高 等 数 学

主　编　范克新
编　者　范红军　杨兴洲

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/范克新主编. —南京:南京大学出版社,2001.8

(成人高等教育教材系列)

ISBN 7-305-03736-2

Ⅰ.高... Ⅱ.范... Ⅲ.高等数学-成人教育:高等教育-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 058782 号

书　　名　高等数学
主　　编　范克新
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　邮编 210093
电　　话　025-3596923　025-3592317　传真 025-3303347
网　　址　www. njupress. com
电子函件　nupress1 @ public1. ptt. js. cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　丹阳教育印刷厂
开　　本　850×1168 1/32　印张　15.125　字数　393 千
版　　次　2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷
印　　数　1～4000
ISBN　7-305-03736-2/O・265
定　　价　24.80 元

前　　言

南京大学继续教育学院为提高成人教育的教学质量，把加强教材建设作为提高成人教育系列学生业务素质的重要环节.本书就是在继续教育学院组织下编写的系列教材之一，它作为成教理科类大专的基础课教材，其目的就是使学生学习此教材后，一方面接受了较系统的数学素质训练，另一方面也为各后行课程及专业课程的学习打下坚实的基础.

本书在编写中遵照成教理科类高等数学的教学大纲，并参照了“专升本”高等数学课程考试的大纲要求.教材保留了高等数学原有系统性，逻辑性，严密性.针对学生们的特点，在内容上做了适当的增删调整，增加了不少应用实例.力求保证同学们在掌握所需要的基础理论和基本方法、基本技能及运算技巧的同时，使之能得到分析问题与解决问题能力的训练.考虑到读者的特点，编写时，力求内容深入浅出，通俗易懂，便于教师教也便于学生自学.书中例题较多，解题方法也较多，使读者“无师自通”是我们习作的初衷.每一节后都选编了一定数量且分 A，B 两个层次的练习题，供学生习作.每一章后都指出本章的要求，指出重点与难点.全书最后在附录部分给出各习题的参考答案.

从酝酿书稿到定稿自始至终得到了南京大学继续教育学院领导和同行们的支持与帮助，在此谨深表谢意.

限于水平，不妥之处在所难免，敬请读者和使用本书的教师批评指教.

编者

1998.11.22

目　　录

3 一元函数积分学

1 函数与极限

1.1 预备知识

1.1.1 集合

在认识客观世界的过程中，人们常常把所要研究的对象根据它们的某种属性分门别类地加以研究. 例如"南京大学继续教育学院 2000 级全体学生"、"所有的整数"、"某平面上一切三角形"等等，我们把具有某种性质的研究对象的全体称为具有该性质的集合. 这样，上述的三个研究对象都构成集合.

通常集合用大写字母 A, B, C 等表示，集合中的每一个个别的对象称为集合的元素，往往用小写字母 a, b, c 等表示. 如果 a 是集合 A 的一个元素记为 $a \in A$, 读作 a 属于 A. 如果 b 不是集合 B 的元素记作 $b \overline{\in} B$ 或记作 $b \notin B$, 读作 b 不属于 B. 在我们的研究对象中，当明确知道了哪些元素属于 A，哪些元素不属于 A，这样集合 A 就完全确定了.

由有限个元素构成的集合称为有限集，由无限个元素构成的集合称为无限集. 例如"南京大学继续教育学院 2000 级全体学生的集合"这是一个有限集，而"所有整数构成的集合"是一个无限集. 又例如"平面上以某定点为圆心的所有圆构成的集合"是一个无限集.

表示集合的方法主要有列举法和描述法. 所谓列举法表示就是把集合中所有的元素一一列举出来. 例如把继续教育学院 2000

级的学生用登记册一一表示出来. 又如由 1, 4, 8 三个数字构成的集合可以写成

$$A = \{1,\ 4,\ 8\}.$$

所谓描述法表示就是用描述集合中元素特征而给出集合的方法. 例如 B 是奇数集合,可记为

$$B = \{2n+1 \mid n \text{ 为整数}\} \text{ 或 } B = \{2n+1 : n \text{ 为整数}\}.$$

这里大括号内前半段 $2n+1$ 表示所有可表示成 $2n+1$ 形式的数,而后半段指 n 的取值范围. 一般说来,若集合 A 是由具有某性质 P 的元素 x 构成. 记为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\} \text{ 或 } A = \{x : x \text{ 具有性质 } P\}.$$

如果一个集合内没有任何元素,则称这种集合为**空集**,用$\varnothing$表示. 但是$\{0\}$不表示空集,它表示集合由一个 0 元素构成. 例如

集合 $A = \{x \mid \sqrt{x},\ x < 0\}$ 是一个空集.

集合 $B = \{x \mid x^2 = 0\}$ 是一个$\{0\}$, 不是空集,两者不同.

如果两个集合 A 和 B 是由完全相同的元素构成,则称这两个集合是相等的集合. 要说明的是这里的完全相同是指元素的形式完全相同,而不是指元素的个数相同也不是指元素在集合内的排列顺序相同. 例如,集合 $A = \{1,\ 4,\ 8\}$,集合 $B = \{1,\ 4,\ 8,\ 4,\ 1\}$, 集合 $C = \{8,\ 4,\ 1\}$. 我们根据两集合相等的概念可知集合 $A = B = C$.

由此,如果 $A \neq B$ 则至少有一个元素 $a \in A$,但 $a \notin B$, 或至少有一个元素 $b \in B$ 但 $b \notin A$.

对于 A, B 两个集合,如果 A 内的任意一个元素都是 B 内的元素,则称 A 是 B 的子集或称 B 包含 A,也可称 A 包含于 B 内, 记作 $A \subseteq B$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 为 B 的真子集,记作 $A \subset B$. 例如 $A = \{2n \mid n \text{ 为整数}\}$,$B = \{n \mid n \text{ 为整数}\}$,则 $A \subset B$.

$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 的充分必要条件是 $A = B$.

我们约定 $\varnothing \subset A$, 这里 A 为任一集合. 也就是说空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

对集合 A 与集合 B, 称集合 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$, 是 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$. 这就是说 $A \cup B$ 是由所有属于 A 与所有属于 B 的元素构成的集合.

对集合 A 与集合 B, 称集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 是 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$. 这就是说 $A \cap B$ 是由所有既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合.

对集合 A 与集合 B, 称集合 $\{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$, 是 A 与 B 的差集, 记作 $A \backslash B$(或记作 $A-B$). 这就是说 $A \backslash B$ 是由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合.

例如　设 $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 则

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$;

$A \cap B = \{1, 3, 7\}$;

$A \backslash B = \{4, 8\}$; $B \backslash A = \{5, 9\}$;

$(A \cap B) \cap (B \backslash A) = \varnothing$.

1.1.2 实数的概念

回顾我们学习关于数的概念, 先从自然数学起, 然后学习了整数, 继而又扩展到有理数、无理数、实数. 在中学还建立了数轴的概念, 每一个有理数 a, 都可以在数轴上对应唯一的点 A, 以 a 作为它的坐标, 这样就说 A 点是有理数 a 在数轴上的对应点, 也说 A 是有理点. 任意两个相差多么小的有理点之间仍可找到无穷多个有理点, 故有理点在数轴上处处稠密. 但有理点并没有充满数轴, 这告诉我们数轴上还有这样的点, 它们的坐标是不能用有理数表示的. 例如在数轴上对应于$\sqrt{2}$的点(想一想, 如何确定这一点). 在数轴上对应于无理数的点叫无理点, 无理点在数轴上也是处处稠密的.

有理数与无理数统称为实数，而数轴上的点与实数建立了一一对应的关系．所谓一一对应的关系即对每一个实数，都有数轴上的惟一点以它作为坐标；反之数轴上的每一个点都以惟一的实数作为它的坐标．有理点与无理点充满了整个数轴．

以后我们用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{N}$ 表示自然数集．

两个实数可以比较大小，任取两个实数 a 与 b，它们之间的大小关系只有如下三种，即 $a>b$, $a<b$, $a=b$. 具有如下的运算性质：

(1) 如果 $a>b$, $b>c$，则 $a>c$.

(2) 如果 $a>b$，任取 $c\in\mathbf{R}$，则 $a+c>b+c$.

(3) 如果 $a>b$，任取 $c>0$, $c\in\mathbf{R}$，则 $ac>bc$；在 $c<0$ 时有 $ac<bc$.

(4) 如果 $a>b$, $ab>0$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

上述四个性质所有的“$>$”换成“$\geqslant$”；将“$<$”换成“$\leqslant$”仍成立．

例 1　设 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. 求证

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

证　因为任何实数的平方总是大于或等于零，故有 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$，展开得

$$a-2\sqrt{ab}+b\geqslant 0，或\ a+b\geqslant 2\sqrt{ab}.$$

即

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

我们知道 $\dfrac{a+b}{2}$ 是 a 与 b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$为 a 与 b 的几何平均数，例 1 说明两个非负数的几何平均数不超过算术平均数，这一结论可以推广到 n 个数的情形 ($n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$).

设 $a_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

例 2 利用数学归纳法证明

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证 因为 $1^2=\dfrac{1\cdot 2(2\cdot 1+1)}{6}$，所以当 $n=1$ 时公式成立. 设公式对于 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)}{6}[k(2k+1)+6(k+1)]\\&=\frac{k+1}{6}[(k+2)(2k+3)]\\&=\frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

故对于 $k+1$ 也成立. 于是等式得证.

例 3 设 $n\in\mathbf{N}$. 证明当 $x\geqslant -1$ 时

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

证 我们利用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，等式成立，设当 $n=k$ 时，结论成立，即有

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx.$$

当 $n=k+1$ 时，由归纳假设有

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)$$

$$\geqslant (1+kx)(1+x)$$
$$= 1+(k+1)x+kx^2$$
$$\geqslant 1+(k+1)x.$$

于是对于 $k+1$，不等式的结论也成立. 同学们看清证明时，想一想 $x\geqslant -1$ 这一条件在证明中哪一步是必要的.

1.1.3　绝对值　区间　邻域

实数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示，它的值定义如下：

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a\geqslant 0, \\ -a, & \text{当 } a\leqslant 0. \end{cases}$$

$|a|$ 在数轴上表示点 a 到原点的距离，绝对值有如下的性质：

(1) $|a| = \sqrt{a^2}$.

(2) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

(3) $|a| \leqslant k \Longleftrightarrow$[1] $-k\leqslant a\leqslant k$.

$|a| < k \Longleftrightarrow -k < a < k$.

(4) $|a|-|b| \leqslant |a\pm b| \leqslant |a|+|b|$.

(5) $|ab| = |a|\cdot|b|$.

这 5 条性质的证明，留给读者完成.

例 4　解不等式 $|x+4|<1$.

解　由绝对值不等式的性质可知

$$|x+4|<1, \text{即} -1<x+4<1,$$

故解为

$$-5<x<-3.$$

下面介绍**区间**的概念.

① 若 A 与 B 代表两个命题. “$A\Longleftrightarrow B$” 意指 A 成立的充分必要条件是 B 成立，也称 A 与 B 等价.

设 a, b 两个实数,且 $a<b$:

(1) 闭区间 $[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

(2) 半开半闭 $[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$.

$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$.

(3) 开区间 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$.

(4) 无穷区间 $(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$.

$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$.

$(-\infty, b]=\{x \mid x \leqslant b\}$.

$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$.

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

式中“$+\infty$”,“$-\infty$”分别读作“正无穷大”与“负无穷大”,它们仅表示一种符号,而不是任何实数.区间 $(a,+\infty)$, $(-\infty, b)$ 与$(-\infty,+\infty)$ 都称作无穷区间.当区间有限时,右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 称为区间的长度.而无穷区间的长度规定为$+\infty$.

有的时候,上述的区间也可用一个字母表示,如果不作说明时,则可理解为上述诸情况的任意之一.

再介绍关于邻域的概念.

设 a 为一个实数,δ 为一个正常数,称满足 $|x-a|<\delta$ 的所有实数 x 所组成的集合为 a 的 δ 邻域,简称 a 的**邻域**,其中,a 叫做这一**邻域的中心**,δ 叫做这一**邻域的半径**.

例 5 满足不等式 $|x-4|<\frac{1}{2}$ 的 x 的全体表示了一个什么邻域,并写出它表示的区间.

解 $|x-4|<\frac{1}{2}$ 表示了一个以 $a=4$, $\delta=\frac{1}{2}$ 的邻域,它的区间是开区间$(3.5, 4.5)$.

如果把 a 的 δ 邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ 内去掉 a 将得到 a 的去心 δ 邻域,即 $(a-\delta, a) \cup(a, a+\delta)$. 另外,把 $(a, a+\delta)$ 称为 a 的右邻域,把 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左邻域.

根据区间的概念可知，a 的 δ 邻域、右邻域、左邻域均表示一个区间，但是 a 的 δ 去心邻域不是一个区间.

例 6　例 5 中不等式 $|x-4|<\frac{1}{2}$，其 $a=4$ 的右邻域为 $(4,\ 4.5)$，$a=4$ 的左邻域为 $(3.5,\ 4)$，而 $0<|x-4|<\frac{1}{2}$ 表示 $a=4$ 的一个 $\frac{1}{2}$ 去心邻域.

在结束本节之前，我们再介绍一个关于有界集合的概念.

设 S 为实数的某一个集合，如果存在实数 $M>0$，使得对任意的 $x\in S$ 有 $|x|\leqslant M$ 成立，则称 M 为集合 S 的界，而称 S 为有界集合. 如 S 不是有界集合，则称 S 为无界集合.

例如 $[1,\ 10000]$ 是一个有界集合，$(\mathrm{e},\ \pi)$ 是一个有界集合；$(-\infty,\ 1)$，$(-1,\ +\infty)$ 是两个无界集合，进而可知，正整数的集合 $\mathbf{N}$、整数的集合 $\mathbf{Z}$、有理数的集合 $\mathbf{Q}$、实数的集合 $\mathbf{R}$，均是无界集合.

习题 1.1

A 部分

1. 设 $A=\{0\}$，$B=\{0,\ 1\}$，下列陈述是否正确，并说明理由.

$A\neq\varnothing$；$A\subset B$；$0\in A$；$\{0\}\in A$；$0\subseteq A$；$A\cap B=\{0\}$；$A\cup B=B$；$\varnothing\subset A$；$A\subset A$；$A\subseteq A$.

2. 设集合 $A=\{0\}$，$B=\{0,\ 1\}$，$C=\{1,\ 2\}$，说明下述式子是否正确.

(1) $A\subset B$；(2) $A\in B$；(3) $A=\varnothing$；(4) $A\notin C$；(5) $A\subset C$；(6) $\varnothing\subset A$；(7) $0\in A$；(8) $B-C=A$.

求出如下集合.

(1) $A\cup B$；(2) $A\cap B$；(3) $A\cup(B\cap C)$；(4) $C\cap(A\cup B)$.

3. 解下列不等式.

(1) $|x-2|\geqslant 5$；　　(2) $0<(x-2)^2<4$；

(3) $|x+2|-|x|>1$；　　(4) $-1<x^2-2x\leqslant 3$.

4. 下面四个区间，哪一个表示了以点 x_0 为心的 δ 邻域.