n-1$个等式相乘,得$a_n+1=2^{n-1}(a_1+1)$.

又$\because a_1=3,\therefore a_n=2^{n+1}-1$.

**点评** 已知递推公式求通项,可把每相邻两项的关系列出来,抓住它们的特点进行适当的处理.本题的处理办法是相乘(称为累乘法).有时也可相加或相减(称为叠加法),比如本例调整一下系数就可用叠加法,即对递推公式$a_{n+1}=2a_n+1$可做如下调整:$a_n=2a_{n-1}+1,2a_{n-1}=2^2a_{n-2}+2,2^2a_{n-2}=2^3a_{n-3}+2^2,\cdots,2^{n-2}a_2=2^{n-1}a_1+2^{n-2}$.

将这$n-1$个等式相加,得

$a_n=2^{n-1}\cdot3+(1+2+\cdots+2^{n-2})$.

还可用递归法,即将递推关系层层代入,比如:$\because a_{n+1}=2a_n+1\Rightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1),\therefore a_n=2a_{n-1}+1,\therefore a_n+1=2(a_{n-1}+1)=2[2(a_{n-2}+1)]=\cdots=2^{n-1}(a_1+1)=2^{n+1},\therefore a_n=2^{n+1}-1$.

[例3] 已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$中,$a_1=1,b_1=-1$,又$a_{n+1}=8a_n-6b_n,b_{n+1}=6a_n-4b_n$.求$a_n$和$b_n$

**分析** 本题没有直接给出两个数列的递推关系,但两个等式只要相减就可得到差数列的递推关系,即$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$,因此用累乘法或递归法可

求得差数列的通项 $a_n-b_n=2^n$，代入第 1 个等式消去 $b_n$ 得$\{a_n\}$的递推公式，再用叠加法可求得$\{a_n\}$的通项公式，然后代入差数列的通项公式即可得$\{b_n\}$的通项公式.

**解** 由 $\begin{cases} a_{n+1}=8a_n-6b_n, \\ b_{n+1}=6a_n-4b_n, \end{cases}$ 得 $a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$.

$\therefore a_n-b_n=2(a_{n-1}-b_{n-1})=2^2(a_{n-2}-b_{n-2})=\cdots=2^{n-1}(a_1-b_1)=2^n$,

即 $$a_n-b_n=2^n \qquad ①$$

把①代入 $a_{n+1}=8a_n-6b_n$，得 $a_{n+1}=2a_n+6(a_n-b_n)=2a_n+6\cdot 2^n$.

$\therefore a_{n+1}=2a_n+6\cdot 2^n$,

$2a_n=2^2a_{n-1}+6\cdot 2^n$,

$2^2a_{n-1}=2^3a_{n-2}+6\cdot 2^n$,

……

$2^{n-1}a_2=2^n\cdot a_1+6\cdot 2^n$.

把 $a_{n+1}=2a_n+6\cdot 2^n$ 中的 $n$ 每次减少 1，再把所得式子两边同时乘以 2 就得到了这 $n-1$ 个式子

以上各式相加并把 $a_1=1$ 代入，得

$a_{n+1}=2^n+6\cdot 2^n\cdot n=2^n(6n+1)$.

$\therefore a_n=2^{n-1}[6(n-1)+1]=2^{n-1}(6n-5)$，即 $a_n=2^{n-1}(6n-5)$.

把上式代入①，得 $b_n=2^{n-1}(6n-7)$.

**[例 4]** 已知数列$\{a_n\}$:3,5,7,…,$2n+1$,…，作另一数列$\{b_n\}$，使 $b_1=a_1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=a_{b_{n-1}}$，求数列$\{b_n\}$的第 4 项、第 5 项和通项.

**分析** 数列$\{a_n\}$是已知数列，通项公式为 $a_n=2n+1$，$\{b_n\}$与$\{a_n\}$的关系是 $b_n=\begin{cases} a_1 & (n=1), \\ a_{b_{n-1}} & (n\geqslant 2). \end{cases}$ 结合在一起，得 $b_1=a_1$，$b_{n+1}=2b_n+1$，即 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，所以数列$\{b_n+1\}$的通项可求.

**解** $b_2=a_3=7$,

$b_3=a_{b_2}=a_7=2\cdot 7+1=15$,

$b_4=a_{b_3}=a_{15}=31$,

$b_5=a_{b_4}=a_{31}=63$,

①$a_n=2n+1\Rightarrow a_1=b_1=3$.
②依 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，将 $n=1,2,\cdots,n-1$ 逐个代入.

$\because b_n=a_{b_{n-1}}=2b_{n-1}+1$,

$\therefore b_n+1=2(b_{n-1}+1)=2^2(b_{n-2}+1)=\cdots=2^{n-1}(b_1+1)=2^{n+1}$,

$\therefore b_n=2^{n+1}-1$（经检验，$n=1$ 也适合）.

### 3. 根据数列的前 $n$ 项的和的公式求数列的通项公式

**[例 5]** 数列$\{a_n\}$中，$S_n=n^2+n-2$，求 $a_n$.

**分析** 已知数列的前 $n$ 项和的公式,求通项 $a_n$,可直接利用通项与和的关系 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$

**解** 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1+1-2=0$.

当 $n\geqslant 2$ 时,

注意 $a_1$ 与 $n\geqslant 2$ 时的 $a_n$ 必须分别求得.

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^2+n-2)-[(n-1)^2+(n-1)-2]=2n.$$

$$\therefore a_n=\begin{cases}0, & n=1,\\ 2n, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

$a_1$ 符合 $a_n=2n$ 的表达式,通项公式可以统一写,如果 $a_1$ 不符合表达式,通项公式必须分段表示.

4.根据数列的通项公式求数列的某些项

**[例6]** 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}n & (n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*),\\ n+1 & (n=2k,k\in\mathbf{N}^*).\end{cases}$

(1)写出这个数列的奇数项的前3项;(2)写出这个数列的前3项.

**分析** 可以直接按项数的奇偶性求所求的项,另一种方法是将通项公式整理成 $a_n=n+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

**解** (1)$a_1=1,a_3=3,a_5=5$.(2)$a_1=1,a_2=3,a_3=3$.

**点评** 通项公式可以分段表达也可统一表达,如 $a_n=\begin{cases}f(n), & n\text{ 为奇数},\\ g(n), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ 也可合并写成 $a_n=\dfrac{1}{2}[f(n)+g(n)]+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2}\times[f(n)-g(n)](n\in\mathbf{N}^*)$.

5.数列中的探索性问题

**[例7]** 数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=(n+1)\times 0.9^n$,问是否存在这样的正整数 N,使得对于任意的正整数 $n$,都有 $a_n\leqslant a_N$ 成立,证明你的结论.

**分析** 本题属于探索性问题中的存在性问题,这类问题的解题思路是:先假定所需探索的对象存在或结论成立,以此为前提进行推理和运算.若推出矛盾,则否定结论,否则要给出肯定的证明.本题提出的问题是判断数列$\{a_n\}$中是否存在最大的项,所以需要研究数列中各项间的大小关系及其变化情况.因此,只要判断$\{a_n\}$的增减性即可.

**解** 由 $a_n=(n+1)\times 0.9^n$,得

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}(n+2)-\left(\frac{9}{10}\right)^n(n+1)=\frac{9^n}{10^{n+1}}(8-n).$$

$\therefore$ $n<8$ 时,$a_{n+1}>a_n$;$n>8$ 时,$a_{n+1}<a_n$;且 $a_8=a_9$.

$\therefore a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_8 = a_9 > a_{10} > a_{11} > \cdots$.

判断数列的增减性与判断函数的增减性方法相同，即是考查 $a_{n+1}-a_n$ 的符号，正号具有递增性，负号具有递减性.

$\therefore$ 存在正整数 $N=8$ 或 9，使 $a_n \leqslant a_N$ 成立.

**【基础训练题】**

**一、选择题**

1. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，对所有的 $n \geqslant 2$，都有 $a_1a_2a_3\cdots a_n = n^2$，则 $a_3+a_5$ 等于 (  )

A. $\frac{61}{16}$　　B. $\frac{25}{9}$　　C. $\frac{25}{16}$　　D. $\frac{31}{15}$

2. 如果数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项的和 $S_n=\frac{3}{2}a_n-3$，那么这个数列的通项公式是 (  )

A. $a_n=2(n^2+n+1)$　　B. $a_n=3\cdot 2^n$

C. $a_n=3n+1$　　D. $a_n=2\cdot 3^n$

3. 数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n^2-n-2$，则 $a_{n+1}-a_n=$ (  )

A. $2n-1$　　B. $2n$　　C. $2n+1$　　D. $2n+2$

4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{2}{n^2+n}$，那么$\frac{1}{10}$是它的 (  )

A. 第 4 项　　B. 第 5 项　　C. 第 6 项　　D. 第 7 项

**二、填空题**

5. 数列 $-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\cdots$的一个通项公式是________.

6. 已知数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项的和为 $S_n$，且 $S_n=\frac{2n-1}{n}$，则 $a_8=$________.

7. 已知数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项的和为 $S_n=2n^2-3n+1$，则它的通项公式为________.

8. 已知数列$\{a_n\}$的首项为 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=a_n+2n(n\in \mathbf{N}^*)$，则这个数列的通项公式为________.

**三、解答题**

9. 已知数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项的和为 $S_n=3n^2-2n$，求数列的通项公式.

10. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，且 $a_na_{n-1}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2(n=2,3,\cdots)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

**【答案与提示】**

1. A$\Big($由 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n=n^2$可知，$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{n-1}=(n-1)^2$，$\therefore a_n=$

$\frac{n^2}{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{n-1}}=\frac{n^2}{(n-1)^2}$，因此 $a_3=\frac{9}{4}$，$a_5=\frac{25}{16}$，$\therefore a_3+a_5=\frac{61}{16}$.）　2. D（当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=6$，当 $n=2$ 时，$a_2=S_2-S_1$，$\therefore a_2=\left(\frac{3}{2}a_2-3\right)-a_1$，得 $a_2=18$，因此，将 $n=2$ 代入四个选项中通项公式，可否定 A.B.C.）　3. B（由 $a_n=n^2-n-2$ 知，$a_{n+1}=(n+1)^2-(n+1)-2=n^2+n-2$，$\therefore a_{n+1}-a_n=2n$.）

4. A（若 $\frac{1}{10}$ 是这个数列的某一项，则必存在正整数 $n$，使得 $\frac{2}{n^2+n}=\frac{1}{10}$，即此方程有正整数解. 解此方程得 $n=4$ 或 $n=-5$（舍去），所以 $\frac{1}{10}$ 是这个数列的第 4 项.）　5. $a_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$.　6. $a_8=S_8-S_7=\frac{16-1}{8}-\frac{14-1}{7}=\frac{1}{56}$.　7. 利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$ 来求. $\because a_1=S_1=2-3+1=0$，$n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，$\therefore a_n=2n^2-3n+1-[2(n-1)^2-3(n-1)+1]=4n-5$，所以，$a_n=\begin{cases}0 & (n=1),\\ 4n-5 & (n\geqslant 2).\end{cases}$　8. 先写出它的前几项：1，3，7，13，21，31，…，猜想：$a_n=n^2-n+1$. 也可用叠加法求通项.　9. 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-2n-[3(n-1)^2-2(n-1)]$，即 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=6n-5$，又 $a_1=S_1=1=6-5$，当 $n=1$ 时 $a_1$ 符合 $a_n=6n-5$ 的表达式，所以 $a_n=6n-5(n\in\mathbf{N}^*)$.　10. 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_na_{n-1}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^2$，$\therefore a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$. 当 $n=1$ 时，$a_1=4$ 也符合. $\therefore a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

## 视野拓展

**【释疑解难】**

### 1. $a_n=f(n)$ 与 $y=f(x)$ 的相同点在哪儿？不同点又在哪儿？

对数列 $\{a_n\}$ 的研究，一时一刻都离不开通项公式 $a_n=f(n)$. 由于 $n\in\mathbf{N}^*$，所以仅仅通过 $a_n=f(n)$ 去研究 $\{a_n\}$ 的性质就必然存在一定的局限性. 如，已知 $a_n=\left(n-\frac{7}{2}\right)^2+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，问 $n$ 取何值时，$a_n$ 最小？此问题若回答为"当 $n=\frac{7}{2}$ 时，$a_n$ 最小."，答案就是错误的，原因是 $\frac{7}{2}\notin\mathbf{N}^*$，因此，"$n=\frac{7}{2}$"是不可能的. 设想建立 $a_n=\left(n-\frac{7}{2}\right)^2+1$ 的对应函数 $y=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+1$，$x\in\mathbf{R}$，这时我们可以肯定地说：当 $x=\frac{7}{2}$ 时，$y$ 最小！于是，我们可以更进一步地得到：当 $n=3$，或 $n=4$ 时，$a_n$ 最小. 诸如此类的例子，举不胜举.