·工程数学·

线性代数

沈阳工业大学数学教研室 编

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/沈阳工业大学数学教研室编 .—沈阳:东北大学出版社,2001.2

ISBN 7-81054-586-8

Ⅰ.线… Ⅱ.沈… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 84451 号

内容提要

本书由沈阳工业大学数学教研室几位教师根据他们的教学经验,参考国内多部线性代数教材,集体研究、共同编写而成。本着"教师易教,学生易学,理论严谨,论述清晰,深入浅出,注重实例"的原则,内容体系做了较大的调整。

第 1 章为矩阵及其运算,行列式定义及其性质;第 2 章讨论矩阵的秩与逆矩阵,包括矩阵的初等变换及其性质、分块矩阵等;第 3 章研究向量的线性相关与线性无关,向量空间的基,过渡矩阵,线性变换及其矩阵表示等;第 4 章为线性方程组,注重向量组的线性相关性,矩阵的秩与线性方程组的解等概念的有机联系;第 5 章讨论矩阵的特征值与特征向量,相似矩阵、方阵对角化及二次型等。增加了投入产出数学模型作为第 6 章,并把一些表述较繁,难度较大的定理证明作为附录放在各章之后,供有兴趣的读者参考。

本书通篇用矩阵理论贯穿,突出矩阵理论与运算在线性代数内容体系中的主体地位。可作为工科院校线性代数教材,也可供科技工作者阅读。

©东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110006)

电话:(024)23890881　　传真:(024)23892538

网址:http://www.neupress.com　E-mail:neuph@neupress.com

铁岭市新华印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本:850mm×1168mm　1/32　字数:192 千字　印张:7.375

2001 年 2 月第 1 版　　2001 年 2 月第 1 次印刷

印数:1～5060 册

责任编辑:孟　颖　郭爱民　　责任校对:米　戎

封面设计:唐敏智　　责任出版:杨华宁

定价:11.50 元

出版说明

线性代数是工科高等学校的一门重要基础课，是离散量的基础，对于培养学生的抽象思维与逻辑推理能力起着重要作用。线性代数的主体——矩阵理论与矩阵计算——又是工程科学中用得非常广泛的基础性工具。这门课程教学质量的高低直接影响着人才的培养质量，影响着学生整体科学知识的结构与水平。一本教材的质量又是这门课程教学质量的基础。长期以来，沈阳工业大学数学教研室一些教师精心组织线性代数课程的教学，认真钻研教材，潜心研究教学内容与教学方法，并有一些独特的见解。本书就是在此基础上，经几位教师集体讨论，分工编写而成的。本书在不失理论的正确性与逻辑的严密性的前提下，力求体现教师易教、学生易学、深入浅出、适度综合的原则，内容体系作了较大调整，主要体现在以下几点：

1．矩阵概念与运算提前，由简单的线性变换及线性方程组引出矩阵，由矩阵利用递推方法定义行列式，适度削弱行列式的技巧计算。

2．以矩阵的秩、逆矩阵、矩阵的初等变换、分块矩阵为主要内容作为第 2 章，为后

面的讨论提供工具。

3. 在向量空间一章中，引进基、过渡矩阵、线性变换及矩阵表示、子空间等概念、理论及运算，使之成为必修内容。

4. 适度削弱线性相关与线性无关的理论探讨，使其与矩阵的秩相结合，重点学习利用矩阵的秩、矩阵的初等变换来判定向量组的线性相关与线性无关、求向量组的最大线性无关组等。

5. 线性方程组一章介绍矩阵表示与矩阵解法，强调向量组的线性相关性、矩阵的秩与线性方程组的解之间的内在联系。

6. 以矩阵的特征值、特征向量、相似矩阵、矩阵对角化、正交矩阵等内容为主，编排为第 5 章。适度削弱二次型的理论，强调与矩阵结合。

7. 增加投入产出数学模型的内容。

8. 考虑篇幅、学时等因素，一些表达较繁、难度较大的定理证明作为附录放在各章之后，供有兴趣的读者阅读。

本书编写工作涉及多位数学教师，总体思路与内容体系框架由王文涛提出，并主持全书编写工作，统纂全部书稿。具体分工为：石鸿雁编写第 1 章，宋桂荣编写第 2 章，卢建伟编写第 3 章，李宝家编写第 4 章，张颖编写第 5 章，禹德军编写第 6 章，各章附录由张洪编写。原数学教研室主任胡仁庠老师审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。数学教研室青年教师张翼、李媛在此书出版过程中帮助修改和校稿，在此向她们表示谢意。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中疏漏之处一定不少，恳请读者批评指正。

沈阳工业大学数学教研室线性代数编写组

2000 年 10 月

目　　录

第 1 章　矩阵与行列式

矩阵和行列式是线性代数的重要组成部分. 矩阵是从许多实际问题的研究中抽象出来的一个数学概念,它的概念与运算法则是研究近代数学以及许多应用学科不可缺少的工具. 早在 18 世纪，为了寻求含有 n 个未知数、n 个方程的线性方程组一般解的公式，Leibniz 和 Cramer 首先引进了行列式的概念. 如今，行列式不仅应用于数学本身，而且在其他一些科学分支都有着广泛的应用. 本章从线性方程组入手，引出矩阵的概念，介绍矩阵的基本运算，进而用递推的方式给出矩阵的行列式的定义，介绍行列式的性质及其计算，最后给出求解一类非齐次线性方程组的 Cramer 法则.

1.1　矩阵及其运算

1.1.1　线性方程组与矩阵

在实际工作中，常常把一些数据用矩形表来表示.

【例 1-1】　在物资调运中，某类物资有 3 个产地和 5 个销售地，它们的调运情况可在表 1-1 中反映.

如果用 $a_{ij}(i=1, 2, 3;\ j=1, 2, 3, 4, 5)$表示从第 i 个产地运往第 j 个销售地的物资吨数(如 $a_{12}=3$，$a_{24}=0$，$a_{35}=6$)，这样就能将调运方案表简写成一个三行五列的矩形表

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

表 1-1　　　　　　　　　　**调运方案表**

调运吨数 销地 / 产地	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
甲	0	3	4	7	5
乙	8	2	3	0	2
丙	5	4	0	6	6

【例 1-2】　设有线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

方程组(1-1)是否有解，有多少解，这个问题显然只与方程组(1-1)中的系数和常数项有关，因此有必要来考查这些系数之间的关系. 可以把这些系数排成如下的一个矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

同样，也可以把系数和常数项一起排成下表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

这种形状的表，在数学上叫做**矩阵**.

定义 1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称为 $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ **矩阵**. 这 $m \times n$ 个数称为矩阵的元素，a_{ij} 叫做矩阵的第 i 行第 j 列元素. 元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**(本书中只讨论实矩阵). 矩阵常用 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 等表示，如

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ 矩阵也可简记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 或 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，或记为 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$.

当 $m = n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**；

当 $m = 1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为 $1 \times n$ 矩阵，即

$$A=[a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1n}]$$

这时，A 称为**行矩阵**；

当 $n=1$ 时，A 为 $m\times 1$ 矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}$$

A 称为**列矩阵**.

当 $a_{ij}=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$时，$A$ 称为**零矩阵**，记作 $\mathbf{0}$.

定义 2 设有两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，如果 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 A 与矩阵 B 相等，记作 $A=B$.

【例 1-3】 设 $A=\begin{bmatrix} a & -1 & 3\\ 0 & b & -4\\ -5 & 8 & 7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -2 & -1 & c\\ 0 & 1 & -4\\ d & 8 & 7\end{bmatrix}$

且 $A=B$，求 a，b，c，d 的值.

【解】 由于 $A=B$，由定义 2 得

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 3\\ 0 & b & -4\\ -5 & 8 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & c\\ 0 & 1 & -4\\ d & 8 & 7\end{bmatrix}$$

于是有 $a=-2$，$b=1$，$c=3$，$d=-5$.

1.1.2 矩阵的运算

矩阵的运算是指矩阵的加法、数乘矩阵、矩阵乘法及矩阵的转置等运算. 它们在线性代数所讨论的一些问题中有着广泛的应用.

(1) 矩阵的加法

定义 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 则矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

不难看出, 只有行数相同, 列数也相同的矩阵才能进行加法运算.

矩阵的加法满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{0}$ 都是 $m\times n$ 矩阵)

①交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

②结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

③零矩阵满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$, $-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**. 由此可以定义矩阵的减法:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

(2) 数乘矩阵

定义 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, λ 为一常数, 则称矩阵

$$
\begin{bmatrix}
\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\
\lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

为 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$．

由定义不难验证，数乘矩阵满足下面的运算规律(设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，λ，μ 为常数)：

① 数对矩阵的分配律　$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$

② 矩阵对数的分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$

③ 数与矩阵的结合律　$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$

【例 1-4】 设矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 7 & 5 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 8 \end{bmatrix},
$$

且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$．

【解】 由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$

又由于
$$
\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 4 & 2 \end{bmatrix}
$$

从而
$$
\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

(3) 矩阵与矩阵的乘法

给出定义之前，先考查一个实际问题：假设某地区有三家工厂

生产甲、乙两种产品，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示各工厂生产各种产品的年产量，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示各种产品的单位价格和单位利润，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

其中 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2)$分别表示第 i 家工厂生产第 j 种产品的产量($j=1$ 表示甲种产品，$j=2$ 表示乙种产品)，$b_{i1}(i=1,\ 2)$分别表示甲、乙两种产品的单位价格，$b_{i2}(i=1,\ 2)$分别表示甲、乙两种产品的单位利润，则第 i 家工厂生产甲、乙两种产品的总收入 c_{i1} $(i=1,\ 2,\ 3)$和总利润 $c_{i2}(i=1,\ 2,\ 3)$分别为

$$\begin{cases}c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}\\ c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}\\ c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}\end{cases}\qquad \begin{cases}c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\\ c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}\end{cases}$$

总收入与总利润用矩阵可表示为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}\end{bmatrix}$$

可以看出，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素恰为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和，这里把矩阵 $\boldsymbol{C}$ 定义为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积.

定义 5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

$$=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj} \qquad (1\text{-}3)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

关于矩阵乘法应注意以下几点.

① 两个矩阵可以相乘的条件是：第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数.

【例 1-5】 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

【解】 因为 $\boldsymbol{A}$ 为 2×4 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，其乘积为 2×3 矩阵. 即

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times4+0\times(-1)+3\times2+(-1)\times1 & 1\times1+0\times1+3\times0+(-1)\times3 & 1\times0+0\times3+3\times1+(-1)\times4\\2\times4+1\times(-1)+0\times2+2\times1 & 2\times1+1\times1+0\times0+2\times3 & 2\times0+1\times3+0\times1+2\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&-2&-1\\9&9&11\end{bmatrix}$$

② 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ 都可以计

算，但一般情况下，$AB \neq BA$.

【例 1-6】 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{bmatrix}$，

试求 AB 和 BA .

【解】

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&1\\7&3\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&12\\1&1&-3\\2&0&6\end{bmatrix}$$

显然 $AB \neq BA$.

③ 设 A，B 都是 n 阶方阵，则 $A \cdot B$ 与 $B \cdot A$ 可以计算且均为 n 阶方阵，但 AB 与 BA 也不一定相等. 例如：设

$$A=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}$$

有
$$AB=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16&-32\\8&16\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

由此得，矩阵的乘法不满足交换律.

④ 矩阵乘法不满足消去律，即当 $AB_1=AB_2$ 时，不一定有 $B_1=B_2$. 例如：设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&2&2&4\\4&6&8&0\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}25\\10\\30\\0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}40\\0\\30\\5\end{bmatrix}$$

有

$$AB_1=AB_2=\begin{bmatrix}75\\80\\400\end{bmatrix},\ 但\ B_1\neq B_2.$$

以上指出了矩阵乘法与数乘矩阵的不同之处，但也有相似之处，即矩阵乘法满足下列运算规律(假设运算是可行的).

① 结合律　$(AB)C=A(BC)$

② 与数的结合律　$k(AB)=(kA)B=A(kB)$　(其中 k 为常数)

③ 左分配律　$A(B+C)=AB+AC$;

右分配律　$(B+C)A=BA+CA$

(4) 方阵的次幂

有了矩阵的乘法，可以定义方阵的次幂.

定义 6　设 A 是一个 n 阶方阵，k 是自然数，则将 k 个 A 的连乘积叫做 A 的 k 次幂，记为 A^k，即

$$A^k=\overbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}^{k个}$$

由于矩阵的乘法满足结合律，得方阵的次幂满足

$$A^k\cdot A^l=A^{k+l};\quad (A^k)^l=A^{kl}$$

其中 k，l 为自然数.

由于矩阵乘法一般不满足交换律，所以两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，一般来说 $(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

(5) 矩阵的转置

定义 7 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序号的列而得到的一个新矩阵，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}'$ 或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即若

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵的转置也是一种运算，它满足下述运算规律(假设运算都是可行的)：

① $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$

③ $(\lambda\boldsymbol{A})' = \lambda\boldsymbol{A}'$

④ $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$

①～③容易证明，现只证明④式.

证明： 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times s}$； $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times n}$

$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$； $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{D} = (d_{ij})_{n\times m}$