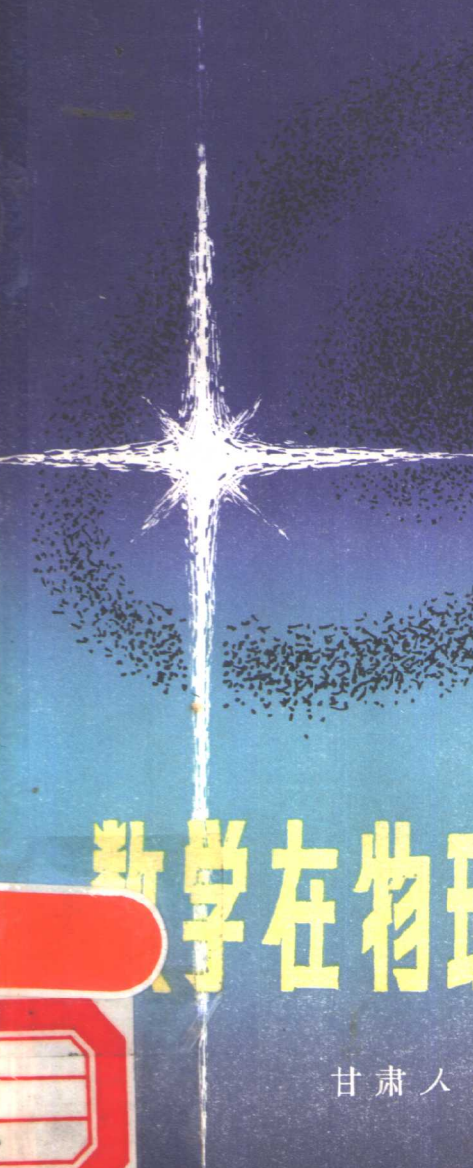


中学课外读物



数学在物理中的应用

甘肃人民出版社

中学课外读物

数学在物理中的应用

王福庭 马庆忠 编

中学课外读物
数学在物理中的应用

王福庭 马庆忠 编

甘肃人民出版社出版

(兰州庆阳路230号)

甘肃省新华书店发行 兰州新华印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张: 11.25 字数: 239,000

1982年1月第1版 1982年1月第1次印刷

印数1—11,450

书号:13095·69 定价: 0.85元

前 言

数学是一切科学的基础，而物理学则是以实验为基础的科学，为了使同志们更好地了解它们之间的关系，我们根据中学生的实际情况，联系中学物理及数学教学中的体会，汇编了这方面的有关资料，介绍数学在物理中的应用。

全书按数学分类编为十四部分，在每一部分中首先讲述了有关数学的基本概念；然后以物理教学中的传统题、历届高考题、各地竞赛题作为例题，介绍了解答物理问题的一般思路和常用的解题技巧及方法；并附有习题及其解答，可供中学生和数理爱好者学习时参考。

本书的编写目的是为中学生数理知识的融会贯通、综合应用提供点资料。在编法上仅是个初步的探讨，缺点错误在所难免，恳切希望读者批评指正。

编 者

1980年12月于北京第十四中学

ABD 90/03

目 录

绪 论	(1)
比例部分	(10)
习题一	(24)
有效数字的选取	(30)
习题二	(35)
百分数部分	(36)
习题三	(44)
方程部分	(48)
习题四	(75)
极值部分	(84)
习题五	(90)
指数和对数部分	(93)
习题六	(109)
函数与函数图象部分	(114)
习题七	(123)
不等式部分	(126)
习题八	(138)
复数部分	(140)
习题九	(150)
三角部分	(151)
习题十	(158)

几何部分.....	(162)
习题十一.....	(182)
平面解析几何部分.....	(184)
习题十二.....	(200)
微积分初步知识部分.....	(201)
习题十三.....	(221)
逻辑代数部分.....	(225)
习题十四.....	(238)

习 题 解 答

习题一	(239)
习题二	(251)
习题三	(253)
习题四	(259)
习题五	(287)
习题六	(298)
习题七	(308)
习题八	(310)
习题九	(315)
习题十	(316)
习题十一	(330)
习题十二	(332)
习题十三	(335)
习题十四	(344)
附 录	(346)
附 表 1—7	(348)

绪 论

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学，而物理学是研究物质的最普通的运动形式和物质基本结构的一门基础科学，这两门科学都是探索和研究自然界的有关规律，它们之间有着紧密的联系。

在中学里，常用所学过的数学定理、公式来解答物理习题；或用某些物理学原理来阐明抽象的数学概念，并用来解答数学习题等等。因此，在学习物理时，应该探索数学与物理之间的联系规律，正确地运用数学知识，研究解答有关物理问题。

一、综合应用数理知识应注意的问题

(1) 要真正理解物理概念

深入理解基本概念，是学习物理的根本问题，研究和解答物理问题，首先必须明确其物理过程及其物理实质。例如在学习加速度这一个概念时，从量值上来说，加速度等于“速度的变化与发生这个变化所用的时间之比”；另一方面，加速度是描述速度变化的快慢和方向的物理量，它是一个矢量。当物体的加速度方向与初速度的方向相同时，即或是加速度小，也只是表明速度的增加量小；但是，物体的速度还是越来越大；当加速度的方向与速度的方向相反时，速度才会

越来越小，但决不能错误的认为加速度大的物体运动速度也大，加速度小的物体运动速度也小。

(2) 学会推导物理公式

学习中学物理时，要用一些定理、定律和公式。中学物理教科书中的有关物理公式，大部分都用某些物理学原理和数学方法作了推导，但在学习时，还应注意以下两点：

(a) 通过对公式推导的学习，促进对公式的理解和记忆。

例如在学习曲线运动这一章时，先掌握两个概念：即角速度就是“在匀速圆周运动中，连接运动质点和圆心的半径转过的角度跟所用时间的比值，叫做匀速圆周运动的角速度”。线速度就是“质点做匀速圆周运动时，它通过的弧长跟所用的时间之比是个定值”。根据这两个定义可以推导出有关公式。

线速度公式：
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

角速度公式：
$$\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}.$$
角速度的单位是由角度的单

位和时间的单位决定的。取角度用弧度作单位，时间用秒作单位，则角速度的单位是“弧度/秒”。如果质点做匀速圆周运动时的周期是 T (秒)(或每秒为 n 转)则在时间 T 里半径转过的角度是 2π (弧度)，则

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n \dots\dots\dots ①$$

根据线速度定义：在时间 Δt 内，如果做匀速圆周运动的质点通过的弧长是 Δs ，半径 r 转过的角度是 $\Delta \phi$ (弧度)，

由于 $\Delta s = r \cdot \Delta \phi,$
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

$$\therefore v = r \cdot \omega = 2 \pi r n \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

关于向心力的公式，还是属于牛顿第二定律公式

$$F = ma$$

由于向心加速度 $a = \frac{v^2}{r}$ ，代入 $F = ma$ 中，

$$\text{即向心力 } F = m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{m(\omega r)^2}{r} = m\omega^2 r.$$

这样记忆公式，既能从概念出发理解和掌握公式实质，又克服了死记硬背公式结论的现象。

(b) 根据物理题目的量与量之间的关系，结合有关原理、定律推导出解物理题的公式。

这种解物理题的方法，是解答物理习题时常用的一种方法，举例如下：

例1 在空气里称得软木块的重量 $G_1 = 15$ 克，铅块的重量 $G_2 = 113$ 克，（铅的比重 $\gamma_2 = 11.3$ 克/厘米³），当两块捆在一起浸入煤油里时（煤油的比重 $\gamma_3 = 0.8$ 克/厘米³），称得的重量 $G_4 = 60$ 克。求软木块的比重 γ_1 。

已知：软木块重 $G_1 = 15$ 克，铅块重 $G_2 = 113$ 克，铅的比重 $\gamma_2 = 11.3$ 克/（厘米）³，煤油比重 $\gamma_3 = 0.8$ 克/（厘米）³，软木块和铅块捆在一起在煤油中称得的重量 $G_4 = 60$ 克。

求：软木块的比重 γ_1 。

解：设 V_1 表示软木块体积， V 表示软木块和铅块的总体积， V_2 表示铅块体积， G_3 表示软木块和铅块排开液体的重量，则有以下解题关系。

一、 分析	这题是根据阿基米德定律，测定比煤油轻又不溶于煤油的软木块的比重。
二、 列算式	根据比重定义，设 V_1 表示软木块的体积，则有： $\gamma_1 = \frac{G_1}{V_1}.$
三、 求 V_1 的方法	软木块的体积，等于软木块和铅块所排开煤油的总体积减去铅块的体积，即：$V_1 = V - V_2$， 其中 V 表示软木块和铅块所排开煤油的总体积，V_2 表示铅块的体积。
四、 求 V 和 V_2	铅块的体积为 $V_2 = \frac{G_2}{\gamma_2}$，根据阿基米德定律，浸没在液体里的固体的体积等于固体所排开液体的重量与液体比重的比值，即 $V = \frac{G_3}{\gamma_3}$，G_3 表示软木块和铅块所排开的液体的重量。
五、 求 G_3 和 V	根据阿基米德定律，固体所排开液体的重量等于固体在空气中称得的重量减去在液体中称得的重量，即： $G_3 = G_1 + G_2 - G_4.$ 由此可知：$V = \frac{G_1 + G_2 - G_4}{\gamma_3}.$

总结以上公式推导过程为：

$$\gamma_1 = \frac{G_1}{V_1} \rightarrow V_1 = V - V_2 \quad \begin{cases} \rightarrow V_2 = \frac{G_2}{\gamma_2}, \\ \rightarrow V = \frac{G_3}{\gamma_3} \rightarrow G_3 = G_1 + G_2 - G_4. \end{cases}$$

用逐步代入的方法，可列出总式：

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{G_1}{V_1} = \frac{G_1}{V - V_2} = \frac{G_1}{\frac{G_3}{\gamma_3} - \frac{G_2}{\gamma_2}} \\ &= \frac{G_1}{\frac{G_1 + G_2 - G_4}{\gamma_3} - \frac{G_2}{\gamma_2}} \\ &= \frac{G_1 \gamma_2 \gamma_3}{\gamma_2 (G_1 + G_2 - G_4) - \gamma_3 G_2}.\end{aligned}$$

代入已知数字计算：

$$\begin{aligned}\therefore \gamma_1 &= \frac{G_1 \gamma_2 \gamma_3}{\gamma_2 (G_1 + G_2 - G_4) - \gamma_3 G_2} \\ &= \frac{15 \times 11.3 \times 0.8}{11.3 \times (15 + 113 - 60) - 0.8 \times 113} \\ &= 0.2 (\text{克/厘米}^3).\end{aligned}$$

答：比重为0.2克/厘米³。

从上题计算过程中，可以看到用这种方法解物理题时，思路清楚，步骤简单，不用死套公式，是解物理题的一种常用方法。

(3) 以物理题目中量与量的实际关系为依据，结合数学的计算方法解答物理题。

学习物理时，有很多题目要进行计算，如果数学基础不好，计算起来既有困难，计算的结果也不正确，所以数学学的不好，就影响学好物理；但是，物理题目的计算又有其自己的特点，不能拿它当成纯数学来对待，而是要根据题目中量与量的实际关系，找出解题所要运用的定律、原理或公式，从中找出已知量与未知量的关系，用有关的公式进行计

算。并要根据情况，判断所求的答案是否合理。

例2 铜量热器的质量为50克，器内盛有 0°C 的冰50克，现将一个重50克、温度为 100°C 的铁块投入器内，求混合后的温度。（已知铜的比热为 $0.09\text{卡/克}\cdot^{\circ}\text{C}$ ，铁的比热为 $0.11\text{卡/克}\cdot^{\circ}\text{C}$ ，冰的熔解热为 80卡/克 ）。

现将这个题目的两种解法比较如下：

正 确 解 法	错 误 解 法
根据物理中热学知识有： (1)铁块冷却到0°C时，放出的热量： $Q_1 = 50 \times 0.11 \times (100 - 0) = 550(\text{卡}).$ (2)冰全部熔解所需的热量： $Q_2 = 50 \times 80 = 4000(\text{卡}).$ 比较Q_1，Q_2可以看出$Q_2 > Q_1$，铁块放出的热量不能使冰全部熔解，因而最后温度为0°C。 (3)铁块放出的热可熔解冰的质量为： $m = \frac{550}{80} \approx 6.9(\text{克}).$ 从计算过程看，题目中吸热和放热的关系以及冰熔解的数量等，都需要进行分析，不能不加分析而直接用热平衡方程的计算方法求解。	根据热平衡方程： $Q_{\text{吸}} = Q_{\text{放}},$ 即 $m_{\text{量热器}} \cdot c_{\text{铜}} \cdot (t_{\text{混合}} - t_0) + m_{\text{冰}} \lambda_{\text{冰}} + m_{\text{冰}} c_{\text{冰}} (t_{\text{混合}} - t_0) = m_{\text{铁}} c_{\text{铁}} (t_{100} - t_{\text{混合}})$ 所以 $50 \times 0.09 \times (t - 0) + 50 \times 80 + 50 \times 1 \times (t - 0) = 50 \times 0.11 \times (100 - t).$ 解得 $t = -57.5^{\circ}\text{C}.$ 显然，这个答案与实际情况不符，这主要是由于冰不可能全部熔解，而现在把它当成了能够全部熔解，所以求出的答案是错误的。错误的原因是只用数学计算的方法解题，忽视了对题目中量与量的实际关系的分析，得出了错误的结论。

因此，只要熟悉了公式的物理意义，掌握了题目中量与量的实际关系以及概念、定律的本质后，用数学方法来计算物理题，在一般的情况下，还是比较方便的。

二、解物理题常用的 几种数学计算方法

数学是学习物理学的工具，尤其是在解物理题时，要用到多方面的数学知识。在中学里，概括起来常用的几种数学计算方法有：

(1) 算术法 包括：百分数部分、比例部分。这种方法是根据对习题的分析，把习题分解成它的组成部分，逐个地计算，可以加深对物理概念、物理量间的关系的理解。

(2) 代数法 包括有：方程部分、指数与对数部分、极值部分、不等式部分、逻辑代数部分等，是中学物理中常用的方法。这是运用代数中的基本公式、定理、恒等变换、解方程等知识来分析物理现象，推导公式和解答物理题。

(3) 三角法 是解物理中矢量的合成与分解等问题最重要的一种方法。在解题时，一般是作出有关的图形（如三角形、平行四边形等），运用三角函数、三角公式、解三角形等方面的知识来计算物理题。

(4) 几何法 是利用几何的图形来解答物理题。用有关几何中的体积面积等计算公式来求出物理题的正确答案，用几何图形分析物理题不仅直观，而且利于疏通解题思路，是辅助人们正确、迅速分析物理题进一步理解物理问题的一种好

方法。

(5)解析几何法 在解析几何里,是把一个图形看成是由点构成的,在建立了平面坐标系以后,则图形的几何性质可以表示为这些点的坐标之间的关系,特别是代数关系,利用这些性质解物理题较为方便。

(6)微积分法微积分是研究函数的导数、积分的性质及其应用的。一般来说,求曲线在一点的切线斜率、运动物体在某一时刻的瞬时速度等问题,常用导数计算;求曲线的弧长、图形的面积和体积等,常用积分计算。因此可以利用微分和积分这些性质来解物理题。

这里应该注意的是:有时物理中的一个问题,可以分别用几种不同的数学计算方法解决,而不是孤立的用一种方法。而有时只在求某个问题时,才运用某一种数学方法,例如只有当讨论的问题需要有极大、极小值时,才能用极值的方法。

数学知识在物理中的应用十分重要,但切忌只从数学角度来对待物理问题,对物理概念及其定律一定要注意其物理意义和它的实用范围。

三、解题的一般步骤

对学生来说,解题是课堂练习、课外作业和对所学知识考查的一个主要形式,更是巩固和深化、检验和运用所掌握的基础知识、训练基本技能的实践过程。

要正确的解好题,必须做到:

(1)明确解题目的

解题是为了复习和检验基础知识和基本技能，牢固掌握知识和培养解决处理实际问题的能力，绝不是为了应付作业，凑对答数就一了了之。所以每解一题，应明了围绕此题需要掌握的基本概念、定律和所用的基本方法。

(2) 仔细的审题

通过审题确定研究对象，分析已知条件和明确解题要求。

(3) 认真的分析

根据物理现象，抓住物理实质，绘制草图，利用学过的基础知识，分析已知条件和未知量间的关系，确定解题方法和步骤。

(4) 简明、准确地解答

根据构思确定的解题步骤，按照解题的逻辑要求，正确灵活地运用已掌握的知识选择最好的解答方法，简明扼要的写下解答过程。

(5) 验证答案

利用所掌握的各量之间的关系联系实际，有的放矢地检验答案的正确性。

一般来说，通过这几个步骤，可以较好地完成解题的整个过程，以达到深刻理解基础知识，提高解决问题的实际能力。

比 例 部 分

比和比例是数学中的一个重要课题。在中学物理中，常常要用到比和比例来描述物理概念和物理定律在量方面的关系，并广泛地用来计算和解答物理习题。

在物理学中，有的量与量之间存在着比例关系；也有的量与量之间不存在着比例关系。有的时候物理公式中的比例常数不仅有着和数学中的共同规律，而且还有其本身的物理意义。因此，在把中学数学知识应用到物理中时，还应该注意不能机械地仅从物理公式来说明它们的比例关系，而应该着重于从公式中各物理量的意义上来判断它们是否成比例关系。

总之，在运用比和比例关系来解答物理习题时，一定要从分析题意入手，判断清楚量与量之间是否存在比例关系，存在什么样的比例关系？然后再正确地列出比例式来求解。这样才可避免产生概念方面的错误。

一、有关比和比例的数学知识

(1) 什么叫比？

比较两个同类量 a 和 b 间的关系时，如果以 b 为单位来度量 a ，称为 a 比 b ，符号“ $:$ ”是比号，在比号前面的数叫做比的前项；在比号后面的数叫做比的后项。上述关系可

写成:

$$a:b=k, \quad \text{或} \quad \frac{a}{b}=k.$$

(2) 比的基本性质是什么?

比的前项和后项都扩大或者都缩小同样的倍数, 比值不变, 用式子表示, 就是:

$$a:b=am:bm=\frac{a}{n}:\frac{b}{n} \quad (m \neq 0, n \neq 0).$$

(3) 比例的意义是什么?

如果 $a:b$ 和 $c:d$ 相等, 则 $a:b=c:d$ 就是一个比例; 这时就说 a 、 b 、 c 、 d 是成比例的数. a 和 d 是外项, b 和 c 是内项.

(4) 比例的基本性质

在任何比例里, 两个外项的积等于两个内项的积. 就是若 $a:b=c:d$, 则 $ad=bc$.

(5) 正比例函数和它的图象

两种相互有关的量, 如果一种量扩大(或者缩小)若干倍, 另一种量也扩大(或者缩小)同样的倍数, 则这两种量即成正比例关系.

于是有 $y \propto x$ (指 y 和 x 成正比)

写成等式 $y=kx$

按正比例函数定义则有: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} = k.$

函数 $y=kx$ (k 是一个不等于零的常数)叫做正比例函数, 常量 k 叫做变量 y 和 x 之间的比例系数.

一般地, 正比例函数 $y=kx$ (k 是一个不等于零的常数)