高等学校辅导教材

概率论与数理统计能力试题题解

张学元

◆ 题型齐全　方法多样

◆ 学习必备　考试必读

华中科技大学出版社

高等学校辅导教材

概率论与数理统计
能力试题题解

张学元

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计能力试题题解/张学元
武汉:华中科技大学出版社, 2001年8月
ISBN 7-5609-2513-8

Ⅰ.概…
Ⅱ.张…
Ⅲ.概率论-解题;数理统计-解题
Ⅳ.O21-44

概率论与数理统计能力试题题解 张学元

责任编辑:胡章程 李立鹏
封面设计:刘 卉
责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印 刷:核工业中南三〇九印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:15.75 字数:367 000
版次:2001年8月第1版 印次:2001年8月第1次印刷 印数:1—5 000
ISBN 7-5609-2513-8/O·234 定价:18.50元

内 容 提 要

本书以能力培养为主线，精选了新近问世的《概率论与数理统计》能力试题. 为方便读者使用，采用专题与教材相匹配的编写方式，可与现行教材配套使用. 全书共分九章. 每章对综合性较强的题目，先给出解题思路分析，然后正式解答. 为了帮助读者自我测试学习水平，每章均配有模拟试题，包括填空、选择、计算和证明题. 书末附有答案或提示.

本书主要的读者对象是高等工科院校的学生，也可作为各层次大学生(理、工、财经、农、林的本、专科)及报考工学、理学及经济、农林等类硕士研究生的复习资料.

本书对数学教师而言，也是一本有收藏价值的参考资料.

前　言

本书主要是为高等工科院校的学生编写的．这类院校的人才培养目标是为国家培养高素质、强能力的应用型人才．因此，教和学的着眼点是能力培养．多年来的教学实践表明：他们在学习概率论与数理统计这门课程时，处理随机现象的能力较差，在解题时往往无从下手，解完后又不知正确与否．究其原因，一方面是由于这门课程（研究随机现象的规律性）与以前的数学学科截然不同，必然给初学者带来困难；另一方面是学习者运用必备的知识在分析和解决随机现象的能力方面没有得到足够的训练和培养．

本书的主要特点有三：第一，以能力培养为主线，贯穿“能力—技能—知识”的思维链条，编者参阅了大量的各类试题，精选出具有启发性、典型性和针对性的能力试题．通过对这些题的分析和解答，培养读者综合、分析和实际运作能力，为读者运用必备的知识去独立处理随机现象提供了思维的钥匙．第二，本书是紧扣高等工科院校现在所使用的教材，是以试题的形式与现行教材配套的教与学的辅导教材．第三，本书是根据国家教育部制定的高等学校《工科数学教学基本要求》及近年来全国工学、经济学硕士生入学考试数学考试大纲的要求编写的，且考虑了不同层次的要求．因此本书既可以作为高等工科院校本（专）科学生学习《概率论与数理统计》的辅导教材，也可作为报考工学、理学及经济、农林等类硕士研究生的复习资料．

参加本书编写的教师（按姓氏笔画为序）有：王一蒙、王达运、李林、李训德、刘轩、刘绍禹、刘秋生、刘改平、陈瑞堂、陈勇、张学元、周丽群等．由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者批评指出．

张学元

2000 年 12 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　用已知事件表示有关其它事件的方法

正确地将一个复合事件用已知事件通过运算表示出来，是进行概率计算的前提和基础. 这首先要熟练掌握事件间的关系(包含相等关系、互不相容关系和互斥关系)与运算(和运算、积运算、差运算)的概念，以及事件的运算律(分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$AB+C=(A+C)(B+C)$；对偶律：$\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$；补元律：$A\overline{A}=\varnothing$，$A+\overline{A}=\Omega$；还原律：$\overline{\overline{A}}=A$；吸收律：若 $A\subset B$，则 $AB=A$，$A+B=B$；分解律：若 $A\subset B$，则 $B=A+\overline{A}B$；蕴含律：若 $AB=\varnothing$，则 $A\subset\overline{B}$，$B\subset\overline{A}$)，其次还必须对具体问题进行具体分析. 一般说，将一个复合事件用已知事件通过运算来表示的常用方法有三种.

(一)等价法

等价法就是将复合事件通过运算用其等价的事件来表示. 此法常用于用“恰有”、“只有”、“至多”、“至少”、“都发生”、“都不发生”、“不都发生”等词语表述的复合事件.

(二)推演法

推演法是利用事件的运算律将复合事件逐步推演到已知事件的表达式. 此法常用于与差事件、对立事件有关的复合事件.

(三)图示法

图示法是将有关事件用文氏图或其它几何图形表示，借助这些图形通过几何图形直观求出所给事件的表示式.

1.1.1　设 A、B、C 为三个随机事件，试用 A、B、C 的运算关系

表示下列事件：

(1)E="A 发生，而 B 与 C 都不发生"；

(2)F="A、B、C 中恰有两个发生"；

(3)G="A、B、C 中不多于一个发生"；

(3)H="A、B、C 中至少有一个发生".

解 (1)单个看，E 是"A 发生，B 不发生，C 也不发生"，即 E 与"A、$\overline{B}$、$\overline{C}$ 同时发生等价，故 $E=A\overline{B}\,\overline{C}$. 另解：把"$B$、$C$ 都不发生"一起看，它的对立事件是"B、C 至少有一个发生"，即 $B+C$，于是"B、C 都不发生"$=\overline{B+C}$，从而 $E=A(\overline{B+C})$.

(2)F="A、B、C 中恰有两个发生"的等价事件是"A、B 都发生，而 C 不发生；或者 A、C 都发生，而 B 不发生；或者 B、C 都发生，而 A 不发生"，故

$$F=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC.$$

另解：F 的等价事件是"A、B 同时发生，或者 B、C 同时发生，或者 A、C 同时发生，但 A、B、C 不能同时发生"，故

$$F=AB+BC+AC-ABC\overset{\text{(或)}}{=\!=}(AB+BC+AC)(\overline{ABC}).$$

(3)G ="A、B、C 中不多于一个发生"

="三个都不发生"+"一个发生，另两个不发生"

$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C.$

另解：G 的对立事件 $\overline{G}$="A、B、C 中至少有两个同时发生"$=AB+BC+AC$，故 $G=\overline{AB+BC+AC}$.

(4)解法 1：由和事件的定义得 $H=A+B+C$.

解法 2：H 的对立事件 $\overline{H}$="A、B、C 都不发生"$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，故

$$H=\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}.$$

解法 3：H="恰有一个发生"+"恰有两个发生"+"三个都发生"$=(A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)+(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)+ABC$.

注 求一个事件的表示式，由于思路不同，得到的表达式往往形式不一样，但只要思路正确，得到的不同表达式是相等的.

1.1.2 [选择题]射击 3 次,记 A_i=“第 i 次击中目标”($i=1$,2,3),则事件(   )表示至少命中一次.

(a) $A_1+A_2+A_3$ (b) $A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1]$

(c) $\Omega-\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$ (d) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

解 由和事件的定义知(a)入选.

对于(b),用推演法,由差事件的定义及和对积的分配律,有

$$A_1+(A_2-A_1)+[(A_3-A_2)-A_1]=A_1+A_2\overline{A}_1+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1$$
$$=(A_1+A_2)(A_1+\overline{A}_1)+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1=A_1+A_2+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1$$
$$=A_2+[A_1+(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1]=A_2+(A_1+A_3\overline{A}_2)(\overline{A}_1+A_1)$$
$$=A_1+A_2+A_3\overline{A}_2=A_1+(A_2+A_3)(A_2+\overline{A}_2)=A_1+A_2+A_3,$$

故(b)也入选.

对于(c),也用推演法,有

$$\Omega-\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}=\Omega-\overline{A+B+C}=\Omega(\overline{\overline{A+B+C}})$$
$$=\Omega(A+B+C)=A+B+C,$$

故(c)也入选.

至于(d),显然(d)表示恰有一次命中目标的事件,故(d)不能入选.

1.1.3 甲、乙两人同时向一目标射击,设 A=“甲命中目标,乙未命中目标”,则其对立事件 $\overline{A}$ 为(   ).

(a)“甲未命中目标,乙命中目标”

(b)“甲、乙两人都命中目标”

(c)“甲未命中目标”

(d)“甲未命中或乙命中”.

解 设甲、乙命中目标的事件分别为 B、C,则 $A=B\overline{C}$.由对偶律得 $\overline{A}=\overline{B\overline{C}}=\overline{B}+\overline{\overline{C}}=\overline{B}+C$,即 A 的对立事件为甲未命中目标,或乙命中目标,故(d)入选.

1.1.4 从一批含有正品和次品的产品中,任意抽取 5 件产品,试写出下列事件的对立事件:

(1) A_1=“至少有一件次品”;(2) A_2=“至少有两件次品”;

(3)A_3="至多有两件正品";(4)A_4="5 件全是次品"

解 由于 $\overline{A}=\Omega-A$,分别在次品数轴和正品数轴上(注意它们的方向相反)描出可能的次品数和可能的正品数 0,1,2,3,4,5(图 1-1),它们分别构成一个全集 Ω,然后分别在两轴上标出事件 A_1,A_2,A_3,A_4,则两轴上箭头方向相同的两事件相等;一轴或两轴上方向相反的两事件为对立事件.

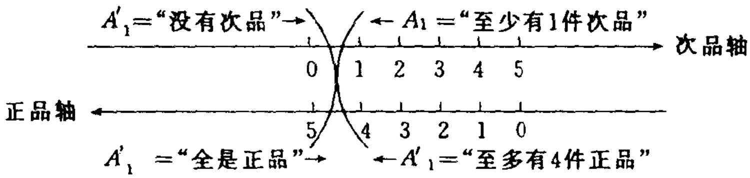

图1-1 (a)

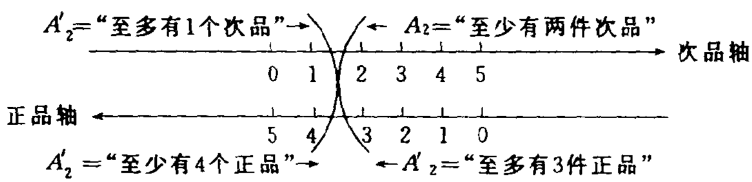

图1-1 (b)

由图 1-1(a)很直观地看出,$\overline{A}_1$="没有次品"或 $\overline{A}_1=\overline{A'}_1$="全是正品";还看出:$A_1=A'_1$ 即"至少有 1 件次品"="至多有 4 件次品".

由图 1-1(b)易见,$\overline{A}_2$="至多有 1 个次品"或 $\overline{A}_2$="至少有 4 个正品";还看出:$A_2=A'_2$="至多有 3 个正品".

同理可知,A_3="5 件产品中至多有两件正品"="5 件产品中至少有 3 件次品"的对立事件为 $\overline{A}_3$="5 件产品中至多有 2 件次品"或为 $\overline{A'}_3$="5 件产品中至少有 3 件正品",A_4="5 件全是次品"="5 件中至少有 5 件次品"的对立事件为 $\overline{A}_4$="5 件中至多有 4 件次品"或为 $\overline{A'}_4$="5 件中至少有 1 件正品".

注 请读者想想,将此题一般化会得到什么结论?

1.1.5 设事件 A、B、C 满足 $ABC\neq\varnothing$，试把下列事件表成互不相容事件的和：

(1)$A+B+C$；　(2)$B-AC$；　(3)$AB+BC$.

分析　这类题的处理技巧是在适当的地方添上必然事件 Ω 且相乘，使表达式产生逆事件.

解　(1)
$$\begin{aligned}A&=A\Omega=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B}\\&=AB(C+\overline{C})+A\overline{B}(C+\overline{C})\\&=ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}.\end{aligned}$$

同理有
$$B=ABC+\overline{A}BC+AB\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}$$
$$C=ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C.$$

故
$$\begin{aligned}A+B+C&=(ABC+ABC+ABC)+(\overline{A}BC+\overline{A}BC)+(A\overline{B}C+\\&\quad A\overline{B}C)+(AB\overline{C}+AB\overline{C})+(A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C.\end{aligned}$$

另解，见 1.1.1 题之(4)的解法 3.

(2)
$$\begin{aligned}&B-AC\xlongequal{\text{定义}}B(\overline{AC})\xlongequal{\text{对偶律}}B(\overline{A}+\overline{C})=\overline{A}B+B\overline{C}\\&\xlongequal{\text{添补 }\Omega\text{ 相乘}}\overline{A}B+B\overline{C}(A+\overline{A})=\overline{A}B+AB\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}\\&\xlongequal{\overline{A}B\supset\overline{A}B\overline{C}}\overline{A}B+AB\overline{C}.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&AB+BC=AB+BC(A+\overline{A})=AB+ABC+\overline{A}BC\\&\xlongequal{ABC\subset AB}AB+\overline{A}BC.\end{aligned}$$

1.1.6 化简 $\overline{(\overline{AB}+C)\overline{AC}}$.

分析　此事件式含有多重“逆号”，应逐次应用对偶律，逐层去掉“逆号”.

解
$$\begin{aligned}\overline{(\overline{AB}+C)\overline{AC}}&=\overline{(\overline{AB}+C)}+AC=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\,\overline{C}+AC\\&=(A+B)\overline{C}+AC=A\overline{C}+B\overline{C}+AC\\&=A(C+\overline{C})+B\overline{C}=A+B\overline{C}.\end{aligned}$$

1.1.7 等式 $A-(B-C)=(A-B)+C$ 是否成立？为什么？

解　由差事件的定义有

左$=A-(B-C)=A-(B\overline{C})=A\overline{B\overline{C}}=A(\overline{B}+C)=A\overline{B}+AC$，

右$=(A-B)+C=A\overline{B}+C$，

故当且仅当 $C=AC$，即 $C\subset A$ 时所给等式才成立，否则等式不成立.

1.1.8 证明$(A-AB)+B=A+B$.

证法1 推演法 $(A-AB)+B=A\overline{AB}+B=A(\overline{A}+\overline{B})+B$

$$=A\overline{A}+A\overline{B}+B=A\overline{B}+B.$$

（和对积的分配律） $=(A+B)(\overline{B}+B)=(A+B)\Omega=A+B$.

证法2 等价法 因 $A-AB=$“A 发生，而 A,B 不同时发生”$=$“A 发生而 B 不发生”，故$(A-AB)+B=$“A,B 至少有一个发生”$=A+B$.

证法3 文氏图法(略).

1.1.9 若事件 A、B、C 满足等式 $A+C=B+C$，是否一定有 $A=B$？

答 不一定. 例如，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{4\}$，则有 $A+C=B+C=\{1,2,3,4\}$，但 $A\neq B$.

注 不要把数的运算律，如移项、去括号等用到事件运算上来，它们在事件运算中一般不成立(如 1.1.8 题和 1.1.6 题).

§1.2 古典概率的直接计算

如果随机试验 E 具有如下两个特征：

1° 样本空间的基本事件(样本点)只有有限个，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

2° 每一个基本事件的概率相等，即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n),$$

则称试验 E 所对应的概率模型称为古典概型.

对于古典概型，事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}.$$

A 中所包含的基本事件数 m 也称 A 的有利场合数.

由上述公式可见，为求事件 A 的概率，首先要弄清试验 E 所对应的基本事件是什么，然后计算 n,m 这两个数值. 一般说来，m，n 可用中学数学中的排列、组合及加法原理、乘法原理求之.

1.2.1 一次投掷两颗骰子，求出现的点数之和为奇数的概率.

解法 1 记 A="出现点数之和为奇数". 若取每次试验所有可能的点数 (i,j)（表示第一颗骰子出现 i 点，第二颗骰子出现 j 点）为基本事件，$i,j=1,2,\cdots,6$，则基本事件的总数 $n=6^2=36$，且这 36 个基本事件组成等概样本空间，其中 A 包含的基本事件数 $m=3\times3+3\times3=18$，故 $P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

解法 2 由于我们关心的是每次试验出现点数之和的奇偶性，因此，可取每次试验可能出现的结果为：{点数和为奇数}，{点数和为偶数}. 作为基本事件，它们也构成等概样本空间. 基本事件的总数 $n=2$，A 包含的基本事件数 $m=1$，故 $P(A)=\frac{1}{2}$.

解法 3 把每次试验可能出现的结果取为：(奇，偶)，(奇，奇)，(偶，奇)，(偶，偶)［记(奇，偶)表示第一颗骰子出现奇数点，第二颗骰子出现偶数点］，则这四个基本事件也组成等概样本空间. 基本事件的总数 $n=4$，A 包含的基本事件数 $m=2$，故

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

注 本题说明同一问题可以取不同的样本空间，但必须是等概的. 在解法 3 中若取{两个奇}、{一奇一偶}、{两个偶}作为基本事件，组成样本空间，则得出 $P(A)=\frac{1}{3}$. 错误的原因就是它不是等概的，事实上，$P(\text{两个奇})=\frac{1}{4}\neq P(\text{一奇一偶})=\frac{1}{2}$.

1.2.2 n 个朋友随机地围绕圆桌而坐，求其中甲、乙两人坐在

一起（座位相邻）的概率.

解 设甲已先坐好，考虑乙怎么坐法. 乙的每一种可能坐法对应一个基本事件. 显然乙总共有$(n-1)$个位置可坐，这$(n-1)$个位置是等可能的，即基本事件的总数为 $n-1$，且它们组成等概样本空间. 而有利场合，即乙坐在甲的身边，有两种坐法，故所求概率为 $\frac{2}{n-1}(n>2)$. 而当 $n=2$ 时，甲、乙两人坐在一起是必然事件，故其概率为 1.

1.2.3 将 C、C、E、E、I、N、S 等 7 个字母随机地排成一行，求恰好排成英文单词 SCIENCS 的概率.

解 把 7 个字母排成一行，所有可能的排法取为基本事件，则基本事件的总数等于 7 个元素的全排列，即 $n=A_7^7=7!$，它们组成等概样本空间. 而有利场合数，即排成英文单词 SCIENCS 的排列数，由乘法原理可知为 $m=A_1^1A_2^1A_1^1A_2^1A_1^1A_1^1A_1^1=4$，故所求概率为

$$\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}\approx 0.000794.$$

1.2.4 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码. (1)求最小号码为 5 的概率；(2)求最大号码为 5 的概率.

解 设 A=“最小号码为 5”，B=“最大号码为 5”.

把从 10 个号码中任取 3 个的可能取法数作为基本事件，则基本事件的总数为 $n=C_{10}^3=120$，它们组成有限等概样本空间.

完成事件 A 可分两步：先确定最小号码为 5，有 C_1^1 种方法，其余 2 个号码应从 6，7，8，9，10 这五个号码中任选 2 个，共有 C_5^2 种方法. 这两步依次完成，事件 A 才完成. 由乘法原理知，完成事件 A 的方法数，即 A 的有利场合数为 $m_A=C_1^1C_5^2=10$；同理，事件 B 的有利场合数为 $m_B=C_1^1C_4^2=6$，故

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{1}{12},\ P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{1}{20}.$$

1.2.5 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只

铆钉强度太弱，每个部件用 3 只铆钉，若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

解 从 50 只铆钉中任取 3 只的每一种可能取法对应一个基本事件，故基本事件的总数，$n=C_{50}^3$，它们组成有限样本空间. 而有利场合，即发生一个部件强度太弱的情况，完成这一事件可分两步：先取出 3 只强度太弱的铆钉，共有 C_3^3 种取法，再把这 3 只铆钉装在 10 个部件的任一部件上，有 10 种方法，由乘法原理知，有利于“一个部件强度太弱”的场合数 $m=C_3^3\cdot 10$，故所求概率为

$$p=\frac{C_3^3\cdot 10}{C_{50}^3}=\frac{1}{1960}\approx 0.0005.$$

1.2.6 从 1，2，…，10 等 10 个数字中任取一数，取后放回，先后取 7 个数，求下列事件的概率：

(1)A＝“7 个数全不相同”；　(2)B＝“不含 10 和 1”；

(3)C＝“10 恰好出现两次；　(4)D＝“10 至少出现两次”.

解 从 10 个数中任取 7 个数的每一种可能取法对应一个基本事件，因是有放回地先后取 7 个数，故基本事件的总数就是 10 个相异元素的允许重复的 7 元排列的总数 $n=10^7$.

(1)A 要求取出的 7 个数互不相同，故有利于 A 的场合就是从 10 个不同元素中每次取出 7 个不同元素的排列，故有利于 A 的场合数 $m=A_{10}^7$，故

$$P(A)=\frac{A_{10}^7}{10^7}\approx 0.06.$$

(2)B 要求不含 10 和 1，所以先后取出的 7 个数只能从 2，3，4，5，6，7，8，9 这 8 个数中取得，因为是有放回的抽取 7 次，故事件 B 包含的基本事件数为 $m=8^7$，于是

$$P(B)=\frac{8^7}{10^7}\approx 0.2097.$$

(3)C 发生则意味着 7 次中恰有两次取到 10，这两次可能是 7