

高等学校教材

工程数学

# 线性代数

化工系统高校数学协作组 编

中国计量出版社

高等学校教材

工程数学

# 线性代数

化工系统高校数学协作组 编

中国计量出版社

新登（京）字 024 号

内 容 提 要

本书是化工系统高校数学协作组编写的数学教材之一，系统介绍线性代数的基本内容，供高等工业院校用作线性代数课程教材，也可作为工程技术人员自学用书。

工程数学

线 性 代 数

化工系统高校数学协作组 编

责任编辑 王平 吴全

\*

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

永清县第一胶印厂印刷

新华书店北京发行所发行

\*

开本 850×1168/32 印张 8.5 字数 230 千字

1992 年 6 月第 1 版 1992 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—13 000

ISBN 7—5026—0495—2/O·1

定价 4.50 元

# 目 录

<b>第一章</b>	<b><math>n</math> 阶行列式</b>	(1)
§ 1.	$n$ 阶行列式的定义	(1)
§ 2.	$n$ 阶行列式的性质	(8)
§ 3.	克莱姆 (Cramer) 法则	(18)
	习题一	(23)
<b>第二章</b>	<b>矩阵</b>	(28)
§ 1.	矩阵及其运算	(28)
§ 2.	方阵	(40)
§ 3.	逆矩阵	(45)
§ 4.	分块矩阵	(50)
§ 5.	矩阵的秩	(59)
§ 6.	矩阵的初等变换和初等矩阵	(62)
§ 7.	齐次线性方程组	(76)
	习题二	(85)
<b>第三章</b>	<b><math>n</math> 维向量</b>	(94)
§ 1.	$n$ 维向量及其线性运算	(95)
§ 2.	线性相关与线性无关	(100)
§ 3.	向量组的秩	(109)
§ 4.	$n$ 维向量空间	(116)
§ 5.	向量组的正交化和正交矩阵	(123)
	习题三	(129)
<b>第四章</b>	<b>线性方程组</b>	(134)
§ 1.	齐次线性方程组	(134)
§ 2.	非齐次线性方程组	(144)
	习题四	(156)

<b>第五章</b>	矩阵的对角化	(161)
§ 1.	相似矩阵 矩阵的特征值和特征向量	(161)
§ 2.	矩阵的对角化	(172)
§ 3.	实对称矩阵的对角化	(180)
	习题五	(189)
<b>第六章</b>	二次型	(193)
§ 1.	二次型及其矩阵	(193)
§ 2.	用正交变换化二次型为标准形	(196)
§ 3.	用配方法化二次型为标准形	(203)
§ 4.	惯性定理与正定二次型	(207)
	习题六	(216)
<b>第七章</b>	线性空间	(218)
§ 1.	线性空间的定义	(218)
§ 2.	基与坐标 维数	(221)
§ 3.	线性变换	(232)
	习题七	(242)
	习题答案	(247)

# 第一章 $n$ 阶行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，在初等数学中已经学过二阶和三阶行列式，并利用它来解二元、三元线性方程组。本章中我们要把行列式推广到  $n$  阶，讨论  $n$  阶行列式的性质和计算方法，并给出  $n$  个方程、 $n$  个未知数的线性方程组的一种解法。

## § 1. $n$ 阶行列式的定义

我们已经知道二阶、三阶行列式的定义和计算方法。二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} \\ &\quad - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

在上面的三阶行列式的计算中，若记

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

其中  $M_{11}$  是在原来的三阶行列式中，划去了元素  $a_{11}$  所在的行和列后，余下的元素所组成的二阶行列式； $M_{12}$  是在三阶行列式中

划去了元素  $a_{12}$  所在的行和列后，余下的元素所组成的二阶行列式； $M_{13}$  是在三阶行列式中划去了元素  $a_{13}$  所在的行和列后，余下的元素所组成的二阶行列式。 $M_{11}, M_{12}, M_{13}$  分别称为第一行元素  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  的余子式，又记

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$$

$A_{11}, A_{12}, A_{13}$  分别称为第一行元素  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  的代数余子式。

引进了这些记号后，三阶行列式可表为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

此式称为三阶行列式按第一行元素的展开式，它表明，三阶行列式等于它的第一行的每个元素与它们的代数余子式的乘积之和。

下面讨论  $n$  阶行列式

$n$  阶行列式记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

$D$  中横排的称为行，竖排的称为列。 $n$  阶行列式有  $n$  行  $n$  列。每个数  $a_{ij}$  称为行列式的元素。 $a_{ij}$  的第一个下标  $i$  表示  $a_{ij}$  所在的行，第二个下标  $j$  表示  $a_{ij}$  所在的列，元素  $a_{ij}$  是位于第  $i$  行第  $j$  列的元素。例如  $a_{23}$  是位于第二行第三列的元素； $a_{n2}$  是位于第  $n$  行第二列的元素，等等。

用  $M_{ij}$  表示元素  $a_{ij}$  的余子式，它是在  $D$  中划去了元素  $a_{ij}$  所在的行和列后，余下的元素按原来的顺序组成的  $n-1$  阶行列

式。又记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (2)$$

$A_{ij}$  称为元素  $a_{ij}$  的代数余子式

例如对四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

有

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} M_{24} = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

等等。

与三阶行列式按第一行元素的展开式相类似，我们定义  $n$  阶行列式如下：

**定义 1**  $n$  阶行列式定义为它的第一行的每个元素与它们所对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \quad (3)$$

(3)式称为  $n$  阶行列式  $D$  按它的第一行元素的展开式。注意，因为  $A_{1k} = (-1)^{1+k} M_{1k}$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) 而每个  $M_{1k}$  都是  $n-1$  阶的行列式，所以(3)式表明  $n$  阶行列式的计算化为  $n$  个  $n-1$  阶行列式的计算，而每个  $n-1$  阶行列式  $M_{1k}$ ，再按这个定义可化

为  $n-1$  个  $n-2$  阶的行列式，如此下去，最后化为三阶或二阶行列式的计算。

例 1 计算的四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= 1A_{11} + 0A_{12} + (-1)A_{13} + 2A_{14} \\ &= (-1)^{1+1}M_{11} - (-1)^{1+3}M_{13} + 2(-1)^{1+4}M_{14} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1) - (-1) - 2(-1) = 2 \end{aligned}$$

例 2 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= a_{11}A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \end{aligned}$$

例 2 中的行列式称为下三角行列式，这结果表明：下三角行列式的值等于它的主对角线上的元素的乘积。这个结论对  $n$  阶下三角行列式也正确。

行列式非但可以按第一行元素展开，而且可以按第二行、第三行或任何一行的元素展开，还可以按任何一列的元素展开，其结果都是相同的，即有如下的定理：

**定理 1**  $n$  阶行列式  $D$  等于它的任一行(或任一列)的每个元素与它们所对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (4)$$

或

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} \quad (j=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (5)$$

定理 1 的证明略去

例 3 上面的例 1 中，如按第四行元素展开，得到

$$\begin{aligned} D &= 0A_{41} + 1A_{42} + 0A_{43} + (-1)A_{44} \\ &= (-1)^{4+2}M_{42} - (-1)^{4+4}M_{44} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

如按第一列元素展开，得到

$$\begin{aligned} D &= 1A_{11} + 0A_{21} + (-1)A_{31} + 0A_{41} \\ &= (-1)^{1+1}M_{11} - (-1)^{3+1}M_{31} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -1 + 3 = 2$$

可以验证，按任何一行或任何一列展开的结果都相等，都等于2。

例4 计算上三角行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 逐次按第一列元素展开可得

$$\begin{aligned} D' &= a_{11}A_{11} = a_{11}M_{11} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \end{aligned}$$

所以上三角行列式和下三角行列式的值都等于主对角线上各元素的乘积。特别地，行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

但是注意

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \dots & d_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 d_2 \dots d_n$$

所以  $\Delta_n$  的值不一定等于  $d_1 d_2 \dots d_n$ 。

例 5 用数学归纳法证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \\ = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

证 当  $n=2$  时, 有

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = 4\cos^2\theta - 1 = \frac{4\cos^2\theta - 1}{\sin\theta} \sin\theta \\ = \frac{2\sin 2\theta \cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin 3\theta + \sin\theta - \sin\theta}{\sin\theta} \\ = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$$

所以当  $n=2$  时结论成立。

设当  $n < k-1$  时, 结论成立, 下证当  $n=k$  时结论也成立。将  $D_k$  按第一行元素展开得

$$\begin{aligned}
 D_k &= 2\cos\theta D_{k-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\theta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \\
 &= 2\cos\theta D_{k-1} - D_{k-2} \\
 &= 2\cos\theta \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta} \\
 &= \frac{\sin(k+1)\theta + \sin(k-1)\theta - \sin(k-1)\theta}{\sin\theta} \\
 &= \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}
 \end{aligned}$$

这表明  $n=k$  时结论也成立，所以由数学归纳法知对一切自然数  $n$  结论都成立 ( $n=1$  时，结论显然成立)。

## § 2. $n$ 阶行列式的性质

从行列式的定义知道，计算一个三阶行列式需要计算三个二阶行列式，计算一个四阶行列式需要计算四个三阶行列式，依此类推，计算一个  $n$  阶行列式，需要计算  $n$  个  $n-1$  阶行列式。当  $n$  很大时，这个计算量是相当大的，所以行列式的计算应该另想办法。为此我们要研究行列式的性质，利用行列式性质可简化行列式的计算。当然行列式的性质在理论上也是很有用的。

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式  $D'$  称为行列式  $D$  的转置行列式。

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相等。即  $D = D'$ 。

证 对行列式的阶数  $n$  作数学归纳法。

当  $n=2$  时，命题显然成立。设命题对  $n-1$  已经成立，下证对  $n$  也成立。

将  $D$  和  $D'$  分别按第一行和第一列元素展开得到

$$D = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} \quad (1)$$

$$D' = \sum_{k=1}^n a_{1k} B_{k1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} N_{k1} \quad (2)$$

其中  $A_{1k}$ ,  $M_{1k}$  是  $D$  的第一行元素的代数余子式和余子式； $B_{k1}$ ,  $N_{k1}$  是  $D'$  的第一列元素的代数余子式和余子式。

$M_{1k}$  和  $N_{k1}$  都是  $n-1$  阶行列式，而且显然可看出  $N_{k1}$  是  $M_{1k}$  的转置行列式，所以由归纳法的假设知  $M_{1k} = N_{k1}$ ，从而由(1)、(2)知  $D = D'$ ，即命题对  $n$  也成立。

由数学归纳法，命题对一切  $n$  都成立。

性质 1 说明，在行列式中，行与列的地位是对称的，因此凡行所具有的性质，列也具有同样的性质，所以下面在叙述和证明行列式的性质时，我们都只对行来做。

**性质 2** 互换行列式的两行(列)，行列式变号，即

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

证 还是对行列式的阶数  $n$  用数学归纳法。

对二阶行列式, 很容易验证性质 2 成立。设对于  $n-1$  阶行列式性质 2 已成立, 下面证明对  $n$  阶行列式也成立。

把左右两端的行列式分别记为  $D$  和  $\Delta$ , 注意  $D$  和  $\Delta$  中除去第  $i$  行与第  $j$  行的位置互换外, 其余各行均相同。由定理 1,  $n$  阶行列式可以按任意一行展开, 现在将  $D$  和  $\Delta$  都按第  $k$  行展开 ( $k \neq i, j$ ), 有

$$D = \sum_{l=1}^n a_{kl} A_{kl} = \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} a_{kl} M_{kl} \quad (3)$$

$$\Delta = \sum_{l=1}^n a_{kl} B_{kl} = \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} a_{kl} N_{kl} \quad (4)$$

其中  $A_{kl}$  和  $M_{kl}$  是  $D$  中元素  $a_{kl}$  的代数余子式和余子式,  $B_{kl}$  和  $N_{kl}$  是  $\Delta$  中元素  $a_{kl}$  的代数余子式和余子式。 $M_{kl}$  和  $N_{kl}$  都是  $n-1$  阶行列式, 且除去两行元素互换外, 其余各行都相同, 所以由归纳法假设有  $M_{kl} = -N_{kl}$  (即  $A_{kl} = -B_{kl}$ ), 于是由 (3)、(4) 知  $D = -\Delta$ , 从而命题对一切  $n$  都成立。

**推论 1** 若行列式中有两行(列)元素对应相等, 则行列式为零。

证 记这个行列式为  $D$ , 把元素对应相等的两行互换后所得的行列式记为  $-D$  (性质 2), 因为这两行的对应元素相等, 所以两行互换后的行列式就是原来的行列式, 于是  $D = -D$ , 所以  $D = 0$ 。

**性质 3** 行列式中某一行(列)若有公因子, 则可将公因子提

到行列式外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 将等号左、右两边的行列式分别记为  $D$  和  $D_1$ ，将  $D$  按第  $i$  行展开，得

$$\begin{aligned} D &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= kD_1 \end{aligned}$$

**推论 2** 若行列式中有一行(列)元素全为零，则行列式为零。

证 元素全为零的那一行显然有公因子零，把它提到行列式外即得。

**推论 3** 若行列式中有两行(列)元素对应成比例，则行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

证 由性质 3 和推论 1 即得。

**性质 4** 若行列式的某一行(列)的每个元素都是两数之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

则此行列式等于下列两行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 与性质 3 的证明类似，将  $D$  按第  $i$  行展开即可证得。

**性质 5** 把行列式的某一行(列)加上另一行(列)的一个倍数，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \dots & a_{in} + ka_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

证 由性质 4 和推论 3 即可证得。

**性质 6** 行列式的某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元