

940711

高等学校教材

TH74
2633

光学仪器检校

程守澄 编著



兵器工业出版社

光 学 仪 器 检 校

程守澄 编著

兵器工业出版社

(京)新登字049号

内容简介

本书系统地介绍了光学仪器检测、调校所需掌握的基本理论、基本概念、检校原理和方法。全书分两大部分：第一部分包括第一、二两章，主要介绍光学仪器调整理论，即棱镜调整公式和复杂透镜系统调整公式及其在光学仪器中的应用；第二部分包括第三至第五章，主要介绍光学仪器基本光学性能检校、双眼仪器光轴平行性检校，以及各类测角仪器三轴误差的检测、调校。全书内容力求将光学仪器的调整理论与实际检校工作密切结合，既注重原理分析和概念建立，又力图给读者一个实用的检校方法。

本书可作为光学仪器专业的教材，也可供从事光学仪器设计、制造、检验和调试工作的工程技术人员参考。

光学仪器检校

程守澄 编著

兵器工业出版社 出版

(北京市海淀区车道沟10号)

新华书店总店科技发行所发行

各地新华书店经销

北方工业大学印刷厂印装

开本：787×1092 1/16 印张：16.875 字数：413千字

1992年6月第1版 1992年6月第1次印刷

印数：1-2100 定价：4.40元

ISBN 7-80038-391-1/TH·22(课)

出版说明

遵照国务院关于高等学校教材工作的分工，原兵器工业部教材编审室自成立之日起就担负起兵工类专业教材建设这项十分艰巨而光荣的任务。由于各兵工院校，特别是参与编审工作的广大教师积极支持和努力，及国防工业出版社、兵器工业出版社和北京理工大学出版社的紧密配合，自1985年到1988年共编审出版了89种教材。

为了使兵工类专业教材更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映兵工科学技术的先进水平，达到打好基础、精选内容、逐步更新、利于提高教学质量的要求，在总结第一轮教材编审出版工作的基础上，制订了兵工教材编审工作的五个文件。指导思想是：以提高教材质量为主线，完善编审制度，建立质量标准，明确岗位责任，充分发挥各专业教学指导委员会的学术和咨询作用，加强从教材列选、编写到审查整个教材编审过程的科学管理。

1985年根据教学需要，我们组织制订了“七五”教材编写规划，共列入教材176种。这批教材主要是从经过两遍教学使用、反映较好的讲义中遴选出来的，较好地反映了当前兵工教材的科学性和适合我国情况的先进性，并在不同程度上更新了教材内容，是一批较好的新型教材。

本教材由邱松发主审，经机械电子工业部光学技术教学指导委员会责任编委丁汉章教授复查，兵工教材编审室审定。

限于水平和经验，这批教材的编审出版难免有错误之处，希望广大读者批评指正。

机械电子工业部兵工教材编审室

1989年8月

EA 21/12

前 言

本教材是光学仪器专业的专业教材。根据教学大纲的要求,内容应包括从事光学仪器检校工作的工程技术人员必须掌握的基本理论和方法。教学时数为60学时。

全书共五章,可分成两大部分。第一部分包括第一章、第二章,系统地介绍了光学仪器的调整理论。这部分内容的选择,注意到保持体系在逻辑上的完整性与科学性,避免最终结论过多地依赖数据、图表和公式,力图给读者提供一种简便的准则和判据。这一部分为以后各章提供了必要的理论和公式。第二部分包括第三章、第四章和第五章,全面介绍了各类光学仪器检校的基本内容、原理和方法。第三章介绍了光学仪器单镜筒检校内容。第四章专门介绍双镜筒仪器光轴平行性问题。在这一章中,我们对光轴平行性的目视检测予以了足够的重视。因为无论在工厂还是部队,目视法检测光轴不平行始终是最基本的方法,而有关这方面的系统介绍却很少见到。第五章是测角仪器的三轴误差检校。这部分内容我们没有采用矩阵方法,而是采用球面三角方法。这是考虑到球面三角提供的方法形象直观,与测试仪器的设计原理一致,同时这种方法给出的公式物理意义简明,并有足够的精度。

为便于自学,书中每一部分尽量给出一个系统、完整的概念,力求做到概念明确、方法适用。在内容的选择上,试图反映我们在光学仪器检校方面的经验,希望能从理论与实践的结合上加以总结和提高。

这本教材出版前已进行过若干期教学实践。考虑到微机应用的普及,在附录中给出了光学仪器检校所需若干重要公式的计算机程序。这些程序已有现成软盘配合教学使用,也可向使用本教材的单位和个人提供。

全书内容有许多地方反映了我们在教学、科研工作中形成的观点和看法,由于编者水平所限,不妥之处在所难免,敬请读者批评指正,以便修改。

编者

1991年8月

目 录

第一章 光学仪器理论中的矩阵方法

§ 1.1 反射定律的矢量式和矩阵式	(1)
1.1.1 反射定律的矢量式	(1)
1.1.2 反射定律的矩阵式	(2)
§ 1.2 矢量旋转公式	(4)
1.2.1 用矢量运算表示的矢量旋转公式	(4)
1.2.2 矢量旋转的矩阵式	(5)
§ 1.3 坐标旋转公式	(8)
§ 1.4 棱镜成像公式	(9)
1.4.1 角镜的成像	(9)
1.4.2 反射系统成像的传输矩阵	(12)
1.4.3 反射系统的基本坐标系	(14)
1.4.4 反射系统物像关系的基本性质——相似原理	(17)
1.4.5 反射系统传输矩阵的确定	(19)
1.4.6 旋转反射系统的传输矩阵	(24)
1.4.7 棱镜折射作用对像点位置的影响	(26)
1.4.8 结论	(26)
§ 1.5 透镜成像公式	(27)
1.5.1 透镜系统单元划分	(27)
1.5.2 透镜基本单元的传输矩阵	(28)
1.5.3 透镜系统的传输矩阵	(29)
1.5.4 透镜传输矩阵诸元素的几何意义	(30)
1.5.5 借助矩阵元素表示物像共轭方程	(32)

第二章 光学零件微动理论

§ 2.1 棱镜微量转动对物像的影响	(34)
2.1.1 物像微量转动公式	(34)
2.1.2 像点的小位移公式	(36)
§ 2.2 平行光路中棱镜调整公式	(39)
2.2.1 概述	(39)
2.2.2 平行光路中棱镜调整公式	(39)
2.2.3 极值形态的棱镜调整公式	(41)
2.2.4 棱镜调整的几何作图法	(44)
2.2.5 平面棱镜系统调整的n-p方法	(46)
§ 2.3 会聚光路中棱镜调整公式	(50)

2.3.1	概述	(50)
2.3.2	会聚光路中棱镜调整公式	(51)
2.3.3	极值形态的棱镜调整公式	(54)
2.3.4	平面棱镜系统调整的n-p方法	(58)
§ 2.4	光学系统中棱镜调整公式的应用	(62)
2.4.1	概述	(62)
2.4.2	棱镜对像点位置的影响	(63)
2.4.3	棱镜对物像微动量的转换作用	(63)
2.4.4	透镜对物像微动量的转换作用	(64)
2.4.5	调整公式在系统中的应用	(66)
§ 2.5	透镜系统的调整公式	(69)
2.5.1	透镜轴向微动对像点位置的影响	(69)
2.5.2	透镜横向移动对像点位置的影响	(70)
2.5.3	透镜微动对系统放大率的影响	(73)
2.5.4	双透镜系统的调整特性	(79)
第三章 光学仪器基本光学性能的检校		
§ 3.1	视度的检校	(82)
3.1.1	视度概念	(82)
3.1.2	视度的检验	(83)
3.1.3	视度的校正	(90)
§ 3.2	视差的检校	(90)
3.2.1	视差的概念及其对测量的影响	(90)
3.2.2	视差的检验	(96)
3.2.3	视差的校正	(99)
§ 3.3	放大率的检校	(100)
3.3.1	望远系统放大率的检校	(100)
3.3.2	准直系统放大率的检校	(110)
3.3.3	透镜转像系统(投影系统)放大率的检校	(118)
§ 3.4	出瞳和眼点距离的检验	(121)
3.4.1	出瞳与眼点距离的概念	(121)
3.4.2	检验	(122)
§ 3.5	光瞳切割与视场残缺的检校	(124)
3.5.1	概述	(124)
3.5.2	光瞳切割	(124)
3.5.3	视场残缺	(125)
§ 3.6	像面偏、像倾斜和分划倾斜的检校	(129)
3.6.1	像面偏检校	(129)
3.6.2	像倾斜检校	(131)
3.6.3	分划倾斜检校	(134)

§ 3.7 望远系统分辨率与像质检验	(137)
3.7.1 分辨率与像质	(137)
3.7.2 分辨率的检验	(137)
3.7.3 像质的检验	(139)
第四章 双眼仪器光轴不平行的检校	
§ 4.1 双眼仪器光轴平行性的概念	(141)
4.1.1 光轴的概念	(141)
4.1.2 光轴不平行的现象	(141)
4.1.3 对光轴不平行的限制	(142)
§ 4.2 光轴不平行性的检查	(143)
4.2.1 目测法	(143)
4.2.2 光轴仪法	(146)
§ 4.3 铰链式双眼仪器光轴的检校	(147)
4.3.1 光轴误差量的判断	(147)
4.3.2 望远镜光轴不平行的校正	(156)
4.3.3 炮队镜光轴不平行的校正	(168)
§ 4.4 目镜筒回转的双眼仪器光轴检校	(173)
4.4.1 光轴误差量的含义及其校正特点	(173)
4.4.2 变倍望远镜光轴校正	(179)
4.4.3 一米测距机光轴校正	(177)
第五章 测角仪器三轴误差的检校	
§ 5.1 概述	(188)
5.1.1 测角仪器的任务及其校正要求	(188)
5.1.2 测角仪器分类	(189)
5.1.3 通用测角仪	(189)
§ 5.2 测角仪器三轴误差的普遍公式	(191)
5.2.1 视轴误差对测量的影响	(191)
5.2.2 横轴误差对测量的影响	(195)
5.2.3 竖轴误差对测量的影响	(197)
5.2.4 结论	(200)
§ 5.3 瞄准镜管回转的测角仪器	(201)
5.3.1 误差公式	(202)
5.3.2 竖轴误差的检查与调校	(205)
5.3.3 视轴误差的检查与调校	(209)
5.3.4 横轴误差的检查与调校	(212)
5.3.5 结论	(215)
§ 5.4 头部反射镜俯仰的测角仪器	(216)
5.4.1 误差公式	(217)
5.4.2 竖轴倾斜量的检查与校正	(223)

5.4.3	反射镜位置误差与横轴误差的补偿	(224)
5.4.4	视轴基线误差的检校	(227)
5.4.5	结论	(228)
§ 5.5	周视型测角仪器	(228)
5.5.1	误差公式	(229)
5.5.2	梯形棱镜中心差的检校	(237)
5.5.3	视轴基线误差的检校	(240)
5.5.4	导筒回转轴倾斜与蜗轮筒倾斜的补偿	(243)
5.5.5	反射镜位置误差与横轴误差的补偿	(245)
5.5.6	结论	(246)
附录一	棱镜调整程序	(247)
附录二	透镜调整程序	(251)
附录三	望远镜光轴误差校正量计算程序	(255)
附录四	球面三角学基本知识	(259)

第一章 光学仪器理论中的矩阵方法

在光学仪器原理和调校理论中普遍地采用了矢量运算和矩阵的数学工具,借助这些数学工具能够将光学零件成像的规律表达成更加普遍和适用的形式。

§ 1.1 反射定律的矢量式和矩阵式

1.1.1 反射定律的矢量式

当光线进入光学仪器后,往往要受到多次反射,由于反射面的法线并不都处在同一平面内,因而反射光线一般呈空间折线状态。为了描述空间光线的行迹,必须将反射定律表达成矢量式。

设在某次反射中,入射光线的方向用单位矢量 $\mathbf{A}$ 表示,反射光线方向用单位矢量 $\mathbf{A}'$ 表示,反射面的法线用 $\mathbf{N}$ 表示,如图1-1所示。该法线亦是一个单位矢量,并且约定指向光线反射的一侧。

反射定律的全部内容:入射光线 $\mathbf{A}$ 和反射光线 $\mathbf{A}'$ 与法线 $\mathbf{N}$ 位于同一平面内,入射光线和反射光线分居于法线两侧,并且它们与法线的夹角 i 和 i' 相等。

矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{A}'$ 及 $\mathbf{N}$ 无疑相交在平面上的 O 点,我们所不明确的仅仅是它们在空间的指向。因此,可以把这些矢量看作是自由矢量。为了找出它们之间的指向关系,将矢量 $\mathbf{A}$ 移至 $\vec{OP}$ 位置,显然可以得出

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \vec{PP'}$$

因为 $\vec{PP'}$ 方向与 $\mathbf{N}$ 一致,所以

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + |\vec{PP'}| \mathbf{N}$$

注意矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{N}$ 的点积公式

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}) = |\mathbf{A}| |\mathbf{N}| \cos(180^\circ - i) = -\cos i$$

而 $|\vec{PP'}| = 2|\mathbf{A}| \cos i = 2\cos i$

所以 $|\vec{PP'}| = -2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{N})$

代入上式中得

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - 2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \quad (1-1)$$

这就是反射定律的矢量式。无论入射光线 $\mathbf{A}$ 和反射面法线 $\mathbf{N}$ 是什么空间指向,借助该式都能方便地确定出反射光线 $\mathbf{A}'$ 。

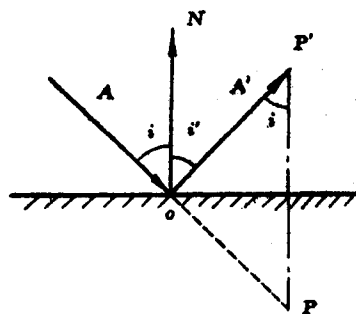


图 1-1

例1-1 试求入射光线 A 经直角棱镜斜面反射后, 反射光线的空间指向, 见图1-2。

解: 首先引入合适的计算系统 $o-xyz$, 坐标面 $o-xy$ 与矢量 A 、 N 共面, x 轴与 A 同向。在此坐标系内写出入射光线 A 、反射面法线 N 的方向:

$$A = i$$

$$N = -\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

然后计算点积

$$2(A \cdot N) = -\sqrt{2}$$

代入(1-1)式中

$$A'_x = A_x - 2(A \cdot N)N_x = 1 + \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$A'_y = A_y - 2(A \cdot N)N_y = 0 + \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1$$

$$A'_z = A_z - 2(A \cdot N)N_z = 0$$

例1-2 试确定梯形棱镜转动 ϕ 角后, 直立物体 A 的像 A' 所在空间指向。

解: 光线经梯形棱镜, 不但经受底面的一次反射, 而且在入射、出射面上受到两次折射。这种折射作用等效于光线通过该反射棱镜展开形成的玻璃平板。显然, 这两次折射不会影响光线行进方向, 故在反射棱镜中凡涉及光线指向的问题, 一般不必考虑入射、出射面的折射作用。

引入图1-3所示坐标系, x 轴与梯形棱镜光轴一致, y 轴与直立物体 A 指向同。梯形棱镜主截面由 $o-xy$ 平面绕 x 轴转动 ϕ 角后, 底面法线 N 在 $o-xyz$ 系中指向

$$N = \cos\phi j + \sin\phi k$$

物体 A 指向 $A = j$

$$\text{计算 } 2(A \cdot N) = 2\cos\phi$$

代入(1-1)式

$$A'_x = A_x - 2(A \cdot N)N_x = 0$$

$$A'_y = A_y - 2(A \cdot N)N_y = -\cos 2\phi$$

$$A'_z = A_z - 2(A \cdot N)N_z = -\sin 2\phi$$

结果表明: 物像 A' 将沿梯形棱镜同样的旋转方向转动, 且转角是它的两倍。

1.1.2 反射定律的矩阵式

反射定律的矢量式(1-1)意味着反射光线 A' 是入射光线 A 的线性变换。因此, 可进一

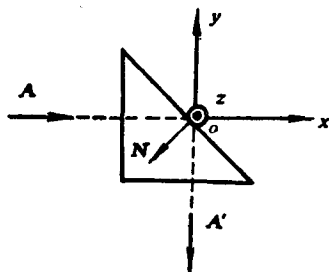


图 1-2

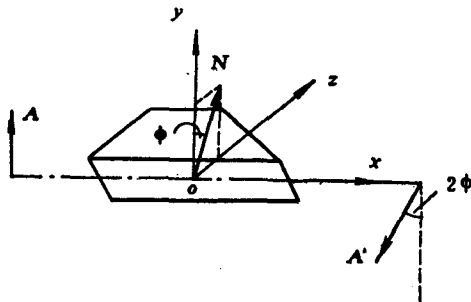


图 1-3

步将它改写成线性变换所共有的矩阵形式。这种形式特别适用于入射光线经过一系列反射的系统。

将(1-1)式用矢量投影表示出

$$A'_x = A_x - 2(A_x N_x + A_y N_y + A_z N_z) N_x$$

$$A'_y = A_y - 2(A_x N_x + A_y N_y + A_z N_z) N_y$$

$$A'_z = A_z - 2(A_x N_x + A_y N_y + A_z N_z) N_z$$

按 A_x 、 A_y 、 A_z 的线性组合重写上式

$$A'_x = (1 - 2N_x^2) A_x - 2N_x N_y A_y - 2N_x N_z A_z$$

$$A'_y = -2N_y N_x A_x + (1 - 2N_y^2) A_y - 2N_y N_z A_z$$

$$A'_z = -2N_z N_x A_x - 2N_z N_y A_y + (1 - 2N_z^2) A_z$$

引入矩阵符号 R

$$R = \begin{pmatrix} 1 - 2N_x^2 & -2N_x N_y & -2N_x N_z \\ -2N_y N_x & 1 - 2N_y^2 & -2N_y N_z \\ -2N_z N_x & -2N_z N_y & 1 - 2N_z^2 \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

如果将入射光线 A 、出射光线 A' 也表示成两个列向量矩阵式,则反射定律具有如下矩阵关系式

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

为简便今后用符号 (A') 、 (A) 表示矢量 A' 、 A 的矩阵式,于是上式成为

$$(A') = R(A) \quad (1-3)$$

(1-3)式就是反射定律的矩阵式, R 称为反射面的“传输矩阵”。

例1-3 试写出图1-2坐标系中反射面的传输矩阵 R ,并由(1-3)式确定反射光线 A' 。

解: 根据 $N_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $N_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $N_z = 0$

代入(1-2)式得

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

又因

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以由(1-3)式得

$$(A') = R(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例1-4 试确定图1-3坐标系中反射面的传输矩阵 R ，并根据(1-3)式求反射光线 A' 。

解：根据 $N_x = 0$ $N_y = \cos\phi$ $N_z = \sin\phi$

由(1-2)式得出

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ 0 & -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix}$$

同时

$$(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

代入(1-3)式即得

$$(A') = R(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos 2\phi \\ -\sin 2\phi \end{pmatrix}$$

§ 1.2 矢量旋转公式

1.2.1 用矢量运算表示的矢量旋转公式

常常会遇到这样的问题：代表一条光线或一根线段的矢量 A' ，需要绕着某个转轴转动 ϕ 角，转换成新矢量 A' 。试问，如何确定新矢量 A' 的空间指向？

为了解决上述问题，我们用单位矢量 P 表示转轴空间位置，并按右手螺旋法则规定 ϕ 角的正向，如图1-4所示。引入一个右手坐标系 $o-xyz$ ，假定 z 轴与 P 指向一致。在坐标系内 A 、 A' 表达式为

$$A = |A| \sin\theta \cos\phi_0 \cdot i$$

$$+ |A| \sin\theta \sin\phi_0 \cdot j$$

$$+ |A| \cos\theta \cdot k$$

$$A' = |A'| \sin\theta \cos(\phi + \phi_0) \cdot i$$

$$+ |A'| \sin\theta \sin(\phi + \phi_0) \cdot j$$

$$+ |A'| \cos\theta \cdot k$$

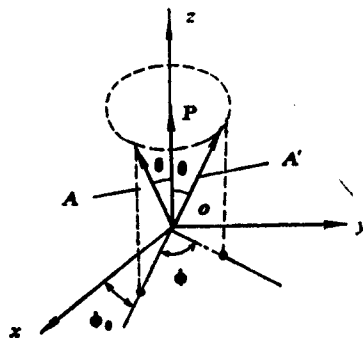


图 1-4

矢量在旋转中长度并不发生变化，即 $|A| = |A'|$ ，所以

$$\begin{aligned}
A' - A \cos \phi &= [|A| \sin \theta \cos (\phi + \phi_0) \\
&\quad - |A| \sin \theta \cos \phi_0 \cos \phi] i \\
&\quad + [|A| \sin \theta \sin (\phi_0 + \phi) - |A| \sin \theta \sin \phi_0 \cos \phi] j \\
&\quad + [|A| \cos \theta - |A| \cos \theta \cos \phi] k \\
&= -|A| \sin \theta \sin \phi_0 \sin \phi i + |A| \sin \theta \cos \phi_0 \sin \phi j \\
&\quad + |A| \cos \theta (1 - \cos \phi) k \\
&= |A| \cos \theta (1 - \cos \phi) k + |A| \sin \phi (\sin \theta \cos \phi_0 j - \sin \theta \sin \phi_0 i)
\end{aligned}$$

注意以下恒等式

$$P = k$$

$$(P \cdot A) = |P| |A| \cos \theta = |A| \cos \theta$$

$$A \times P = |A| \sin \theta \sin \phi_0 i - |A| \sin \theta \cos \phi_0 j$$

代入上式中得

$$A' - A \cos \phi = (1 - \cos \phi) (P \cdot A) P + \sin \phi (P \times A)$$

或

$$A' = \cos \phi A + (1 - \cos \phi) (P \cdot A) P + \sin \phi (P \times A) \quad (1-4)$$

(1-4)式就是旋转矢量的表达式。该式与坐标系的选择无关，是一个矢量运算公式。

1.2.2 矢量旋转的矩阵式

下面讨论(1-4)式在任意坐标系中的解析表达式。为此，将(1-4)式用图1-5所示的坐标系中的投影表示

$$\begin{aligned}
A'_x &= \cos \phi A_x + (1 - \cos \phi) (P_x A_x + P_y A_y + P_z A_z) P_x \\
&\quad + \sin \phi (P_y A_z - P_z A_y) \\
A'_y &= \cos \phi A_y + (1 - \cos \phi) (P_x A_x + P_y A_y + P_z A_z) P_y \\
&\quad + \sin \phi (P_z A_x - P_x A_z) \\
A'_z &= \cos \phi A_z + (1 - \cos \phi) (P_x A_x + P_y A_y + P_z A_z) P_z \\
&\quad + \sin \phi (P_x A_y - P_y A_x)
\end{aligned}$$

将以上各式展开并按 A_x 、 A_y 、 A_z 的线性组合归纳

$$\begin{aligned}
A'_x &= (\cos \phi + 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} P_x^2) A_x \\
&\quad + (-\sin \phi P_z + 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} P_y P_x) A_y \\
&\quad + (\sin \phi P_y + 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} P_z P_x) A_z
\end{aligned}$$

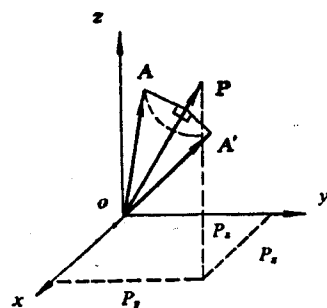


图 1-5

$$A'_y = (\sin\phi P_z + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_xP_y) A_x$$

$$+ (\cos\phi + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_z^2) A_y$$

$$+ (-\sin\phi P_x + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_xP_y) A_z$$

$$A'_z = (-\sin\phi P_y + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_xP_z) A_x + (\sin\phi P_x + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_yP_z) A_y$$

$$+ (\cos\phi + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_z^2) A_z$$

以上线性变换式可以简洁地概括成一个矩阵乘积。为此引入符号 S ，称为“矢量旋转矩阵”。

$$S = \begin{pmatrix} \cos\phi + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_x^2 & -\sin\phi P_z + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_xP_y & \sin\phi P_y + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_xP_z \\ \sin\phi P_z + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_xP_y & \cos\phi + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_y^2 & -\sin\phi P_x + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_yP_z \\ -\sin\phi P_y + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_xP_z & \sin\phi P_x + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_yP_z & \cos\phi + 2\sin^2\frac{\phi}{2}P_z^2 \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

上式如在左手坐标系中使用 ϕ 值应变号。

线性变换可以表示为

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

或简写成

$$(A') = S(A) \quad (1-6)$$

(1-6) 式就是矢量旋转公式的矩阵式。 S 称为矢量旋转矩阵。它是一个决定于转轴 P 和转角 ϕ 的矩阵。 (A') 、 (A) 表示用矢量 A' 、 A 在坐标系内投影值组成的列向量矩阵式。

当转轴 P 与坐标轴重合时，情况特别简单。

绕 x 轴转动 $P_x = 1 \quad P_y = P_z = 0$

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_x & -\sin\phi_x \\ 0 & \sin\phi_x & \cos\phi_x \end{pmatrix} \quad (1-7)$$

绕 y 轴转动 $P_y = 1 \quad P_x = P_z = 0$

$$S_y = \begin{pmatrix} \cos\phi_y & 0 & \sin\phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi_y & 0 & \cos\phi_y \end{pmatrix} \quad (1-8)$$

绕z轴转动 $P_z = 1$ $P_y = P_x = 0$

$$S_z = \begin{pmatrix} \cos\phi_z & -\sin\phi_z & 0 \\ \sin\phi_z & \cos\phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-9)$$

如果矢量依次绕x、y、z轴转动 ϕ_x 、 ϕ_y 、 ϕ_z ，那么旋转矩阵S应为

$$S = S_z S_y S_x \quad (1-10)$$

根据矩阵乘法运算不满足交换律的性质，显然新矢量 A' 的位置与矢量绕坐标轴转动顺序是有关的。

例1-5 试求图1-6所示直角棱镜，绕z轴转动 ϕ 角后，直立物体A的像 A' 所在空间指向。

解：设棱镜未转动前主截面与o—xz平面重合，法线 N 与x轴相交 45° ，棱镜绕z轴转动 ϕ 角后法线位置改变为 N' 。该量可根据(1-6)式确定，因为

$$S_z = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(N) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

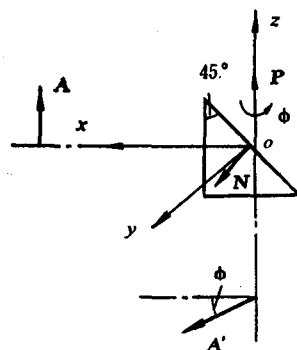


图 1-6

$$\text{所以 } (N') = S_z (N) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -1 \end{pmatrix}$$

根据公式(1-1)可确定 A' 指向： $A' = A - 2(A \cdot N')N'$

这里 $2(A \cdot N') = -\sqrt{2}$ ，代入上式中得到

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式表明直立物像 A' 在xoy平面内与棱镜以相同角度转动。

§ 1.3 坐标旋转公式

上一节研究了在同一个坐标系内矢量 A 与旋转后新矢量 A' 的关系式。现在要讨论另一类问题,即讨论同一个矢量 A 在两个不同的坐标系 $o-xyz$ 、 $o'-x'y'z'$ 内的表达式。其中坐标系 $o'-x'y'z'$ 称动坐标系。它是将定坐标系 $o-xyz$ 绕 P 方向转动 ϕ 角后得到的,如图1-7。

显然,上述问题就是数学中的坐标变换。这里需要注意的是动坐标是由绕 P 轴旋转 ϕ 角后而得的。

问题的解答可借助上节的结果。首先假定矢量 A 随坐标系一起绕 P 转动 ϕ 角后处于新位置 A' ,在 o' 系中 A 与 A' 的关系就是(1-6)式

$$\begin{pmatrix} A'_{x'} \\ A'_{y'} \\ A'_{z'} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix}$$

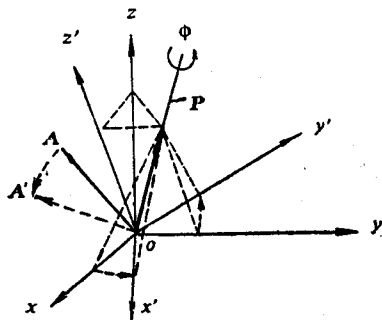


图 1-7

矢量 A' 在 o' 系内的投影值与矢量 A 在 o 系内的投影值相同

$$\begin{pmatrix} A'_{x'} \\ A'_{y'} \\ A'_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

合并以上两式

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix}$$

上式的逆转变换

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

上式的导出是借助了在 o' 系中描述的矢量 A 与 A' 的旋转公式,因此 S^{-1} 矩阵式中各元素是由矢量 P 在 o' 系的投影值 $P_{x'}$ 、 $P_{y'}$ 、 $P_{z'}$ 所表示的。但是,由于坐标系 o' 是将 o 绕 P 轴转动 ϕ 角而得,所以 $P_{x'} = P_x$, $P_{y'} = P_y$, $P_{z'} = P_z$,因此用 P_x 、 P_y 、 P_z 元素所表示的矩阵 S 也是完全相同。

由此可见,任意一个矢量,在两坐标系中投影值的坐标变换矩阵,就是动坐标系绕 P 轴旋转时的矢量旋转矩阵 S 的逆矩阵。矩阵元素的值无论用动坐标来描述,还是用定坐标来描述都