数字信号处理丛书　何振亚　主编

数字信号处理丛书

# 信号处理的数学方法

柳重堪　编著

东南大学出版社

# 信号处理的数学方法

东 南 大 学 出 版 社

(苏)新登字第012号

## 内 容 简 介

本书介绍信号处理的数学理论和方法。包括信号的分类和表示法，泛函分析初步，最小二乘法的理论、算法和应用，信号的最佳近似理论，多维信号处理的数学方法及信号处理中的一些非线性问题。既包含了经典内容，又介绍了一些最新发展的内容，例如子波变换人工神经网络，电阻抗层析成象等。

本书可供信号处理领域和应用数学专业的科技人员、大学高年级学生和研究生参考。

责任编辑：朱经邦
责任校对：陈　跃

信号处理的数学方法
柳重堪　编著

东南大学出版社出版
南京四牌楼2号
江苏省新华书店发行　江苏省大丰县印刷二厂印刷
开本850×1168毫米　1/32　印张13.125　字数363(千字)
1992年2月第1版　1992年2月第1次印刷
印数：1—1,500册

ISBN 7—81023-537-0

TN·50　　定价：4.05元

# 序

信息科学是研究各种信号与信息的产生、获取、传输、变换、加工处理、分类识别、存贮及利用等内容的一门科学，其重要性将随着工业、农业、国防和科学技术的发展而与日俱增。信号与信息处理学科是信息科学的重要组成部分，它的基础理论和方法已经广泛应用于雷达、声纳、数据通信、语言通信、图象通信、图象处理、计算机图形学、自动识别、自动控制、机器视觉、人工智能、生物医学、振动工程、宇航工程、遥感技术、地质勘探以及波谱学等几乎一切技术领域。该学科水平的高低，可反映一个国家的整体科技水平，故世界各国都非常重视此学科的课题研究和人才培养。我国也专门设立了信号与信息处理学科(专业)来培养硕士、博士研究生；每年在国内外学术会议和刊物上发表的论文甚多，包括一维和多维的信号与系统参数估计，离散变换及其快速算法，数字滤波和检测，谱估计与建模，自适应信号处理，语声信号处理，图象数字处理与识别，VLSI 信号处理等分支学科。

为了反映该学科迅速发展的面貌和世界各国近年来所取得的最新研究成果，特组织国内外专家教授撰写成本丛书，其中有些内容在国内同类书刊中还是首次发表。丛书共含六本专著：

- 信号处理的数学方法（柳重堪教授）
- 离散变换及快速算法（钱惠生教授）
- 信号复原与重建 （王延平教授）
- 现代谱估计 （王宏禹教授）
- 自适应信号处理 （何振亚教授）
- VLSI 阵列处理 （S. Y. Kung 教授）

这套丛书的特点是内容丰富、取材新颖、理论性强、系统性好、阐述严谨、概念清楚，便于阅读，可以作为硕士、博士研究生课程的教材或主要参考书，也可作为科技人员进修的专著，对我国培养高层次人才和推动学科发展将起到重要的作用。

何振亚

1990.9.20 于南京

# 前　言

信号处理是现代科学技术领域中有着广泛应用的技术，其理论和实践都强烈地依赖着数学这一经典的基础学科。本书从数学角度将信号处理中常用的一些数学概念、原理和方法予以归纳性论述，目的是为从事信号处理的工程技术人员提供较好的理论基础和计算工具。

全书共分六章。第一章介绍信号的分类及其表示法，包括各种信号的分类及相应的变换域表示。第二章介绍信号处理中常用的泛函分析概念，包括抽象空间，投影定理，正交变换及信号分解等。第三章介绍最小二乘法及其应用，包括最小二乘法的三种形式，应用举例和最小二乘算法等。第四章介绍信号的最佳近似理论，包括最佳估计，最佳逼近和最佳外推等。第五章介绍多维信号（图象信号）处理中常用的数学方法，包括矩阵分解，降维法，多维变换法、图象形成系统的数学模型和应用举例。第六章介绍信号处理中的一些非线性问题求解方法，包括同态滤波，多元台劳展开及其对非线性状态估计的应用，伏特拉级数展开及其对非线性系统的应用，一些常用的非线性计算方法如不动点原理、牛顿迭代法等。最后还介绍了人工神经网络和电阻抗层析成象的数学原理，它们是信号处理领域中最新发展的内容。按照原来的写作计划，本书还应包括快速算法和抽象代数两部分内容。前者本丛书另有撰写，后者由于受篇幅限制而略去，好在已有较好的参考书（例如文献[37]）可供读者参考。

本书大部分内容曾为北京航空航天大学电子、控制、应用数学、机械、力学等类专业的硕士研究生和博士研究生讲授过。实践表明，从工程技术角度和从数学角度讲授信号处理技术，对教学有着相辅相成、相得益彰的作用。

本书写作过程中，曾得到常迵教授，袁保宗教授和王宏禹教授等学术前辈的鼓励、指导和帮助。特别值得指出的是，作者自始至终得到前辈何振亚教授的全面的热情的关怀和指导，他亲自仔细地审阅了全书初稿，提出了许多宝贵的意见和建议，使作者深受教益。编辑朱经邦同志全面地仔细地进行了文字加工，使本书颇为增色。在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免有错误和不当之处，欢迎读者批评指正。

编　者

于英国曼彻斯特大学

科技学院（UMIST）

1990年10月

## 作 者 简 介

柳重堪(教授)，1941年生于江苏吴江，1962年毕业于山东大学数学系。现为北京航空航天大学应用数学教研室主任。1990年作为名誉访问研究员访问英国曼彻斯特大学科技学院半年。研究方向为应用数学，逼近理论，信号处理和系统理论。已出版的著作有《正交函数及其应用》、《应用泛函分析》等六种，翻译出版书籍五本，已在国内外杂志和会议发表学术论文30多篇。

封面设计：徐晓平

# 目　　录

# 第一章　信号的分类及其表示法

## 1—1　信号频域表示的意义

信号处理的对象是各类物理信号。为了研究信号，首先必须研究各类信号的表示方法。

我们熟知，随时间变化的电压可以用一元函数来表示：

$$v = v(t) \tag{1-1-1}$$

其中 $v$ 是电压，$t$ 是时间变量。进而，如果 $v(t)$ 是周期函数（设周期为 $2\pi$），则在一定条件下它又可表为傅里叶级数：

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1-1-2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \\ b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\sin nt\,\mathrm{d}t,\ n=1,\ 2,\ \cdots \end{aligned}\right\} \tag{1-1-3}$$

为 $v(t)$ 的傅里叶系数。一般地，若已知 $v(t)$，则其傅里叶系数 $a_n$ 和 $b_n$ 可随之算出；反之，若给定 $a_n$ 和 $b_n$，则也可由此确定相应的 $v(t)$。因此，傅里叶系数 $\{a_n, b_n\}$ 也是周期信号 $v(t)$ 的一种表示法。在物理上，$a_n$ 和 $b_n$ 称为周期信号 $v(t)$ 的频谱。式（1-1-2）称为该信号的频域表示。

用傅里叶级数来表示一个周期信号函数，有什么意义呢？概括地说，主要有下列四层含意。

1. 用简单表示复杂

从工程技术观点来说，正余弦函数是最简单的信号函数。例如，在力学中，一个弹簧或一个单摆的简谐运动即可产生正余弦函数；在电学中，由一个电容和一个电感所形成的充放电过程即可产生正余弦电流。根据式（1-1-2）可得到近似算式：

$$v(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

这一近似表达式无论在数值计算或是理论研究时都体现了一种用简单逼近复杂的思想。

2. 正交坐标表示

在三维空间中，一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表为正交投影表达式：

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是两两正交的单位向量；$a_x$，$a_y$，$a_z$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标（或称为投影）。这种正交投影表示是研究向量的基本工具。类似地，在第二章中，我们将指出，函数集合

$$\{1,\ \sin t,\ \cos t,\ \sin 2t,\ \cos 2t,\ \cdots\cdots\} \qquad (1\text{-}1\text{-}5)$$

也构成一组两两"正交"的"正交系"。因此，式（1-1-2）可以看成是"无穷维"空间中的元素〔即函数 $v(t)$〕的正交坐标表达式。它是研究信号函数的基本工具。

3. 能量误差最小的最佳表示

考虑这样一个问题：如果要用正余弦函数系（1-1-5）的前 $2N+1$ 个元素的线性组合

$$f(\alpha_n,\ \beta_n,\ N,\ t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

来近似表示周期为 $2\pi$ 的信号 $v(t)$，使得能量误差为最小，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} [v(t) - f(\alpha_n,\ \beta_n,\ N,\ t)]^2 \, dt = \min \qquad (1\text{-}1\text{-}6)$$

问$\alpha_n = ?$，$\beta_n = ?$。第二章将指出，此时$\alpha_n$和$\beta_n$恰应取为傅里叶系数：$\alpha_n = a_n$，$\beta_n = b_n$，亦即

$$\min_{\alpha_n,\beta_n}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[v(t)-f(\alpha_n,\beta_n,N,t)]^2\,dt\right\}$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[v(t)-f(a_n,\ b_n,\ N,\ t)]^2\,dt$$

因此，周期函数的傅里叶级数表示（或者说周期信号的频域表示）是在能量误差最小的意义下的最佳表示。

4. 信号的频域表示有明显的物理意义，并能显示出信号包含信息的某些规律。

从物理上讲，式（1-1-2）中的$n$相当于频率。大的$n$所对应的$a_n\cos nt$和$b_n\sin nt$表示信号的高频分量，小的$n$对应的是低频分量。一个著名的数学定理（黎曼（Riemann）引理）指出

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \tag{1-1-7}$$

这表明周期信号的各次谐波分量随着频率的增大而减弱。这正是滤波器设计中的一条基本原理。

综上所述，信号函数的频域表示能给人们在研究和处理信号时带来许多方便和有利之处。利用傅里叶展开来表示和分析函数，在数学中称为**调和分析**。

由于各种物理信号的不同的特殊规定性，它们的数学形式也各有不同。现分类简述如下：

**一、连续型变量与离散型变量**

在现实世界中，时间变量$t$是连续地无穷地变化的，也就是说，$t$取遍一切实数：$-\infty<t<\infty$。但是人们对信号$x(t)$实际测量的结果，是信号在离散时间点$k\Delta t$处的采样值$x(k\Delta t)$，其中$\Delta t$为采样间隔，$k=\cdots-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$。因此，就时间变量取值的状况，信号有连续型变量和离散型变量两种类型。前者可用函数表示：

$$x(t), \quad -\infty < t < \infty \tag{1-1-8}$$

后者则用无穷序列来表示

$$\{x_k\}, \ k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots \tag{1-1-9}$$

其中 $x_k = x(k\Delta t)$。

## 二、无限长信号与有限长信号

式（1-1-8）和（1-1-9）表示的信号其自变量 $t$ 和 $k$ 的变化范围都是无限的，故称为无限长信号。然而人们实际处理的信号则是有限长的，即 $0 \leqslant t \leqslant T$ 或 $k=0,1,\cdots,N-1$。离散型有限长信号通常用列向量来表示：$\boldsymbol{x}=[x_0, \ x_1, \ \cdots, \ x_{N-1}]^T$，其中 $T$ 表示向量（或矩阵）的转置。

## 三、周期信号与非周期信号

有的无限长物理信号本身就是周期信号。对于有限长信号 $x(t)$，$0 \leqslant t < T$，有时为了理论上或数学上讨论起来方便，常将其延拓成周期信号：

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), & \text{当 } 0 \leqslant t < T \\ x(t+kT), & \text{当 } t \text{ 在 } [0, T) \text{ 外时，其中} \\ & 0 \leqslant t+kT < T, \ k \text{ 为某一整数} \end{cases}$$

当然也可通过“零延拓”将 $x(t)$ 延拓为非周期无限长信号：

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & \text{当 } 0 \leqslant t < T \\ 0 \quad , & \text{当 } t \text{ 在} [0, \ T) \text{外} \end{cases}$$

对于有限长离散信号（向量）$\boldsymbol{x}=[x_0, \ x_1, \ \cdots, \ x_{N-1}]^T$，常将其周期延拓成无穷周期序列 $x=\{\ \hat{x}_k\ \}$：

$$\hat{x}_k = \begin{cases} x_k \quad , & \text{当 } k=0,1,\cdots,N-1 \\ x_{k+mN}, & \text{当 } k \neq 0,1,\cdots,N-1, \text{ 其中 } k+mN \\ & \text{取值为 } 0,1,\cdots,N-1, \text{ 而 } m \text{ 为某一整数} \end{cases}$$

## 四、一维信号与多维信号

一个一元函数通常表示时间信号，但对于空间信号则需要用

多元函数来表示。例如黑白照片可用二元函数 $f(x, y)$ 来表示，其中 $x$、$y$ 为空间变量，$f(x, y)$ 表示照片在 $(x, y)$ 坐标处的灰度。而黑白电视的灰度则可用 $f(x,y,t)$ 来表示。顺便说一下，彩色电视图象可用三维的向量函数

$$f(x, y, t)\boldsymbol{i}+g(x, y, t)\boldsymbol{j}+h(x, y, t)\boldsymbol{k}$$

来描述，其中 $f$、$g$、$h$ 分别表示在 $(x, y)$ 位置 $t$ 时刻的红、绿、蓝三色的色度。

**五、确定性信号与随机信号**

从信号存在的可能性考虑，信号又分为确定性信号与随机信号两类。大量的实际信号（特别是噪声）是随机信号。通常，人们为了研究方便，往往假定所处理的信号是非随机的即确定性的。但是随着研究的深入，我们必须研究随机信号。伴随于此的，一整套关于概率和随机过程的理论便成为研究随机信号的数学基础和工具。

信号的分类还不止上述列举的这些，通常可按照不同的理论或实际规定性进行分类。对于不同类型的信号，其相应的数学工具（尤其是频域表示）也各不相同。下面予以分类叙述，有的类型（如多维信号）将放在后面的章节中介绍。

## 1—2 连续型时间变量的周期信号

设信号 $x(t)$ 是周期函数，周期为 $T$：

$$x(t+T)=x(t) \tag{1-2-1}$$

相应的频谱表示为

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{1-2-2}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\mathrm{d}t,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$
$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\mathrm{d}t,\ n=1,\ 2,\ \cdots \tag{1-2-3}$$

为 $x(t)$ 的频谱（傅里叶系数）。也可用复傅里叶级数表示：

$$x(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{2\pi jnt/T} \tag{1-2-4}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi jnt/T}\,\mathrm{d}t,$$
$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1-2-5}$$

这时，信号函数 $x(t)$ 可以是复函数。

式(1-2-2)和式(1-2-4)中用符号“$\sim$”而不用等号“=”，是因为从数学上讲，并不是所有的周期函数其相应的傅里叶级数都收敛于该函数本身。而且说到收敛，在数学中有很多种定义。因此，符号“$\sim$”只是表示“相应于”。下面我们简单介绍式（1-2-2）或（1-2-4）成为等式的有关研究概况。从中可以看到，数学家们是在从事什么样的工作。

1．一些常用的收敛定理

狄里克莱（Dirichlet）判别法　若 $x(t)$ 是以 $T$ 为周期的逐段单调函数，且在 $[0,T)$ 内仅有限个不连续点，则

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)=\frac{x(t-0)+x(t+0)}{2} \tag{1-2-6}$$

证明见文献[1]。

注：说“式（1-2-6）成立”是指“按点收敛”，也就是说对于固定的 $t$ 值，式（1-2-6）左端的数项级数收敛于右端的值。

2．关于三角函数形式与指数形式的傅里叶级数之间的关