

粘弹性力学基础

蔡 峨 编 著



北京航空航天大学出版社

粘弹性力学基础

蔡 峨 编 著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

高分子聚合物具有粘弹性的力学特性。本书以经典弹性力学为基础，从宏观模型出发，用数学解析的办法论述粘弹性的力学特性；并通过固体推进剂药柱几种典型应力分析，介绍线性粘弹性理论的应用。

全书共分七章，前三章为粘弹性的基本概念及线性粘弹性基础理论，包括必要的积分变换知识。第四、五章讲述线性粘弹性理论的应用及算例。最后两章重点介绍粘弹性固体机械特性及破坏判据。各章最后附思考题，以启发对重点问题的深入理解。

本书为高等学校固体火箭发动机专业选修教材。作为技术基础，可供其他专业有关科技人员、大学本科生和研究生参考。

粘 弹 性 力 学 基 础

NIANTANXING LIXUE JICHU

蔡 峨 编著

责任编辑 陶金福

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印装

787 × 1092 1/32 印张：6.75 字数：157千字

1989年元月第一版 1989年元月第一次印刷

印数：1700册 定价：1.35元

ISBN 7-81012-072-7/TB·016

前 言

高分子聚合物具有粘弹性的力学特性。近年来，聚合物在工业技术方面的应用已达数百种之多，包括各种橡胶、塑料、合成纤维以及用聚合物做基体的各种纤维增强复合材料；各类固体推进剂也都属于非晶态高聚物。为了保证聚合物制品在使用中的力学稳定性及完整性，就必须对产品进行力学分析。因此，粘弹性力学作为一门新兴学科，得到迅速的发展。

当前固体火箭技术发展迅猛，一些主要构件趋于比强度高的复合材料化；固体推进剂药柱亦日趋庞大和复杂，要精确估算发动机结构的强度、进行装药的完整性分析，都必须借助于粘弹性理论。

本书重点讲述粘弹性力学的基础知识及线性粘弹性理论，并通过药柱应力分析的简化算例，说明粘弹性理论的应用。全书共分七章，前三章为粘弹性的基本概念及线性粘弹性基础理论，其中第二章为必要的积分变换知识的介绍。第四、五章讲述线性粘弹性理论的应用及算例。最后两章重点介绍粘弹性固体机械特性及破坏判据。各章最后附思考题，以利于重点问题的深入理解。

本书作为固体火箭发动机专业本科高年级学生选修教材，是在原“粘弹性力学基础及固体推进剂药柱应力分析”讲义基础上，经充实、改编而成，较多地参考了〔美〕黄乃健博士在北京工业学院的讲学稿——“粘弹性力学原理及其对固体推进剂应力分析之应用”。作为解决粘弹性体复杂实

际问题数值化方法的理论基础，可供其他方面有关工程技术人员参考。本书经北京理工大学王元有教授认真审阅，并提出了许多宝贵意见；责任编辑陶金福同志在提高本书质量上做了大量工作。谨此致谢。

编者 蔡 峨

1988年10月

符号说明

A	式 (5-11) 中之常数; 式 (7-20) 中之常数; 面积; 裂纹扩展生成的表面面积; 延性破坏试验中压陷面积
a	药柱内半径; 穿透性裂纹长度之半
a_c	临界裂纹长度
a^T	热流变学移位因子
a_0	傅氏系数
a_n	傅氏系数
$a(t)$	圆孔药柱在时间 t 时的内径
B	式 (5-11) 中之常数; 式 (7-20) 中之常数; 式 (5-27) 中的弹性壳体常数; 裂纹断裂平板厚度
b	药柱 (圆筒) 外半径
b_n	傅氏系数
C	常数
C_1	常数
C_2	常数
D	直径; 延性破坏试验中压入物直径
d_1	延性破坏试验中之压陷深度
d_2	压陷回复后的深度
E	弹簧常数; 弹性模数
E_1	弹性模数; $E_1(\omega)$ 之简化表示
E_s	壳体弹性模数
E_r	橡胶模数
$E^*(\omega)$	复拉伸模数

$E_1(\omega)$	$E^*(\omega)$ 的实部——储存模数
$E_2(\omega)$	$E^*(\omega)$ 的虚部——损失模数
$E(t)$	拉伸松弛模数
$E_s(t)$	蠕变模数 $[= 1/F(t)]$
E_0	常数
E_g	玻璃模数
e_{tj}	应变致偏张量
F	弹性柔量
$F(t)$	拉伸蠕变柔量
F_i	体积力分量
F_e	橡胶柔量
F_g	玻璃柔量
$F(\omega)$	函数 $f(t)$ 的频谱函数
$F(n, \omega_0)$	周期函数 $f(t)$ 的频谱函数
$F^*(\omega)$	复拉伸柔量
$F_1(\omega)$	$F^*(\omega)$ 的实部——储存柔量
$F_2(\omega)$	$F^*(\omega)$ 的虚部——损失柔量
$[F(t)]$	式 (3-64) 中所定义的函数
G	剪切模数
$G(t)$	剪切松弛模数
$G^*(\omega)$	复剪切模数
G_1	$G_1(\omega)$ 的简化表示; 应变能释放率
G_2	$G_2(\omega)$ 的简化表示
$G_1(\omega)$	$G^*(\omega)$ 的实部
$G_2(\omega)$	$G^*(\omega)$ 的虚部
ϵ_{10}	裂纹扩张应变能吸收率

g	重力加速度
HB	布氏硬度
$H(t)$	单位阶跃函数
h	壳体厚度
i	整数
j	整数
J^*	复剪切柔量
$J^{(*)}$	式 (5-78) 中所定义的积分
$J(t)$	剪切蠕变柔量
$J(\tau)$	松弛频谱 ($=\tau E(\tau)$)
K	体积模数
$K(t)$	体积松弛模数
$K(t, \tau)$	如 (3-11) 式所定义的积分核
K_1	应力强度因子
K_{1c}	平面应变断裂韧度
$K^*(\omega)$	复体积模数
k	常数
$L(\tau)$	延迟频谱 [$=\tau/E(\tau)$]
l	长度
M	试件承受不同应力水平的数目; 不同应变率 $\dot{\epsilon}_i$ 的数目
m	整数
N_i	试件所经受的第 i 个应力水平的循环数
N_{Fi}	在 i 级应力水平作用下损坏所需要的应力循环数
n	常数; 指数常数
n_i	取决于应变率 $\dot{\epsilon}_i$ 的加权数
P	线性微分算子

P'	线性微分算子
P''	线性微分算子
p_r	式 (3-19) 中的材料常数
Q	线性微分算子
Q'	线性微分算子
Q''	线性微分算子
q_r	式 (3-19) 中的材料常数
R	比例常数; 裂纹尖端塑性区大小
R_0	复数的实数部分
$R(t)$	式 (5-35) 中所定义的函数
r	径向坐标
S	拉普拉斯变换变量; 裂纹扩展吸收的能量
S_{ij}	应力致偏张量
T	绝对温度; 比例常数; 周期
T_i	而力分量
T_g	玻璃化温度
t	时间
t_c	松弛时间
t_0	延迟时间
t_f	药柱总燃烧时间
t_i	药柱试件保持在应变率 $\dot{\epsilon}_i$ 的时间
t_{Fi}	药柱试件在 $\dot{\epsilon}_i$ 下损坏的时间
t^*	损坏时间
U	弹性应变能
u_i	位移矢量
V	体积

W_1	储存的能量
W_2	能量损失
α	常数
α_0	热膨胀系数
β	式 (5-4) 中所定义的参数
I'	伽马函数
γ	正数; 裂纹单位面积表面自由能
δ	狄拉克 (Dirac) 函数; 壳体厚度; 动态应力与应变间相位滞后角; 张开裂纹上下表面间的距离
δ_i	裂纹在尖端的张开值
$\delta_{i,j}$	克罗内克符号
ε	应变
ε_0	恒应变; 复数应变
ε_i	应变强度
ε_m	极限拉伸应变
$\varepsilon_{i,j}$	应变张量
ε^*	动态应变; 损坏应变
$\dot{\varepsilon}_i$	第 i 个应变率
$\varepsilon(t)$	时间为 t 时的单轴向应变
η	粘性阻尼器; 粘性系数
η_i	阻尼器粘性系数
λ	数目; 拉梅常数; 圆孔药柱外径与内径之比 (b/a); 表3-1中材料常数之比
μ	波桑比; 式 (5-30) 中所定义的参数
ξ	折合时间 (t/a_T); 式 (7-13) 中所定义的参数

ξ^*	式 (5-83) 中所定义的参数
π_0	常数
$\pi(t)$	圆孔药柱中的内压
ρ	密度
σ	应力
σ_0	恒应力; 复数应力
σ_b	破坏应力
σ_c	裂纹扩展临界应力
σ_{op}	平均正应力
σ_i	应力强度
σ_m	极限拉伸应力
$\sigma_{i,j}$	应力张量
σ^*	动态应力
$\sigma(t)$	时间为 t 时的单轴向应力
τ	时间参数
ϕ	任意函数
ω	频率; 火箭旋转角速度
ω_0	常数

目 录

前 言

符号说明

第一章 粘弹性力学基本概念

- § 1 粘弹性和粘弹性力学 (1)
- § 2 粘弹性性质依赖于时间的变化关系 (2)
- § 3 粘弹性性质依赖于温度的变化关系 (6)
- § 4 粘弹性固体和液体 (9)
- § 5 粘弹性物质本构关系的理论 (10)
 - § 5.1 状态方程理论 (10)
 - § 5.2 叠加理论 (14)
- 习 题 (17)

第二章 傅氏变换及拉氏变换

- § 1 周期函数及频谱 (18)
- § 2 求单位阶跃函数的傅氏变换 (23)
- § 3 单位脉冲函数 (26)
- § 4 拉氏变换 (28)
 - § 4.1 定义及导出 (28)
 - § 4.2 函数 $f(t)$ 的导数的拉氏变换 (32)
 - § 4.3 延迟定理 (实位移定理) (33)
 - § 4.4 卷积定理 (象函数乘积定理) (34)
- 习 题 (35)

第三章 线性粘弹性理论

- § 1 积分算子(integral operator)表示式 …(38)
 - § 1.1 遗传积分的几种表示形式 …(38)
 - § 1.2 蠕变柔量和松弛模数的关系 …(42)
 - § 2 微分算子(differential operator)
表示式 …(44)
 - § 3 复模数和复柔量(complex modulus
and complex compliance)表示式 …(46)
 - § 3.1 粘弹性动态性能——复模数和复柔
量 …(46)
 - § 3.2 动态性质和静态性质函数间的关系 …(52)
 - § 4 模型理论、蠕变及松弛特性 …(54)
 - § 4.1 描述线性粘弹性的典型模型 …(54)
 - § 4.2 蠕变和松弛特性 …(65)
 - § 5 模型及典型线性粘弹性材料的特性分析 …(73)
 - § 5.1 Maxwell模型和Voigt模型的局
限性 …(73)
 - § 5.2 标准线性固体模型 …(78)
 - § 5.3 指数规律的材料(power law
materials) …(94)
 - § 6 考虑非线性粘弹性问题的一些近似方法 …(99)
- 习 题 …(103)

第四章 线性粘弹性力学中的应力分析

- § 1 应力、应变的张量表示法, 张量的分解 …(107)
- § 2 线性粘弹性力学中的三维应力-应变关
系 …(115)

§ 2.1 微分算子表示	(115)
§ 2.2 积分算子表示	(122)
§ 3 线性粘弹性力学中之应力分析	(126)
§ 4 实际问题的简化	(131)
习 题	(133)
第五章 固体推进剂药柱的应力分析	
§ 1 浇铸圆孔药柱中的应力	(135)
§ 2 浇铸圆孔药柱在旋转且具有消融内孔表面 时的应力	(143)
§ 3 浇铸圆孔药柱在温度变化时的应力及 应变分析	(151)
§ 4 因轴向过载而引起的药柱下沉	(159)
习 题	(164)
第六章 粘弹性固体机械性质	
§ 1 粘弹性测量的静态法	(167)
§ 1.1 拉伸蠕变	(167)
§ 1.2 应力松弛	(170)
§ 2 粘弹力学特性的动态测量法	(170)
§ 3 时间-温度等效性和WLF 方程	(173)
习 题	(180)
第七章 粘弹性材料破坏性质及其判据	
§ 1 粘弹性材料破坏原理	(182)
§ 1.1 粘弹性材料的破坏现象	(182)
§ 1.2 脆性破坏	(183)
§ 1.3 延性破坏	(188)
§ 1.4 解纹	(190)

§ 2 固体推进剂药柱破坏分析	(192)
§ 2.1 药柱破裂	(192)
§ 2.2 过度变形	(195)
§ 2.3 自燃	(196)
§ 2.4 累积性破坏准则	(196)
习 题	(199)

参考文献

第一章 粘弹性力学基本概念

§1 粘弹性和粘弹性力学

当前关于弹性固体和粘性液体这两类特定类型的材料，已经研究得比较多。弹性固体具有确定的形状，在外力作用下可以变形，并具有新的平衡状态下的形状；当除去外力后，它能完全恢复原来的形状。弹性固体能将形变过程中由于外力做功产生的能量全部储存起来，除去外力以后，又能将储存的能量全部释放，使本身恢复原状。与此相反，粘性液体却没有确定的形状，在外力作用下发生不可逆的流动。粘弹性则恰为介乎此二者之间的所有性质，这是高聚物的重要特征之一。

关于粘弹性问题的研究可以分为两个大的方面，即连续介质力学法和分子理论法。后者是从分子结构出发推导出整体的粘弹性质；而前者则不考虑物体的分子结构，以宏观模型和数学解析的办法描述粘弹性物体的行为。这里讲的粘弹性力学（viscoelasticity）就是属于这种研究体系，简单说来，就是研究粘弹性物体由于受外力作用或由于温度改变等原因而发生的应力、形变和位移的科学。

上面提到粘弹性表现为介乎弹性固体和粘性液体之间的所有性质，具体来说就是材料性质对时间和温度有强烈的依

粘性。粘弹性体的形变不仅和当时作用的外力大小有关，而且和温度的改变、力的作用时间以及加载历史都有关系。因此粘弹性可以定义为某些材料在一定温度范围内和一定加载条件下呈现的兼具粘性和弹性效应的特性。粘弹性力学就是要在充分反映材料的粘弹性特性前提下，建立各应力和形变分量的本构关系 (constitutive relationship)，从而解决粘弹性物体的应力和形变分析问题。

§2 粘弹性性质依赖于时间的变化关系

图1-1给出在某恒定温度下，高聚物受单向拉伸作用时加载与响应随时间的变化关系。

(a) 蠕变 (creep)：在时间 $t=0$ 时施加常应力 σ_0 ，则应变 ε 随时间 t 以减小的速率增加，且应变 ε 随应力的大小而增减。弹性材料的相应特性在图上用虚线表示。

(b) 松弛 (relaxation)： $t=0$ 时施以恒应变，则应力从某起始值随时间逐渐减小。

(c) 恢复 (recovery)：所施加的外力部分或全部撤除，应变作为时间的函数减小或还原。换句话说，即存在有还原滞后的特征。

(d) 恒比应力 (constant rate stressing)：即所施加的应力与时间成比例地增加，则应变随时间呈非线性增加。图中虚线所表示的弹性材料则为等比例地线性增加。应力比增加时曲线上升更陡。

(e) 恒比应变 (constant rate straining)：与