普通高等教育测绘类规划教材

252

测量数据统计分析

TB22
7754

CELIANGSHUJU TONGJIFENXI

陶本藻 编著

测绘出版社

前　言

测量数据的处理，长期以来主要是平差处理。近一、二十年来，随着测绘及其相关学科的发展和生产实践的需要，在测量数据统计分析方面出现了不少新理论和新方法，极大地丰富和充实了测量数据处理的内容。统计分析大致包括统计估计、统计检验和误差分析，是以数理统计理论为基础的。

考虑到测量数据的统计估计理论和方法在许多测量平差著作中讨论过，本书着重联系测量实际问题论述有关统计检验和误差分析方面的新进展。

本书的第一章，概括了现有的各种平差模型，主要从最优线性无偏估计原则出发，给出了参数估计公式，重点介绍了混合模型和具有奇异方差-协方差观测模型，它们是两种概括模型，前一模型是从 Koch 的著作[7]移植的，后一模型在教科书中尚不多见。第二章论述了各种常用平差模型的统计假设检验方法，给出了检验统计量，进行了统计分析。作者提出的线性假设检验法的扩充，作为统计检验的一种统一方法也列入了本章。第三章论述了模型误差理论，分析了函数模型误差和随机模型误差对参数估计的影响，讨论了模型误差的定位、假设检验等问题。第四章论述了控制网质量的统计分析方法，着重讨论了控制网的应变强度分析、变形可监测性分析、基准分析和变换以及稳定性分析等。第五章论述了变形测量数据的统计分析方法，着重介绍了位移模型和应变模型的建立，模型参数的估计、假设检验和筛选，给出了应变分析的模型误差法

和稳健迭代权法等。所有这些内容都是当前国内外测绘界感兴趣的热门课题。

本书附录是数学基础知识，是研究测量数据统计分析所必须的。

测量数据的统计分析，作为测绘专业研究生的一门课程，是 1987 年开设的，同时由武汉测绘科技大学作为讲义油印出版。作者通过对三届研究生的教学实践，并吸收有关的新成果以及本人研究成果，在讲义基础上改写成本书。

本书虽是以测绘专业研究生为对象编写的，是一本研究生教材。考虑到广大测绘专业技术人员的需要，在阐述理论和方法时，尽量通俗易懂并说明实用方法。测量数据统计分析，也是一门应用数学范畴的课程，编写时也考虑了非测绘专业技术人员的需要。因此，本书可供测绘专业的研究生，测绘专业的师生、研究人员和技术人员，以及非测绘专业从事数据处理和统计分析的广大师生、技术人员和研究人员参考。

由于“测量数据的统计分析”作为一门课程的时间还很短，同类教材尚未见到，因此，本书的体系、包含的内容必存在不少问题，恳请读者能给予批评和帮助。

最后要感谢测绘教材委员会大地测量专业组为本书组织了审查和提出了修改意见，感谢为本书出过力的硕士研究生。

作　　者

写于　武汉测绘科技大学

大地测量系

1990 年 5 月

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　平差模型及其参数估计

建立平差模型，进行参数估计，是测量数据平差处理的主要内容。

平差模型包含函数模型和随机模型，后两模型的参数都是平差模型的待估参数。

平差模型有两大类，一是满秩平差模型，一是奇异平差模型。前者是指函数模型中的系数阵和随机模型中的方差-协方差阵均为满秩阵，后者是指系数阵或(和)方差-协方差阵不满秩。

按测量平差方法，具体的平差模型有，常规的满秩平差模型；滤波、拟合推估满秩平差模型；系数阵秩亏的自由网平差模型；具有奇异方差-协方差阵的平差模型等。前三种平差模型在大学本科测量平差教科书中已有详细论述，不是本章的重点。

本章着重介绍混合模型、具有奇异方差-协方差阵的平差模型及其参数估计。满秩平差模型可用混合模型综合，具有奇异方差-协方差阵的平差模型则是测量平差的一种统一模型。

在推导平差模型参数估计公式时，常从最优线性无偏估计原则出发，这也是本章内容的一个特点。

§1-1 最优线性无偏估计

带约束的高斯-马尔柯夫平差模型是：

$$l = A\bar{X} + \Delta \quad E(\Delta) = 0 \tag{1-1}$$

$$D(l) = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \tag{1-2}$$

$$C^T \bar{X} = W \tag{1-3}$$

其中：l 是 $n\times1$ 向量，A 是 $n\times t$ 阵，$\bar{X}$ 是 $t\times1$ 向量，C^T 是 $d\times t$ 阵。

设 $R(C^T)=d$，$R(A)=t$，则上述是满秩平差模型。

一、参数的最小二乘估计

为从方程组

$$V = AX - l \tag{1-4}$$

$$C^T X = W$$

$$V^T P V = \min$$

估计参数，要组成拉氏函数

$$\varphi = V^T P V + 2K^T\ (C^T X - W)$$

关于 X 的微商使其为零，得法方程为

$$\left.\begin{aligned} NX_c + CK &= A^T P l \\ C^T X_c &= W \end{aligned}\right. \tag{1-5}$$

式中 $N=A^TPA$。按分块矩阵求逆公式得

$$X_c = (N^{-1} - N^{-1}C(C^TN^{-1}C)^{-1}C^TN^{-1})A^TPl + N^{-1}C(C^TN^{-1}C)^{-1}W$$

$$K = (C^TN^{-1}C)^{-1}C^TN^{-1}A^TPl - (C^TN^{-1}C)^{-1}W$$

式中 X_c 表示考虑约束（1-3）的解，令

$$X = N^{-1}A^TPl \tag{1-6}$$

为单由（1-4）所得的最小二乘解，上式可写成

$$
\begin{aligned}
X_c &= X - N^{-1}CK \\
&= X - N^{-1}C(C^TN^{-1}C)^{-1}(C^TX - W)
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}7)
$$

由此可知，X_c 是由 X 与顾及约束的影响项之和得出，项 (C^TX-W) 表示将 X 代替约束中 X_c 而产生的差异，此差异值决定了约束条件的贡献大小。

残差

$$V_c = AX_c - l \qquad (1\text{-}8)$$

单位权方差 σ_0^2 的无偏估计为

$$\hat{\sigma}_0^2 = V_c^TPV_c/n - (t - d) \qquad (1\text{-}9)$$

由（1-7）式可得协因数阵为

$$Q_{X_cX_c} = Q_{XX} - Q_{XX}C(C^TQ_{XX}C)^{-1}C^TQ_{XX} \qquad (1\text{-}10)$$

式中顾及了 X 的协因数阵

$$Q_{XX} = N^{-1} \qquad (1\text{-}11)$$

二、最优线性无偏估计

如果估计量是线性模型中所估参数的无偏估计，且具有方差最小性，则称该估计量为最优线性无偏估计（$BLUE$）。

设模型（1-1）、（1-2）、（1-3）的最优线性无偏估计为

$$F^TX_c = \alpha^Tl + \beta^TW \qquad (1\text{-}12)$$

由无偏性知

$$
\begin{aligned}
E(F^TX_c) &= \alpha^TE(l) + \beta^TE(W) = \alpha^TA\overline{X}_c + \beta^TC^T\overline{X}_c \\
&= F^T\overline{X}_c
\end{aligned}
$$

故存在

$$\alpha^TA + \beta^TC^T = F^T \qquad (1\text{-}13)$$

这是线性函数 $F^T\overline{X}_c$ 的无偏估计 F^TX_c 应满足的无偏条件。

F^TX_c 的方差为

$$D(F^T X_c) = \sigma_0^2(\alpha^T Q\alpha) \tag{1-14}$$

在满足无偏条件下要使 X_c 的方差最小，组成拉氏函数

$$\varphi=\alpha^T Q\alpha-\alpha K^T \ (\alpha^T A+\beta^T A^T-F^T)$$

关于 α 和 β 求导并令其为零，并顾及（1-13）得

$$\alpha^T Q - K^T A^T = 0 \tag{a}$$

$$K^T C = 0 \tag{b}$$

$$A^T\alpha + C\beta = F \tag{c}$$

解之，由（a）：

$$\alpha = PAK \tag{d}$$

代入（c）

$$NK + C\beta = F$$

$$K = N^{-1}(F - C\beta) \tag{e}$$

代入（b）

$$C^T N^{-1}F - C^T N^{-1}C\beta = 0$$

$$\beta = (C^T N^{-1}C)^{-1}C^T N^{-1}F \tag{f}$$

将（e）、（f）代入（d），并转置得

$$\alpha^T = F^T N^{-1}A^T P - F^T N^{-1}C(C^T N^{-1}C)^{-1}C^T N^{-1}A^T P \tag{g}$$

将（g）、（f）代入（1-12）式，即得 $F^T\bar{X}$ 的最优线性无偏估计为

$$F^T X_c = F^T[X - N^{-1}C(C^T N^{-1}C)^{-1}(C^T X - W)] \tag{1-15}$$

将（g）式代入（1-14）可得 $F^T X_c$ 的方差为

$$D(F^T X_c) = \sigma_0^2 F^T[Q_{XX} - Q_{XX}C(C^T Q_{XX}C)^{-1}C^T Q_{XX}]F \tag{1-16}$$

由此可知，参数 $\bar{X}_c$ 的估计 X_c 和 $Q_{X_c X_c}$ 就是（1-7）和（1-10）式。

由（1-7）式直接可得

$$E(X_c) = (N^{-1} - N^{-1}C(C^T N^{-1}C)^{-1}C^T N^{-1})A^T PE(l)$$

$$
\begin{aligned}
&+ N^{-} C(C^T N^{-1} C)^{-1} E(W) \\
= &(N^{-1} - N^{-1} C(C^T N^{-1} C)^{-1} C^T N^{-1}) N \bar{X}_c \\
&+ N^{-} C(C^T N^{-1} C)^{-1} C^T \bar{X}_c \\
= &\bar{X}_c
\end{aligned}
\tag{1-17}
$$

由（1-16）式知

$$
D(X_c) = \min \tag{1-18}
$$

对于带约束的高斯-马尔柯夫满秩模型，其参数及其线性函数均为最优线性无偏估计。

特例 对于高斯-马尔柯夫满秩模型（1-1）和（1-2）的最优线性无偏估计是

$$
X = N^{-1} A^T P l \quad Q_{XX} = N^{-1} \tag{1-19}
$$

$$
\hat{\sigma}_0^2 = V^T PV / n - t \tag{1-20}
$$

用最优无偏估计法直接估计平差模型参数，导出计算公式，已经成为阐述测量数据平差处理理论的一个独立系统。其推导结果与最小二乘估计相同。

§1-2 混合模型

一、函数模型原理

$$
\underset{n1}{l} = \underset{nt\,t1}{A\bar{X}} + \underset{nm\,m1}{B\bar{Y}} \tag{1-21}
$$

式中 $R(A)=t$，$\bar{X}$ 为非随机参数；$R(B)=n$，$\bar{Y}$ 为随机参数。

随机模型是：

$$
E(\bar{Y}) = 0 = \xi_{\bar{Y}}, \quad D(\bar{Y}) = \sigma_0^2 Q_{\bar{Y}\bar{Y}} \tag{1-22}
$$

这个模型与高斯-马尔柯夫模型（1-1）、（1-2）的区别是用 $B\bar{Y}$ 代后一模型中的随机误差 Δ。

模型（1-21）、（1-22），称为混合模型，它是高斯-马尔柯

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

夫模型的扩充。如果观测数据可以划分为趋势线性项 $A\bar{X}$ 和随机误差线性函数 $B\bar{Y}$，就可建立上述的混合模型。例如

$$l_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_tx_t + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_u\varepsilon_u$$

$$(i = 1,2,\cdots n)$$

若有

$$l = Bl' + l_0$$

则 $\bar{Y}$ 可视为 l' 的误差，$B\bar{Y}$ 视为 l 的误差。

取（1-21）的期望和方差，得

$$E(l) = AE(\bar{X}) + BE(\bar{Y}) = A\bar{X} = \xi_l \tag{1-23}$$

$$D(l) = D(B\bar{Y}) = \sigma_0^2 BQ_{\bar{Y}\bar{Y}}B^T = \sigma_0^2 Q_{ll} = D_{ll} \tag{1-24}$$

$\bar{Y}$ 与 l 相关，按协方差定义有

$$\begin{aligned} D(\bar{Y},l) = D_{\bar{Y}l} &= E(\bar{Y} - \xi_{\bar{Y}})(l - \xi_l)^T = E(\bar{Y}(B\bar{Y})^T) \\ &= D(\bar{Y})B^T = \sigma_0^2 Q_{\bar{Y}\bar{Y}}B^T = \sigma_0^2 Q_{\bar{Y}l} \end{aligned} \tag{1-25}$$

及

$$Q_{\bar{Y}l} = Q_{\bar{Y}\bar{Y}}B^T \tag{1-26}$$

现求模型参数的最优线性无偏估计。

1. 对 $\bar{X}$ 进行估计。

令 $B\bar{Y} = \Delta$，（1-21）式为

$$l = A\bar{X} + \Delta$$

顾及（1-22）、（1-23）式，即知此为高斯-马尔柯夫模型，于是 $\bar{X}$ 的最优线性无偏估计为

$$X = (A^TQ_{ll}^{-1}A)^{-1}A^TQ_{ll}^{-1}l \tag{1-27}$$

$$D(X) = \sigma_0^2 Q_{XX} = \sigma_0^2(A^TQ_{ll}^{-1}A)^{-1} \tag{1-28}$$

2. 对 $\bar{Y}$ 进行估计

由（1-21）式得

$$B\bar{Y} = l - A\bar{X} = \bar{l} \tag{1-29}$$

因 $\xi_l = A\bar{X}$，$\bar{l} = l - \xi_l = l - A\bar{X}$，故 $\bar{l}$ 为 l 的中心化变量，$\xi_{\bar{l}} = 0$。

设 $B\overline{Y}$ 的最优无偏估计为

$$B Y = a_0 + a^T \bar{l} \qquad (1\text{-}30)$$

若 BY 为 $B\overline{Y}$ 的无偏估计，则有

$$E(BY) = a_0 + a^T \xi_l = BE(Y) = B\xi_Y$$

无偏条件为

$$a_0 + a^T \xi_l - B\xi_{\overline{Y}} = 0 \qquad (1\text{-}31)$$

因 Y 是随机量，BY 亦为随机量，为求 $B\overline{Y}$ 的估计量精度应求其误差向量的方差，而不能直接由（1-30）式求估计量 BY 的精度。BY 的误差向量为

$$\Delta_{BY} = BY - B\overline{Y} \qquad (1\text{-}32)$$

于是

$$\begin{aligned} D(\Delta_{BY}) &= D(BY - B\overline{Y}) = D(a_0 + a^T \bar{l} - B\overline{Y}) \\ &= a^T D(\bar{l}) a - a^T D_{\bar{l}\overline{Y}} B^T - BD_{\overline{Y}\bar{l}} a - BD(\overline{Y}) B^T \\ &= \sigma_0^2 (a^T Q_{\bar{l}\bar{l}} a - a^T Q_{\bar{l}\overline{Y}} B^T - BQ_{\overline{Y}\bar{l}} a + BQ_{\overline{Y}\overline{Y}} B^T) \end{aligned} \qquad (1\text{-}33)$$

为求其最小，作拉氏函数并求导，即

$$\begin{aligned} \varphi = {} & a^T Q_{\bar{l}\bar{l}} a - a^T Q_{\bar{l}\overline{Y}} B^T - BQ_{\overline{Y}\bar{l}} a + BQ_{\overline{Y}\overline{Y}} B^T \\ & -2K^T \ (a_0 + a^T \xi_l - B\xi_{\overline{Y}}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 2a^T Q_{\bar{l}\bar{l}} - BQ_{\overline{Y}\bar{l}} - BQ_{\overline{Y}\bar{l}} - 2K^T \xi_l^T = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = -2K^T = 0, \ K = 0$$

由此可得

$$Q_{\bar{l}\bar{l}} a = Q_{\bar{l}\overline{Y}} B^T$$

$$a = Q_{\bar{l}\bar{l}}^{-1} Q_{\bar{l}\overline{Y}} B^T \qquad (1\text{-}34)$$

代入无偏条件（1-31）得

$$a_0 = B\xi_Y - BQ_{\overline{Y}\bar{l}} Q_{\bar{l}\bar{l}}^{-1} \xi_l \qquad (1\text{-}35)$$

将（1-34）、（1-35）代入（1-30）式即得 $B\overline{Y}$ 的最优线性

无偏估计为

$$BY = B(\xi_{\bar{Y}} + Q_{\bar{Y}\bar{l}}Q_{\bar{l}\bar{l}}^{-1}(l - \xi_{\bar{l}})) \tag{1-36}$$

或

$$BY = B(\xi_{\bar{Y}} + D_{\bar{Y}\bar{l}}D_{\bar{l}\bar{l}}^{-1}(l - \xi_{\bar{l}})) \tag{1-37}$$

将 (1-34) 式代入 (1-33) 式，经整理可得

$$D(\Delta_{BY}) = B(D_{\bar{Y}\bar{Y}} - D_{\bar{Y}\bar{l}}D_{\bar{l}\bar{l}}^{-1}D_{\bar{l}\bar{Y}})B^T \tag{1-38}$$

考虑

$$E(Y) = \xi_{\bar{Y}} + D_{\bar{Y}\bar{l}}D_{\bar{l}\bar{l}}^{-1}(E(\bar{l}) - \xi_{\bar{l}}) = \xi_{\bar{Y}}$$

$\bar{Y}$ 的最优线性无偏估计为.

$$Y = \xi_{\bar{Y}} + D_{\bar{Y}\bar{l}}D_{\bar{l}\bar{l}}^{-1}(\bar{l} - \xi_{\bar{l}}) \tag{1-39}$$

顾及 $\bar{l}=l-A\bar{X}$，$\bar{X}$ 非随机，即

$$\xi_{\bar{l}} = 0, D_{\bar{l}\bar{l}} = D_{ll}, D_{\bar{Y}\bar{l}} = D_{\bar{Y}l}$$

和 $\xi_{\bar{Y}}=0$，上式为

$$Y = D_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}(l - A\bar{X}) \tag{1-40}$$

但式中 $\bar{X}$ 未知，用其最优线性无偏估计 X 代替，得

$$Y = D_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}(l - AX) = Q_{\bar{Y}l}Q_{ll}^{-1}(l - AX) \tag{1-41}$$

这样的代替是可以的。因为

$$\begin{aligned} AX + BY &= AX + BD_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}(l - AX) \\ &= BD_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}l + (I - BD_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1})AX = l \end{aligned}$$

式中顾及了 (1-25) 和 (1-24) 式，即

$$D_{\bar{Y}l} = D_{\bar{Y}\bar{Y}}B^T$$

$$BD_{\bar{Y}l} = BD_{\bar{Y}\bar{Y}}B^T = D_{ll}$$

亦即用 X、Y 代 $\bar{X}$、$\bar{Y}$，模型 (1-21) 成立。

现在证明，混合模型中线性组合 $\alpha^T\bar{X}-\beta^T\bar{Y}$ 的最优无偏估计是 $\alpha^TX+\beta^TY$，而 X、Y 分别由 (1-27)、(1-41) 式确定，其中 (1-27) 可写成

$$X = (A^TD_{ll}^{-1}A)^{-1}A^TD_{ll}^{-1}l \tag{1-42}$$

ω 和 β 为向量。

设

$$\alpha^T X + \beta^T Y = a_0 + a^T l \tag{1-43}$$

a 为向量，a_0 为常量，将（1-42）和（1-41）式代入上式右边得

$$\alpha^T X + \beta^T Y = \alpha^T (A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T D_{ll}^{-1} l$$
$$+ \beta^T D_{Yl} D_{ll}^{-1} (I - A(A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T D_{ll}^{-1}) l$$

于是

$$a^T = \alpha^T (A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T D_{ll}^{-1}$$
$$+ \beta^T D_{Yl} D_{ll}^{-1} (I - A(A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T D_{ll}^{-1}) \tag{1-44}$$
$$a_0 = 0 \tag{1-45}$$

因为 $E(l) = A\bar{X}$，$E(\bar{Y}) = \xi_Y = 0$，再顾及（1—44）式立即可得

$$E(a_0 + a^T l) = a^T E(l) = \alpha^T \bar{X} = E(\alpha^T \bar{X} + \beta^T \bar{Y}) \tag{1-46}$$

满足无偏条件，估计量 $\alpha^T X + \beta^T Y$ 无偏。

估计量 $a_0 + a^T l$ 的误差方差为 $D(a_0 + a^T l - \alpha^T \bar{X} - \beta^T \bar{Y})$，如果是最优的，对于任一无偏估计量 $b_0 + b^T l$，则必须

$$D(a_0 + a^T l - \alpha^T \bar{X} - \beta^T \bar{Y}) \leqslant D(b_0 + b^T l - \alpha^T \bar{X} - \beta^T \bar{Y}) \tag{1-47}$$

考虑

$$E(b_0 + b^T l) = E(a_0 + a^T l) = E(\alpha^T \bar{X} + \beta^T \bar{Y})$$

或

$$b_0 + b^T A\bar{X} = a_0 + a^T A\bar{X} = \alpha^T \bar{X}$$

对于所有 $\bar{X}$ 成立，必须使

$$b_0 = a_0 = 0, b^T A = \alpha^T \tag{1-48}$$

估计量 $b_0 + b^T l$ 的误差方差为

$$D(b_0 + b^T l - \alpha^T \bar{X} - \beta^T \bar{Y})$$

$$= D(b_0 + b^T l - a_0 - a^T l + a_0 + a^T l - \alpha^T \bar{X} - \beta^T \bar{Y})$$

$$= D((b^T - a^T) l) + D(a_0 + a^T l - \alpha^T \bar{X} - \beta^T \bar{Y})$$

$$+ 2((b^T - a^T) D_{ll} \alpha - (b^T - a^T) D_{l\bar{Y}} \beta) \tag{1-49}$$

将（1-44）式代入上式右边第三项，有

$$(b^T - a^T) D_{ll} \alpha - (b^T - a^T) D_{l\bar{Y}} \beta$$

$$= (b^T - a^T)(A(A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1}) \alpha + D_{l\bar{Y}} \beta$$

$$- A(A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T D_{ll}^{-1} D_{l\bar{Y}} \beta - D_{l\bar{Y}} \beta)$$

$$= (b^T - a^T) A (A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} (\alpha - A^T D_{ll}^{-1} D_{l\bar{Y}} \beta)$$

$$= \alpha^T (A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} (\alpha - A^T D_{ll}^{-1} D_{l\bar{Y}} \beta)$$

$$- a^T A (A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} (\alpha - A^T D_{ll}^{-1} D_{l\bar{Y}} \beta)$$

$$= (\alpha^T - a^T A)(A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} (\alpha - A^T D_{ll}^{-1} D_{l\bar{Y}} \beta) = 0$$

式中顾及了

$$\alpha^T - a^T A = \alpha^T - \alpha^T + \beta^T D_{\bar{Y}l} D_{ll}^{-1}$$

$$(I - A(A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T D_{ll}^{-1}) A = 0$$

在（1-49）式中右边第一项 $D((b-a)^T l) \geqslant 0$，第三项等于零，于是（1-47）式成立。只有当两估计量相等时，即 $a_0 + a^T l = b_0 + b^T l$ 上述第一项才取等号，故知 $\alpha^T X + \beta^T Y = a_0 + a^T l$ 是唯一的最优线性无偏估计。

最后，推导 $\bar{Y}$ 的最优线性无偏估计 Y 的误差方差计算公式。

由（1-41）式

$$D(Y) = D_{\bar{Y}l} D_{ll}^{-1} D(l - AX) D_{ll}^{-1} D_{l\bar{Y}} \tag{1-50}$$

式中 $D(l - AX) = D_{ll} - D_{lX} A^T - A D_{Xl} + A(A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T$

考虑

$$D_{Xl} = (A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T$$

上式为 $D(l - AX) = D_{ll} - A(A^T D_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T$ (1-51)

代入（1-50）式得

$$D(\bar{Y}) = D_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}D_{l\bar{Y}} - D_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}A(A^TD_{ll}^{-1}A)^{-1}A^TD_{ll}^{-1}D_{l\bar{Y}} \tag{1-52}$$

对（1-41）式的 Y 与 $\bar{Y}$ 求协方差为

$$D_{\bar{Y}Y} = D_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}(D_{lY} - AD_{X\bar{Y}}) \tag{1-53}$$

考虑（1-42）式，有

$$D_{XY} = (A^TD_{ll}^{-1}A)^{-1}A^TD_{ll}^{-1}D_{lY} \tag{1-54}$$

于是

$$D(\bar{Y}) = D_{\bar{Y}Y} \tag{1-55}$$

由此就可容易地求得 Y 的误差方差。

$$D(Y - \bar{Y}) = D(Y) - D_{Y\bar{Y}} - D_{\bar{Y}Y} + D(\bar{Y})$$

将（1-52）、（1-55）代入即得其计算公式为

$$\begin{aligned} D(\Delta_Y) &= D(Y - \bar{Y}) \\ &= D_{YY} - D_{Yl}D_{ll}^{-1}D_{lY} \\ &\quad + D_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}A(A^TD_{ll}^{-1}A)^{-1}A^TD_{ll}^{-1}D_{lY} \\ &= \sigma_0^2(Q_{YY} - Q_{Yl}Q_{ll}^{-1}Q_{lY} \\ &\quad + Q_{Yl}Q_{ll}^{-1}A(A^TQ_{ll}^{-1}A)^{-1}A^TQ_{ll}^{-1}Q_{lY}) \end{aligned} \tag{1-56}$$

由（1-41）和（1-42）知

$$\begin{aligned} D_{\bar{Y}X} &= D_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}(D_{lX} - AD_{XX}) \\ &= D_{\bar{Y}l}D_{ll}^{-1}(D_{ll}D_{ll}^{-1}A \\ &\quad (A^TD_{ll}^{-1}A)^{-1} - A(A^TD_{ll}^{-1}A)^{-1}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1-57}$$

以上导出的（1-27）、（1-28）、（1-41）、（1-56）诸式就是混合模型中随机和非随机参数的最优线性无偏估计公式。

混合模型（Mixed，Model）由 Koch 1980 年在文献［6］中提出，并推导了全部公式．上面所述是根据他的思路，进行了归纳和详细推导。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com