

科學圖書大庫

數學趣味問題競試集

譯者 吳英格

徐氏基金會出版

512
6048
科學圖書大庫

數學趣味問題競試集

譯者 吳英格

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人 林碧銓 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十六年三月三十日三版

數學趣味問題競試集

基本定價 3.60

譯者 吳英格 東海大學數學系講師

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(63)局版臺業字第0116號

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686號
7815250號

發行者 財團法人臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允為社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能為蔚為大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧銓氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。為欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

6-18/6c

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

譯者小言

譯者有鑑於現一般的高中學生於研讀數學上都走上了填鴨式的教育，一天到晚只鑽於爲應付聯考的參考書上，念數學只爲了應付考試，毫無興趣可言，也不知數學的趣味何在？故現就蘇俄高中數學研究社所收集的一些非常雋永而有價值的題目介紹給國人欣賞，也使得國人知道蘇俄高中數學教育上所走的方向如何。此書是由英文譯版翻譯而成，而非由俄文原版翻譯的，故經由兩次翻譯意義欠明在所難免，但英文版所造成的排版錯誤於翻譯成中文時都已儘量予以改正。在此順便一提，對李思平同學的多方面幫忙，表示由衷的謝意。

吳 英 格

民國六十三年元月

作者前言

本書所收集的三部分題目，是基於蘇俄莫斯科州立大學學校數學社（School mathematics Society of the Moscow State University）的二十年收集所作的一系列書之一開始。本書含有問題以及定理，大多數的題目均出現於莫斯科州立大學學校數學社（School Mathematical Society of the M. S. U.）裏以及在莫斯科舉行的數學奧林匹克競賽（Mathematical Olympiads）中。

這些題目可供學生，老師，以及基本數學教育機構的材料。其第一冊（第一部分）包括算術，代數以及數論，第二冊是討論平面幾何部分，第三冊是有關立體幾何的問題。

此書與一般的高中問題書有顯著的不同，其不僅可增加學生的一般知識，而且可增加學生思考問題的方法與新觀念，並且可發揮學生的偏好與才能。其中有些題目之解法只須稍具數學知識即可，同時亦有些題目是針對一般較聰明或熟練的學生而設的，也就是說這些題目需要用到解方程式或高次方程組的技巧。在另一方面，這些題目強調於創造力而非一般的形式化。

還有此書所選取的題目最大的特點就是恰能適應現代新數學的發展與新方向。其中有些題目於提示與解答說明很詳盡，特別是對單獨而較深入的問題而言（例如基本的數論以及不等式問題）。有些題目是從古典數學文獻及近代數學刊物中取出。

爲了要使題目更爲一般化且限制條件更少，其證法當然較高中的特殊情況下之題目爲難，但是無論如何，他們認爲這些題目並非爲一般努力的學生所無法勝任的。

在此謹向讀者推薦讀此書時，一定要先看本書的用法，以期能收到實效。

此工作的第一部分與第二部分是由葉克隆（I. M. Yaglom）編輯，第三部分原則上是由陳佐夫（N. N. Chentzov）完成的。其中有四十題是出於D.O. Shklarsky 的手抄本，應予特別感謝！

作者將非常感謝讀者能提供新的且更好的解法，或者是提供新的適當題目以便編入此書中。

英文版編者前言

爲中學裏的優秀學生，舉行一連串的數學競賽考試，是蘇俄科學教育上重要措施之一。這種數學競賽考試，美國教育制度上已漸漸效法。蘇俄在全國各學，每學期經常舉行初選賽及淘汰賽，至每年末期，在莫斯科大學舉行數學競試大會（mathematical olympiad），則達到最高潮。

此書之題目，共收集了二十年之久始完成，皆爲一些曾出現於蘇俄數學競賽中實用而又有趣的問題，以及一些由蘇俄學校數學研究社（School Mathematics Study Societies）發展而成的題目及資料。對於這些蘇俄數學界所設計的題目，亦經被廣泛採用於美國各種考試中。

蘇俄的學生以及老師，都有這種考試題目與解答的專書，但在美國一般學校，尚不易覓得。不過有些問題已經被翻成英文，例如載在由美國數學協會（Mathematical Association of American）出版的美國數學月刊（American mathematical Monthly），還有些類似的題目亦出現於各種數學雜誌裏。除了由這些來源收集的若干資料外，以問題的方式，處理真正及進展的數學的著作還少見。

所以競試問題集（Olympiad Problem Book）第三增訂版的翻譯與訂正，當可供美國中學及大學的迫切需要。此書共收集了 320 題——其中少數題目具娛樂及啓發性的，但大多數的題目，均與純正且重要的數學理論密切配合，儘管學習此書無需高深的基礎。這些題目包括代數，算術，三角以及數論問題，而所有的題目皆強調創造性與啓發性。這些問題的設計皆以不依慣例的方法安排，主要目的就是作者欲強調啓發性與創造性重於解題能力與技巧。

此時，編者想起了不知何人於何書曾說過“教育最大的目的是要使學生如何能發掘問題而使學生能如何解答問題”。

所有問題都給了詳解；於許多情況下以不同之觀點與不同之解法討論同一問題。雖然大部份問題是爲中學學生而設的，但亦並不容易，且有些題目可向任何作研究的數學家挑戰。在另一方面來說，一個普通較聰明的高中生只

要用他的頭腦即可很快地解出問題。

在解題過程中若須引用較高深的觀念時，此觀念將首先予以討論，故此書頗有教科書的色彩。且較深的問題，其解法都甚為詳盡。

因此本書對高中與大學的學生可有各種不同的用法。特別可供高中數學老師作教材用，當然這必須要學生天賦才能較高才行，同時亦可作為學生自修之用。

除了原版中一些難免的錯誤，乃少許經翻譯而造成的生硬感外，英譯時對此書總算相當負責，要說此書有何不當，那要算是擅改的較多；（但原版的前言與序仍保留）（譯者註：此書譯成中文時已將俄文版的前言與序略去）。某些符號，雖與一般美國所用的不同，也仍將保留（例如，用 C_n^* 代以 C_n^* ）。

此書是從蘇俄的基本數學問題與定理集粹（Selected Problems and Theorem of Elementary Mathematics）的第三版英譯而成。

艾爾文 蘇斯曼

本書用法

本書共分為三部分，第一部分為題目敘述，第二部分為詳解，第三部分為答案與提示。為了更有效地利用此書起見，我們將答案與提示排於最後。

凡於問題題號上記有星號“*”者，為作者認為比其他題目較難之問題，還有少許題號上記有雙星號“**”的問題則為更難的題目（當然，題目之難易隨各人觀點而不同）。

對本書大多數的問題讀者在翻閱提示之前可試圖解答，倘若無法尋出解答，則可先翻閱提示，以幫助讀者引入解題的方向。倘若此時仍毫無頭緒，那麼才翻閱詳解部分。但若讀者自己即可找出解答，則可與答案及提示欄之解答比較，若讀者之答案與本書不同，那麼讀者可再檢查一遍自己的答案是否正確。若讀者之答案與本書相同，那麼讀者可再比較自己的解法與本書之解法有何不同。若本書列舉數種解法，則讀者可比較各種解法的利弊。

當然以上所列舉的用法也許不適合記有星號的題目，對於記有一個星號的題目而言讀者最好先參閱一下提示，以對解題有所助益，對於記有兩個星號的題目而言，讀者一定要先參考提示，以免枉費時間。這些問題可當作理論發展所得之重要定理，而詳解部分僅為參考資料。同時每一記有雙星號的題目都可拿來當作數學討論會上的特別報告或論文。在讀者欲解這些困難問題之前必須先要解出此題附近類似的簡單問題，否則會徒勞無功。而其中有一些題目之解題技巧並非可於一般高中課程找到的。

一般來說，這些題目彼此都互相獨立的，僅有少部分的題目其解法須用到別題的結果，但在最後四節裏許多類似的題目都放在一起，且其前後具有連貫性。

目 錄

譯者小言

英文版編者前言

作者前言

本書用法

1 問題敘述.....	1
2 整數位數的變換.....	4
3 整數的分割性.....	6
4 算術問題.....	11
5 具整數解之方程式.....	17
6 和與積的計算.....	20
7 代數雜題.....	26
8 多項式的代數.....	31
9 複數.....	35
10. 數論問題.....	40
11. 特殊不等式.....	44
12. 差數列與和數列.....	54
詳解.....	60
答案與提示.....	355

1. 問題敘述

1. 每個人在生活中，都曾和別人握過若干次的手，證明一群人相互握手，各人握手的次數為奇數，但其握手次數之總和必為偶數。
2. 在西洋棋中騎士從最左下角走到最右上角（按照規定走法）且每一方格必須經過且僅能經過一次，試問可能嗎？

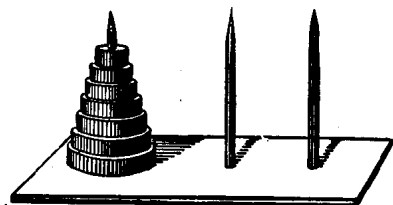


圖 1

3. (a) N 個圓圈皆為不同的直徑，套入一尖端朝上的木釘，最大的圓在最底層，因而形成一金字塔形（如圖形），我們希望將這些圓圈全部移到第二根木釘，而一次僅能移動一個圓圈，有第三根木釘可作為輔助用，但在每一個移動過程中，不能將大的圓圈置於小圓圈之上，試問最少的移動次數 k 為多少？

(b)* 一種「中國圓圈智力測驗遊戲」結構如下： n 個同樣大小的圓圈，由一些金屬鉤串連於一平板上，這些金屬鉤皆為等長（如圖 2）。

一 U 形細木桿——穿過圓圈，使得金屬鉤恰位於 V 形木桿開口中，此 V 形木桿固定於一大木板上（金屬鉤在平板之洞中可自由移動如圖示），現要將圓圈全部自 U 形木桿中移出，試問最少須要移動圓圈幾次？

4. (a) 80 個同樣種類的錢幣，已知其中有一為偽幣且較其他錢幣為輕，試經天平量取 4 次而能指出偽幣。

(b) n 個相同的錢幣中有一為偽幣，試問最少須要用天平測量幾次才

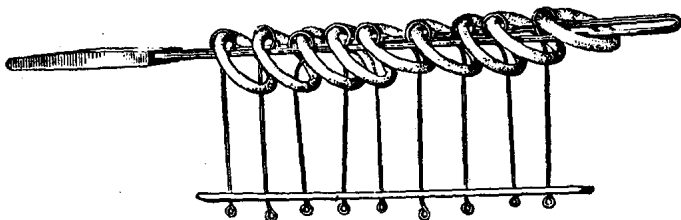


圖 2

能找出僞幣？

5. 20個大小及外貌皆相同的金屬塊，其中某些為純鉛塊，其餘為鋁合金塊，鋁合金塊較重，最多可用天平稱取11次，如何決定純鉛塊有若干個？

6. (a)* 12個相同之錢幣，其中有一僞幣，而不知此僞幣比真正錢幣輕或重（但真幣皆為等重），用天平量取三次，如何顯示此僞幣比真幣輕或是重？

(b)** 1000個相同之錢幣中，有一為僞幣，而不知此僞幣比真幣輕或重，試問最少須要天平稱取若干次才可找出僞幣且可決定此僞幣比真幣輕或是重？

註：在問題(a)的情況中可以稱取3次而能從13個錢幣中指出僞幣，但我們不能決定此僞幣與真幣孰輕孰重，當14個錢幣時就必須稱取4次。若我們已知僞幣較錢幣為重時，決定最少需要稱取幾次以從1000個錢幣中指出僞幣是較為容易的。

7. (a) 一旅行者身邊沒有錢，但有一金質鏈子，由七個環連成，旅館允許在停留期間每天必須付一金環，以為住宿費，而旅館可用他已付的金環再找給他，問若旅行者欲住七天，最少只須剪開幾個環（註：金環可從金鏈上任意位置剪下）？

(b) 一鏈由2000個環連成，最少只須取下幾個環（可從鏈上任意位置取下）使得從1到2000中任一數目的環，皆可表示出？

8. 200個學生排成10列，每一列20個學生，形成20行，每行10個學生。從20行中每一行選出一最矮的，再從這20個最矮中選出一最高的當

作 A 生。選出的 20 個矮生再回到原位形成原來隊形，再從 10 列中每列選出一名最高的，從這 10 名最高的再選出一名最矮的當作 B 生，試問 A 生與 B 生孰較高（設 A 與 B 不為同一人）？

9. 若有 13 個齒輪，每一齒輪的克數皆為整數，已知此 13 個中任 12 個皆能置于天平中，每邊放 6 個而達到平衡，證明此 13 個齒輪必為等重。

10. 下列三角形數列：

```

      1
    1 1 1
  1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1

```

其中每一數為此數的上方及左上，右上方三數之和。若此數的上方或左上，右上方無數目時則以零代替之，證明第三列以後每一列皆至少包含一個偶數。

11. 12 個方格圍成一圓周，四個不同顏色的籌碼紅、黃、綠、藍，置於 4 個連續的方格上，一籌碼可沿順時針或反時針的方向隔四格跳入第五格，但要第五格沒有籌碼才可，如此經過若干次的移動，直到四個籌碼又重新出現於原來四個方格時，試問籌碼經過如此處置後，可能出現多少種排列情形？

12. 一個小島上住著五個人和一隻可愛的猴子，一天下午他們五個人弄到一堆椰子，準備第二天早上平均分配。到晚上時其中一人醒來，將椰子分作五等分結果剩下一個，而將這個多的給了猴子，並且把自己的一份藏起來，其餘的合作一堆，過一會兒另一個人也醒來同樣作法，將整堆分作五等份，結果亦是多餘一個，而將多餘的給了猴子，自己的一份藏起來，經過一夜，每一個人都如此做過一次，而結果都是剩餘一個給了猴子，但他們彼此並不知道，第二天早上五個人一同去分已經減少了的椰子，結果又是剩下一個，試問原來的椰子數最少應為若干？

13. 二兄弟買一群羊，若為 n 頭，而每頭所賣的價錢又恰為 n 元，全部賣完後，二兄弟分錢的方法如下，先由兄拿十元，再由弟拿十元，如此輪流，拿到最後，剩下不到十元，輪到弟拿去，為了平均分配，兄再給弟一把小刀，即可達分配平均，試問小刀的價值若干？

14. * (a) 試問陽曆新年較常碰到禮拜六還是禮拜天？

(b) 每月的 13 號較常碰到星期幾？

2. 整數位數的變換

15. 那些整數具有下列性質？若將一整數之末位數字刪掉，形成一新整數而原來的數可被此新數整除。如 36 被 3 整除，24 可被 2 整除。

16. (a) 找出所有以 6 字開頭的整數而具有下列性質，若將原數之首位去掉，形成一新數，此新數必定為原數的 $\frac{1}{25}$ 。

(b) 若將某數的首位刪掉，所得的新數為原數的 $\frac{1}{35}$ 證明此數不存在。

17.* 一整數若刪掉其中某一位數後其結果為原數的 $\frac{1}{9}$ 且可被 9 整除：

(a) 試證被 9 整除後所得的商，恰為原數刪掉某位數。

(b) 找出所有滿足題目條件的數。

18. (a) 找出所有具有下列性質的整數：某數去掉其第三位數字後所得的新數可除盡原數。

(b)* 找出所有具有下列性質的整數：某數去掉其第二位數字後所得的新數可除盡原數。

19. (a) 找出最小的整數，使得其第一位數字為 1，若將此數字移到最末位，則變為原數之 3 倍。試寫出所有具有此性質之數。

(b) 將一整數的首位調到末位，形成的新數為原數的 3 倍，試問此數之首位數字必須為何始為可能？找出所有這種整數。

20. 證明自然數中不存在一個數，其首位調到末位後是原數的 5 倍，6 倍，或 8 倍。

21. 證明不存在一個數，其首位數字調於末位後而為原數之兩倍。

22. (a) 證明不存在一個數，其首位調於末位後，變為原數之七倍或九倍。

(b) 證明不存在一個數，其首位調於末位後，而變為原數之四倍。

23. 找出一最小整數，使得其首位為 7，當將首位調於末位時，其值變為原數的 $\frac{1}{3}$ 。

24. (a) 一整數所含的數字，與另一整數所含的數字完全相同，但其排列次序恰完全顛倒，則稱此數為另一數的倒置，如123與321，證明一數的倒置不可能為此數的2倍，3倍，5倍，7倍或8倍。

(b) 找出所有的數使得此數的“倒置”為原數的4倍或9倍。

25. (a) 找出一六位數使得其末三位數（不改變相關次序）移到前三位數後，變為原數的6倍。

(b) 證明不存在一八位數使得其末四位數（不改變相關次序）移到前四位數後，變為原數的6倍。

26. 找出一六位數使得此數分別乘以2, 3, 4, 5, 6時，其結果所含的各位數字，與原數所含的各位數字相同，僅其排列次序不同。

3. 整數的分割性

27. 證明對任意整數 n 而言

- (a) $n^3 - n$ 可被 3 整除。
- (b) $n^5 - n$ 可被 5 整除。
- (c) $n^7 - n$ 可被 7 整除。
- (d) $n^{11} - n$ 可被 11 整除。
- (e) $n^{13} - n$ 可被 13 整除。

註：但 $n^9 - n$ 不為 9 整除，例如 $2^9 - 2 = 510$ 不為 9 的倍數。問題 (a)–(b) 為一般定理的特例，參考問題 240。

28. 證明下列敘述：

- (a) 對每一正整數 n 而言， $3^{6n} - 2^{6n}$ 為 35 的倍數。
- (b) 對每一整數 n 而言， $n^5 - 5n^3 + 4n$ 可被 120 整除。
- (c)* 對於所有整數 m, n 而言， $mn (m^{60} - n^{60})$ 可被 56, 786, 730

整除。

29. 對於任意正整數 n ，試證明 $n^2 + 3n + 5$ 不被 121 整除。

30. 無論 m ， n 代以任何整數，證明下式

$$m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5$$

不可能為 33。

31. 一整數的 100 次方被 125 除，其餘數可能為何？

32. 試證若整數 n 與 10 互質，則 n 的 101 次方的末 3 位數字必定與原數的末 3 位數字相同，如 1233^{101} 的末 3 位數為 233， 37^{101} 的末 3 位數為 037。

33. 找出一三位整數，使得此數的任意整數次方，其結果末 3 位數字皆與原數相同。

34. 令 N 為不可被 10 整除的偶數，試問 N^{20} 的十位數字為何？ N^{200} 的百位數字為何？

35. 證明下式可被 $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ 整除：