高等学校教学用书

PIANWEIFEN FANGCHENG SHUZHIJIE

蒋叔豪　孙庆新　编

偏微分方程数值解

浙江大学出版社

偏微分方程数值解

蒋叔豪　孙庆新编

浙江大学出版社

内 容 提 要

全书分有限差分方法和有限单元法两篇共六章。内容包括抛物型方程、椭圆型方程及双曲型方程的有限差分方法和有限单元法的基本概念和基本理论。书中每章配有典型例题分析和习题。

本书内容力求精练，从典型问题着手分析，循序渐进，易于教学；既适合工科院校的研究生或本科生作为教材，也可作为从事数值分析的工程技术人员自学与进修计算方法的参考书。

偏微分方程数值解

蒋叔豪　孙庆新编

责任编辑　平淳莲

＊　＊

浙江大学出版社出版

余杭县西行印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

＊　＊

开本787×1092　1/32　印张11.125　字数250千字

1985年12月第1版　1985年12月第1次印刷

印　数：1—8,000

统一书号：13337 001　定　价：2.20元

前　　言

本教材是为工科院校研究生及本科高年级学生学习偏微分方程数值解法而编的。全书除了介绍偏微分方程数值解法的基本概念、理论和计算方法外，还列举了流体力学、空气动力学等学科中的一些例子，可供工程技术人员参考。

全书分两篇共六章，第一篇是有限差分方法；第二篇是有限单元法。讲授时间约72学时，或者50学时(不包*打*部分)。

1983年11月，在武汉召开的原教育部直属工科院校和部分部属院校应用数学协作组计算数学教材讨论会上，对本教材的第二篇有限单元法及第一篇有限差分方法的第一章进行过审议。吉林大学冯果忱教授曾审阅全部原稿，中国科技大学石钟慈教授、中国科学院系统科学研究所林群研究员对部分内容提了很多建设性的意见。此外，大连工学院、西安交通大学、南京工学院等院校经试用本教材全部或其中一部分后，同样提出了不少宝贵的意见和建议。谨此向他们表示深切的谢意。

本书第一篇由东北工学院孙庆新编写，第二篇由浙江大学蒋叔豪编写。由于水平所限，一定有很多疏漏、错误的地方，敬请读者批评指正。

编者

1985年9月

目　　录

第一编　有限差分方法

第一章　抛物型方程的有限差分方法……1

§ 1　差分方法的基本概念……4

§ 2　差分格式的建立……8

2.1 古典显格式……8

2.2 古典隐格式……9

2.3 加权六点格式及柯朗科—尼柯逊格式……10

2.4 李查逊格式……13

2.5 双侧逼近——隐—显格式……13

2.6 积分恒等式方法……15

2.7 推广到多维……17

2.8 数值例子……19

§ 3　差分方程的稳定性与收敛性……23

3.1 稳定性……24

3.2 判别稳定性的方法……26

3.3 差分方程解的收敛性……42

*3.4 Lax 等价定理的证明……45

*3.5 差分格式的应用……47

§ 4　守恒型方程的差分方程……49

4.1 变系数抛物型方程的差分格式……49

4.2 能量估计……53

4.3 非线性方程的差分方法……56

§ 5 二维交替方向法…………………………………………
5.1 P—R 格 式 ………………………………………… 59
5.2 可裂格式………………………………………… 61
5.3 预校格式………………………………………… 63
5.4 局部一维格式………………………………………… 65
*§ 6 稳定性和冯·诺依曼条件的进一步分析……… 67
6.1 稳定性与适定性………………………………………… 67
6.2 冯·诺依曼条件………………………………………… 68
6.3 方程$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的各种差分逼近………… 80
习 题………………………………………… 82
第二章 双曲型方程的有限差分方法…………………… 86
§ 1 基本知识………………………………………… 86
1.1 双曲型方程的特征………………………………………… 8
1.2 实例分析………………………………………… 90
§ 2 线性双曲型方程的差分方法…………………… 91
2.1 一阶线性双曲型方程的差分方法……………… 91
2.2 二阶线性双曲型方程的差分方法……………… 99
2.3 定解条件的处理……………………………………104
2.4 线性双曲型微分方程组的差分方法……………107
§ 3 拟线性双曲型方程组的差分方法……………113
3.1 特征线方法……………………………………115
3.2 特征差分格式……………………………………122
3.3 稳定性、收敛性分析……………………………123
§ 4 守恒型方程的有限差分方法……………………126
4.1 守恒型方程（组）的广义解……………………128
4.2 守恒型方程的差分方法……………………131

*§ 5　守恒型方程的差分格式的收敛性……………143
习　题……………………………………………………146
第三章　椭圆型方程的有限差分方法……………149
§ 1　泊松方程的有限差分方法…………………………149
1.1　五点格式……………………………………………150
1.2　九点差分格式………………………………………152
1.3　极坐标形式下的差分格式…………………………154
§ 2　边界条件的处理……………………………………156
2.1　矩形区域……………………………………………156
2.2　一般区域……………………………………………157
*§ 3　差分方程解的存在唯一性、收敛性和误差
估计……………………………………………………161
3.1　极值定理……………………………………………162
3.2　五点差分格式的收敛性……………………………167
习　题……………………………………………………169

第二篇　有限单元法

第一章　变分原理…………………………………171
§ 1　初等变分思想………………………………………174
1.1　多元函数极值………………………………………174
1.2　常微分方程二点边值问题的变分原理……………176
§ 2　变分原理与广义解…………………………………180
2.1　最小势能原理………………………………………180
2.2　虚功原理……………………………………………184
2.3　最小势能原理与虚功原理的等价性………………188
2.4　泊松方程第一、第三边值问题算子$-\Delta$正

定性的证明……………………………………189
§ 3　古典变分方法……………………………………194
3.1 古典里兹算法和伽勒金算法……………………194
3.2 古典 R—G 法的理论意义…………………………200
§ 4　索伯列夫空间介绍及简单性质…………………204
4.1 广义导数……………………………………………205
4.2 索伯列夫空间$H_1[a,b]$…………………………209
习　题……………………………………………………214
第二章　有限单元法…………………………………219
§ 1　常微分方程边值问题的有限单元法……………219
1.1 有限元方程的形成…………………………………219
1.2 有限元方程性质……………………………………227
1.3 实例分析……………………………………………229
§ 2　解二维问题的三角形元…………………………235
2.1 有限元方程的形成…………………………………235
2.2 实例分析……………………………………………247
§ 3　高次元………………………………………………254
3.1 一维的二次元、三次元……………………………256
3.2 二维的矩形元………………………………………268
3.3 任意四边形剖分与等参数变换……………………271
§ 4　有限元方程的有效解法…………………………278
4.1 定带宽消元法………………………………………278
4.2 变带宽消元法………………………………………281
4.3 波阵法………………………………………………282
4.4 多重网格迭代法……………………………………284
§ 5　一维线性元的误差估计…………………………289
§ 6　提高有限元解的精度的讨论……………………295

6.1 迭代——校正法……296
6.2 超收敛……298
§ 7 有限单元法在解特征值问题上的应用……305
7.1 两点边值的特征值问题的变分原理……305
7.2 解特征值问题的有限单元法……307
7.3 加速特征值及特征向量收敛速度的讨论……313
习 题……317
*第三章 有限元方法理论基础介绍……320
§ 1 预备知识……320
1.1 一些基本定义……320
1.2 线性算子与线性泛函……321
1.3 最佳逼近概念……323
1.4 直交投影与黎兹表现定理……324
1.5 索伯列夫空间的一些性质……327
§ 2 适定性……333
2.1 适定性问题的讨论……333
2.2 广义解的可微性……336
§ 3 有限元解的收敛性及误差估计……338
3.1 收敛性……339
3.2 L_2模估计……340
习 题……342
附录……343
参考文献……348

第一篇　有限差分方法

第一章　抛物型方程的有限差分方法

考虑最简单的抛物型方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad (a>0,\ (x,t)\in D) \quad (1)$$

其中 D 是 (x,t) 平面内的给定区域，可以是有界区域，也可以是无界区域。L 是微分算子。

方程(1)的定解问题根据定解条件可分成以下几种类型：

1. 初值问题(柯西 Cauchy 问题)：

在区域 $D=\{(x,t)\mid -\infty<x<+\infty,\ t>0\}$ 内求方程(1)满足初始条件

$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad (2)$$

的解。

2. 第一类边值问题：

在区域 $D=\{(x,t)\mid 0<x<1,\ 0<t<T\}$ 内求方程(1)满足初始条件

$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \qquad (3)$$

和第一类边界条件

$$\begin{cases} u(0,t)=\mu_1(t) \\ u=(1,t)=\mu_2(t) \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant T) \qquad (4)$$

的解 $u(x,t)$。

如果把第一类边值问题中的第一类边界条件换成第二类

或第三类，则是第二类边值问题或第三类边值问题。边值问题也称**初边值混合问题**。

第二类边界条件是

$$\begin{cases} u_x(0,t)=\beta_1(t) \\ u_x(1,t)=\beta_2(t) \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant T) \tag{5}$$

第三类边界条件是

$$\begin{cases} (u-\alpha_1(t)u_x)|_{x=0}=r_1(t) & (0\leqslant t\leqslant T) \\ (u-\alpha_2(t)u_x)|_{x=1}=r_2(t) & (\alpha_i\geqslant 0, i=1,2) \end{cases} \tag{6}$$

在这一章，以第一类边值问题为模型引入有限差分法的有关概念和理论。为了研究问题方便，在此先介绍一些有关知识。

用平行直线族

$$\begin{cases} x_j=jh \\ t_k=k\tau \end{cases} \quad (j,k=0,1,2,\cdots)$$

把区域D剖分成许多个小矩形，称此小矩形为**网格**，其相应方法通常称为**矩形剖分**。网格的顶点(x_j,t_k)称为**节点**（或网点），记作$(x_j,t_k)=(j,k)$，其中h和τ是正常数，分别称为**空间步长**和**时间步长**。位于区域内的节点叫**内节点**，内节点的全体用D_h表示。位于边界上的节点叫**界点**。显然，对第一类边值问题来说，有

$$j=0,1,\cdots,N \qquad N=[1/h]$$

$$k=0,1,\cdots,L \qquad L=[T/\tau]$$

其次，引入一些常用的算符：

一阶向前差商：

$$\frac{\Delta u(x_j)}{h}=\frac{u(x_{j+1})-u(x_j)}{h}=[u']_j+O(h) \tag{7}$$

一阶向后差商：

$$\frac{\nabla u(x_j)}{h}=\frac{u(x_j)-u(x_{j-1})}{h}=[u']_j+O(h) \tag{8}$$

一阶中心差商：

$$\frac{\delta u(x_j)}{2h}=\frac{u(x_{j+1})-u(x_{j-1})}{2h}=[u']_j+O(h^2) \tag{9}$$

二阶中心差商：

$$\frac{\delta^2 u(x_j)}{h^2}=\frac{u(x_{j+1})-2u(x_j)+u(x_{j-1})}{h^2}$$

$$=[u'']_j+O(h^2) \tag{10}$$

其中[ ]$_j$表示括号内的函数在x_j点的值。可利用泰勒(Taylor)展开证明上述各等式成立。下面仅证明二阶中心差商。

把$u(x_{j+1})$和$u(x_{j-1})$在点x_j处作泰勒展开，得

$$u(x_{j+1})=u(x_j)+hu'(x_j)+\frac{h^2}{2}u''(x_j)+\frac{h^3}{3!}u'''(x_j)+\frac{h^4}{4!}\left[\frac{d^4u}{dx^4}\right]_j+\cdots$$

$$u(x_{j-1})=u(x_j)-hu'(x_j)+\frac{h^2}{2}u''(x_j)-\frac{h^3}{3!}u'''(x_j)+\frac{h^4}{4!}\left[\frac{d^4u}{dx^4}\right]_j+\cdots$$

从而得到

$$\frac{1}{h^2}[u(x_{j+1})-2u(x_j)+u(x_{j-1})]=[u'']_j+\frac{h^2}{12}\left[\frac{d^4u}{dx^4}\right]_j+O(h^4)=[u'']_j+O(h^2)$$

(7)，(8)，(9)，(10)也可以用到多元函数，如

$$\frac{u(x_{j+1},t_k)-2u(x_j,t_k)+u(x_{j-1},t_k)}{h^2}=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_j^k+O(h^2)$$

各式的精度是不一致的。中心差商是h的二阶精度，其它是

一阶精度。

§1 差分方法的基本概念

在平面区域$D=\{(x,t)\mid 0<x<1,0<t\leqslant T\}$内求如下定解问题

$$(a)\begin{cases} Lu\equiv \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & ((x,t)\in D,a>0) \quad (1.1)\\ u(x,0)=\varphi(x) & (0\leqslant x\leqslant 1) \quad (1.2)\\ u(0,t)=u(1,t)=0 & (0<t\leqslant T) \quad (1.3)\end{cases}$$

把求解区域D进行矩形剖分，取$(j,k)\in D_h$，于节点(j,k)处用差商代替微商，得

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^k=\frac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)}{\tau}+O(\tau) \tag{1.4}$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_j^k=\frac{u(x_{j+1},t_k)-2u(x_j,t_k)+u(x_{j-1},t_k)}{h^2}+O(h^2) \tag{1.5}$$

这样，微分算子L在节点处的状态可写成

$$\frac{1}{\tau}[u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)]-\frac{a^2}{h^2}[u(x_{j+1},t_k)$$
$$-2u(x_j,t_k)+u(x_{j-1},t_k)]=[Lu]_j^k+O(\tau+h^2) \tag{1.6}$$

其中$O(\tau+h^2)=O(\tau)+O(h^2)$。将定义在一个区域上的微分算子转化为在节点的状态，这种方法叫做**离散化**。引入差分算子$L_h[u]_j^k$，

$$L_h[u]_j^k=\frac{1}{\tau}[u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)]-\frac{a^2}{h^2}[u(x_{j+1},t_k)$$
$$-2u(x_j,t_k)+u(x_{j-1},t_k)] \tag{1.7}$$

由于有 $$L_h[u]_j^k-[Lu]_j^k=O(\tau+h^2) \tag{1.8}$$

当 $u(x,t)$ 是方程(1.1)的解时，$O(\tau+h^2)$ 表示用差分算子 L_h 代替微分算子 L 时的误差，这种误差称为**截断误差**。记作：

$$R_h[u]_j^k = O(\tau+h^2) \tag{1.9}$$

要注意截断误差能反映出用差分算子代替微分算子的精度。(1.9)对 τ 具有一阶精度，对 h 具有二阶精度。

当 $u(x,t)$ 是(1.1)的解时，在节点 (j,k) 处有近似方程

$$L_h[u]_j^k = \frac{1}{\tau}[u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)]-\frac{a^2}{h^2}[u(x_{j+1},t_k)$$
$$-2u(x_j,t_k)+u(x_{j-1},t_k)]=0 \tag{1.10}$$

或 $$\frac{1}{\tau}[u_j^{k+1}-u_j^k]-\frac{a^2}{h^2}[u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k]=0 \tag{1.11}$$

引入网格比 $r=\frac{a^2\tau}{h^2}$，则(1.10)，(1.11)可写成

$$u_j^{k+1}=u_j^k+r[u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k]$$
$$(j=1,2,\cdots,N-1,k=0,1,2,\cdots L-1) \tag{1.12}$$

(1.10)，(1.11)，(1.12)式都称为方程(1.1)的**差分方程**，亦称**差分格式**。

结合定解条件，可得到

$$(b)\begin{cases} u_j^{k+1}=u_j^k+r[a_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k] \\ u_j^0=\varphi(x_j) \\ u_0^k=u_N^k=0 \end{cases} \quad \begin{matrix}(j=1,2,\cdots,N-1; \\ k=0,1,2,\cdots,L-1)\end{matrix}$$

由(b)可以逐层求得差分解 u_j^k，它是定解问题(a)的解 $u(x,t)$ 在各节点上的近似值。此种可直接逐层、逐点计算出来的格式，称为**显格式**，故(1.10)～(1.12)式通常亦称**古典显格式**。

其节点图式如图 1 - 1 所示，故也称**双层四点格式**。

在这里，还须说明(b)的解是(a)的解在节点上的近似值所应具备的条件。首先要求差分方程应该是微分方程的一种近似，即差分算子L_h必须在某种意义下逼近微分算子 L，这是相容性要研究的问题。

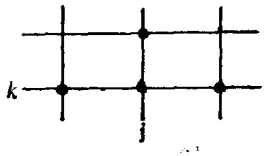

图 1－1

其次，既使差分算子与微分算子是相容的，是否可以认为u_j^k是$u(x_j,t_k)$的近似值呢？为此，还需说明二个问题。

第一个问题是由(b)求解时，难以避免误差的出现。如果这种误差在逐层计算中越积累越大，最后也会使差分解失去近似性。这是差分方程稳定性所要研究的问题。为了对此有个直观的认识，下面以古典显格式(1.12)为例，观察稳定性对误差传播的影响。

取 $r=1/2$，由(1.12)计算得

$$u_j^{k+1}=\frac{1}{2}[u_{j+1}^k+u_{j-1}^k]$$

用e_j^k表示计算u_j^k时所产生的误差，即 $e_j^k=\tilde{u}_j^k-u_j^k$，其中$\tilde{u}_j^k$是$u_j^k$的近似值。从

$$\tilde{u}_j^{k+1}=\frac{1}{2}[\tilde{u}_{j+1}^k+\tilde{u}_{j-1}^k]$$

得到误差e_j^k所满足的方程为

$$e_j^{k+1}=\frac{1}{2}[e_{j+1}^k+e_{j-1}^k] \tag{1.13}$$

假设在 $k-1$ 层之前无误差存在，而在第 k 层的点(j_0,k)处产生误差$e_{j_0}^k=\varepsilon$，且这一层的其它点也无误差，及在计算过程中不再产生新的误差。利用(1.13)算出误差ε的传播情

况如表1-1所示。

表1-1 $r=1/2$时古典显格式的误差传播情况

k \ j	j_0-4	j_0-3	j_0-2	j_0-1	j_0	j_0+1	j_0+2	j_0+3	j_0+4
k					ε				
k+1				0.5ε	0	0.5ε			
k+2			0.25ε	0	0.5ε	0	0.25ε		
k+3		0.125ε	0	0.375ε	0	0.375ε	0	0.125ε	
k+4	0.0625ε	0	0.25ε	0	0.375ε	0	0.25ε	0	0.0625ε

从表中看出：误差随层数增加而逐渐衰减。因此，我们可认为古典显格式在$r=1/2$时是稳定的。

同样情况下，当$r=1$时，其误差满足

$$e_j^{k+1}=e_{j-1}^k-e_j^k+e_{j+1}^k$$

利用此误差公式算出的误差ε传播情况如表1-2。

表1-2 $r=1$误差传播的情况

k \ j	j_0-4	j_0-3	j_0-2	j_0-1	j_0	j_0+1	j_0+2	j_0+3	j_0+4
k					ε				
k+1				ε	−ε	ε			
k+2			ε	0	ε	0	ε		
k+3		ε	−ε	2ε	−ε	2ε	−ε	ε	
k+4	ε	−2ε	2ε	−4ε	3ε	−4ε	2ε	−2ε	ε

此时误差将逐层增加，随层数增加积累越来越大。显然，计算结果已无意义。故古典显格式在$r=1$时，既不稳定也无应用价值。由此可见，差分方程的稳定性的讨论是非常重要的。

第二个为收敛性问题，如果u_j^k是$u(x_j,t_k)$的近似值，那

么，当 $\tau\to 0$ 及 $h\to 0$ 时，u_j^k 在一定的意义下应以(a)的解为极限。收敛性的讨论又与估计误差 $u_j^k-u(x_j,t_k)$ 有关。

综上所述，差分方法的出发点可归纳为：把求解区域进行剖分，在节点上建立等价模型，再把它们联系起来作为线性方程组进行计算。其基本思想是用满足边界条件的函数去逼近微分方程的解。

§2 差分格式的建立

2.1 古典显格式

考虑模型问题

$$\begin{cases} Lu\equiv\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & (x,t)\in D,\ a>0 \qquad (2.1)\\ u(x,0)=\varphi(x) & 0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (2.2)\\ u(0,t)=u(1,t)=0 & 0<t\leqslant T \qquad (2.3)\end{cases}$$

对 § 1 中已经建立起来的古典显格式

$$u_j^{k+1}=u_j^k+r[u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k] \tag{2.4}$$

若引入向量 $\mathbf{u}^k=(u_1^k,\ u_2^k,\ \cdots,\ u_{N-1}^k)^T$，就可以把古典显格式写成矩阵形式：

$$\mathbf{u}^{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{u}^k \tag{2.5}$$

或

$$\mathbf{u}^{k+1}=[(1-2r)\mathbf{I}+r\mathbf{C}]\mathbf{u}^k \tag{2.6}$$

其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & r\\ & & & r & 1-2r\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & & & 1\\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\mathbf{I}$ 为 $n-1$ 阶单位矩阵，$\mathbf{u}^k=(u_1^k,\ u_2^k,\ \cdots,\ u_{N-1}^k)^T$。