断裂理论与实验研究

李灏等编著

湖北人民出版社

DUANLIE LILUN YU SHIYAN YANJIU

[illegible]

断裂理论与实验研究

李　灏 等编著

湖北人民出版社

断裂理论与实验研究
李灏等编著
*
湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行
湖北省新华印刷厂印刷
787×1092毫米16开本　14印张　4插页　315,000字
1980年4月第1版　1980年4月第1次印刷
印数：1—2,200
统一书号：13106·50　定价：2.46元

序

断裂力学是研究含裂纹物体的强度科学，是固体力学的一个新分支。

早在二十年代初期，Griffith 用能量原理对玻璃的断裂问题进行了探讨，建立了断裂应力、裂纹尺寸与材料性质三者之间的关系，为线弹性断裂力学奠定了理论基础。然而，由于当时工业水平的限制，生产实际没有大量提出低应力脆断问题，因而 Griffith 的理论很久没有得到多大的注意和发展。这正好说明科学技术的发展，归根到底服从于生产的需要这一原理。后来，现代工业的迅速发展，出现了大量的低应力脆断事故，推动了断裂力学的产生和发展。五十年代，Irwin提出应力强度因子概念，为线弹性断裂力学建立了较完整的体系。六十年代以来，弹塑性断裂力学受到很多断裂力学工作者的注意，出现了COD理论、J积分理论、非线性$\widetilde{G}$概念、R—曲线方法以及等价能量法等研究成果。近年来，断裂动力学、复合材料断裂力学、概率断裂力学和微观断裂力学的研究都有很多进展。断裂力学的研究和应用方兴未艾。

我们开始主要是学习和研究断裂力学方面的基本理论，进行基础性断裂实验，后来着重于结合应用课题开展理论和实验研究，写过一些学术论文和学术报告，分别发表在国内一些刊物上。目前，我们正面临着实现“四个现代化”的大好形势，它将给断裂力学以更为巨大的推动。为了更好地把断裂力学的知识推广到教学、科研和工程应用中去，满足一些大专院校师生、科学研究人员和工程技术人员的要求，我们选择部分已发表的学术报告和论文，有的加以修改，汇编成《断裂理论和实验研究》一书，供相互交流之用。

“Noether 理论与场的守恒定律”一文介绍了能量动量张量的概念，讨论了能量动量和角动量的守恒性，并转入关于弹性动力学守恒定律的研究，说明 Rice 的 J 积分的守恒性只是它在二维弹性静力学的一个特殊情况。“裂纹快速扩展时的能量转化”一文从能量原理出发建立了裂纹快速扩展时通向裂纹尖端的能通率概念和能通率判据，还讨论了断裂动力学中的裂纹最高扩展速率和分岔问题。“断裂参数 J 的原理和实验研究”和“J 积分的单点计算法”两篇研究报告阐明了 J 积分的物理意义，提出了计算 J 的实用计算方法，并报道了实验验证的结果。总之，这一组文章是关于断裂动力学和弹塑性断裂力学的。

第二组文章介绍了我们关于复合判据的研究成果。“K_{I}—K_{III}复合型断裂试验研

究”是我国首次进行这类试验研究的总结。“剪应力强度因子断裂准则”是一种关于以Ⅱ型或Ⅲ型为主的复合型断裂判据。“非线性能量率断裂判据”则不仅可用于分析张开型的非线性断裂问题，而且可用于分析复合型的非线性断裂问题，我们的实验初步验证了这一判据。

第三组文章是关于有限元法的。“确定应力强度因子的有限元法”一文综合评述了国内外用以确定应力强度因子的各种有限元法。“离散型 Dirichlet 问题的转移法”是一种新的有限元法。“用有限元法计算空心圆轴环状表面裂纹的 K_{I}”就是用转移法编制程序在容量较小的电子计算机上用较少的时间完成了计算的一篇报告，在此基础上得到空心圆轴内环和外环表面裂纹 K_{I} 的近似计算公式。

在第四组文章中，“基体钢 65Cr4W3Mo2VNb 的断裂韧度”分析了热处理条件对断裂韧度的影响，初步探讨了工模具钢脆断的微观机理。而“静载下解理断裂的微观机理”则较为系统地介绍了国内外的研究成果，对于微观组织结构对解理断裂过程的影响提供某些物理图象。

关于疲劳裂纹扩展的研究则列入第五组文章。“加载频率对疲劳裂纹扩展速率的影响”一文是在较为大量实验基础上的一篇学术报告，给出了加载频率对裂纹扩展速率的影响的具体表达式。“一种适用的裂纹扩展速率表达式”表明，仅需测出四个材料常数便可近似估算裂纹扩展速率。“三点弯曲试验疲劳装置”是一种既可用于预制疲劳裂纹，又可用于测定裂纹扩展速率的简易装置。用它代替昂贵的疲劳试验机，具有较大实用意义。

关于断裂力学的应用，我们编入了“柴油机稀土球墨铸铁曲轴的断裂力学分析”这篇综合研究报告。这篇报告应用线弹性断裂力学理论研究了曲轴的断裂强度和寿命问题，并提出了降低曲轴断裂率的一些途径。

此外，“断裂力学在中国的进展”一文介绍了我国在裂纹尖端应力场分析、J 积分、复合判据以及疲劳等方面的研究进展。

这本书的编辑工作主要是赵廷仕、张以增和沈为等同志共同完成的，高大兴和李伯谅同志也参加了部分编辑工作。

李　灏

一九八〇年二月于华中工学院

目　　录

断裂力学在中国的进展

李 灏　　沈 为

断裂力学是研究含裂纹物体的强度学科。这门学科在一九七〇年左右引入我国。起初，一些力学工作者和材料学工作者学习和运用断裂力学理论成功地解决了一批工程结构和零件的裂纹问题，如转子锻件、球墨铸铁曲轴、压力容器、高压钢管、发动机涡轮盘、锅炉大梁、混凝土坝、钻机吊环和工模具等的裂纹问题。近年来，我国有上百个高等院校和研究所开展断裂力学基本理论和基础实验的研究，并取得一些进展。本文依据我们所了解的部分情况，就宏观断裂力学的几个方面在中国的进展作一评述，供同行讨论。

一、关于裂纹尖端附近的应力场

断裂力学的发展，特别是非线性断裂力学的发展，需要进一步弄清裂纹尖端附近的应力应变场。

陈篪（一九七五年）研究了材料硬化对裂纹尖端附近塑性区的影响[1]。他假设内应力$(\sigma_{yy})_{\theta=0}$的主项为（图1）

$$(\sigma_{yy})_{\theta=0}=\sigma_Y^*\left(\frac{\omega_0}{x}\right)^{\frac{n}{1+n}} \tag{1}$$

式中σ_Y^*是屈服应力

$$\sigma_Y^*=\begin{cases}\sigma_Y & (\text{平面应力})\\ 2.97\sigma_Y & (\text{平面应变})\end{cases}$$

ω_0是塑性区宽度，n是材料的硬化指数。由此，他改进了 Irwin 的塑性区修正法，得到了Ⅰ型裂纹的塑性区修正尺寸

$$\frac{1-n}{1+n}\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_{\text{I}}}{\sigma_Y^*}\right)^2 \tag{2}$$

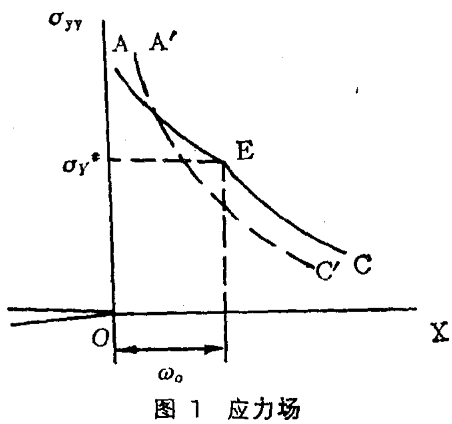

图 1　应力场

这同 Rice 关于Ⅲ型裂纹的结果是一致的[2]。在此基础上，陈篪导出裂纹扩展力

$$G_{\text{I}}=G_{\text{I}0}\left\{1+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-n}{1+n}\right)\frac{c''(a)}{c'(a)}\left(\frac{K_{\text{I}}}{\sigma_Y^*}\right)^2\right\} \tag{3}$$

式中$G_{\text{I}0}$是线弹性G_{I}，$c(a)$是线弹性柔度。作者认为，塑性区的存在并不能理解为增大应力强度因子，而是增大了裂纹扩展力。这个结果同 Hilton 和 Hutchinson 的结果[3]符合得颇好。

大连工学院弹塑性理论研究室（一九七八年）从弹性平面椭圆孔的精确解出发，退化到一无限细裂纹的裂纹尖端应力场[4]，研究了 Westergaard[5]和 Irwin 的应力解的局限

性。在此基础上，提出广义应力强度因子 K_{Ig}[6]

$$K_{Ig}=\eta K_{I} \tag{4}$$

η 是一多变量函数。对于无限细裂纹尖端，$\eta=1$；否则 $\eta<1$。这个理论可以反映裂纹宽度对应力强度因子的影响，并使断裂力学的概念同通常强度理论的应力集中系数联系起来，有利于建立弹塑性断裂判据。

薛大为（一九七八年）利用 Rice 和 Rosengren[7] 的结果，给出了平面应变条件下裂纹尖端附近弹塑性的应力场、应变场和位移场的解析近似解[8]，其特例即 Irwin 的弹性主项解。

在《非线性断裂力学的增量研究》（一九七七年）的第一部分[9]，欧阳鬯采用有限元法，按应力增量——全应变增量的增量关系讨论了静态裂纹尖端塑性区的扩展。第二部分[10]考虑了应力历程，使裂纹尖端不断放松以模拟开裂过程的推移发展。这些探讨对于弹塑性断裂判据的研究是有帮助的。

陈箎（一九七七年）认为现实材料中裂纹的产生总是以一定的塑性应变为前导的，裂纹顶端必然钝化，裂纹顶端附近的应力应变必然有界[11]。从这点出发，他认为奇性项理论不应成为讨论裂纹扩展判据的基础。实验结果和理论分析表明，对延性和解理断裂的材料，裂纹扩展的判据分别是最大切应力判据和最大拉应力判据；裂纹体、切口体和光滑体的开裂判据并无截然区别。他建议发展计算和测定裂纹顶端塑性区内应力和应变的方法，并深入研究裂纹顶端在各种加载过程中的钝化规律。

断裂力学工作者运用连续介质力学方法研究裂纹尖端附近的应力场，从场的奇异性出发，提出了应力强度因子概念，成功地建立了目前线弹性断裂力学的理论体系。然而，要进一步解决弹塑性断裂问题，完善非线性断裂力学的理论，一方面要继续在宏观连续介质力学基础上，从实验和理论上弄清裂纹尖端附近的弹塑性应力应变场；另一方面，也许是更重要的方面，有必要从亚微观上弄清裂纹尖端最近处的物理本质。把微观的材料断裂机理与宏观的应力应变分析结合起来，才有可能建立起崭新的非线性断裂力学。

二、关于 J 积分

裂纹扩展力、能量释放率和 J 积分三者之间的关系，可以作如下简要的解释。考虑紧紧包围裂纹前缘耗散区的一个变动的区域 R，流入该区域的能量为

$$\delta U=\int_{\partial R}(\sigma_{ij}\delta u_i+w\delta v_j)\,n_j dA \tag{5}$$

其中 w 为内能密度，δu_i 和 δv_i 分别为区域 R 的界面 ∂R 上质点的位移和变动界面面元的位移。因此能量判据为

$$\delta U=\int_{\partial R}(\sigma_{ij}\delta u_i+w\delta v_j)\,n_j dA=\delta D \tag{6}$$

其中 δD 为耗散能。设 $ox_1x_2x_3$ 和 $o'x'_1x'_2x'_3$ 分别是随裂纹前缘的坐标系和固定坐标系（图 2）。

$$x_i=x'_i-\delta V_i$$

其中 δV_i 为前缘的位移，则有 $\delta x_i=-\delta V_i$。设界面 ∂R 和位移场对于初坐标系 $ox_1x_2x_3$ 都

是稳定的，则

$$\delta u_i = u_{i,j}\delta x_j = -u_{i,j}\delta V_i$$

$$\delta v_i = \delta V_i$$

于是有

$$\delta U = \delta V_j \int_{\partial R} (w\delta_{ik} - \sigma_{ik}u_{i,j})\, n_k dA$$

$$= G_j \delta V_j \tag{7}$$

而 $$G_j = \int_{\partial R} (w\delta_{jk} - \sigma_{ik}u_{i,j})\, n_k dA \tag{8}$$

就是所谓裂纹扩展力。

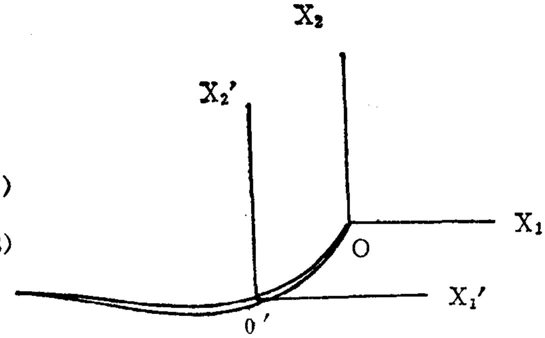

图 2 坐标系

对于沿着 x_1 扩展的裂纹，

$$G_{\rm I} = \int_{\partial R} (wn_1 - t_i u_{i,1})\, dA \tag{9}$$

就是能量释放率，其中牵引力 $t_i = \sigma_{ik}n_k$。对于厚度为 B 的二维裂纹体，单位厚度的能量释放率

$$J = \frac{G_{\rm I}}{B} = \int_\Gamma (wdx_2 - t_i u_{i,1} ds) \tag{10}$$

就是 J 积分。

关于 J 积分的实用计算，Rice（一九七三年）曾考虑一具有单边深裂纹平板，受面内弯矩作用[12]。Rice 实际上假设

$$\varDelta a = \psi\left[\frac{p}{B(W-a)^2}\right] \tag{11}$$

从而导出

$$J = \frac{2}{B(W-a)}\int_0^{\varDelta a} pd\varDelta a = \frac{2(U-U_0)}{B(W-a)} \tag{12}$$

后来，Landes 和 Begley 一九七四年才改为[13]

$$J = \frac{2U}{B(W-a)} \tag{13}$$

关于这个问题，陈篪等（一九七五年）从线弹性柔度和极限载荷分析独立地假设

$$\varDelta = g\left(\frac{p}{B(W-a)^2}\right) \tag{14}$$

导出了深裂纹三点弯曲试样的 $J = \dfrac{2U}{B(W-a)}$[14]，并指出 Rice 的（12）式与实际不符。陈篪等还认为（13）不宜用于紧凑拉伸试样，应改用

$$J = \frac{\frac{a}{W}+2.30}{\frac{a}{W}+0.65}\ \frac{U}{B(W-a)} \tag{15}$$

沈为（一九七八年）认为，由于裂纹顶端不是理想的尖裂纹，试样的 p—$\varDelta$ 曲线必然存在线弹性部分（图 3）。只有当外载 $p > p_0$ 时，裂纹顶端才屈服，p—$\varDelta$ 曲线才发生非线性偏离。因此，可以假设如下计算模型[15]

$$\varDelta = \varDelta_e + \varDelta_p$$

$$=\begin{cases} pc & (p\leqslant p_0) \\ pc+\alpha(p-p_0)^{\frac{1}{n}}C^{\frac{1}{n}} & (p>p_0) \end{cases} \tag{16}$$

式中 c 为线弹性柔度，n 是材料的硬化指数。将(16)式代入恒载荷的 J 积分的表达式

$$J=\frac{1}{B}\int_0^p\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)_p dp \quad ,$$

可以导出

$$J=\left\{1+\frac{2}{1+n}\left(\frac{\Delta/\Delta_0}{p/p_0}-1\right)\left(1-\frac{p_0}{p}\right)\right\}G_{\rm I} \tag{17}$$

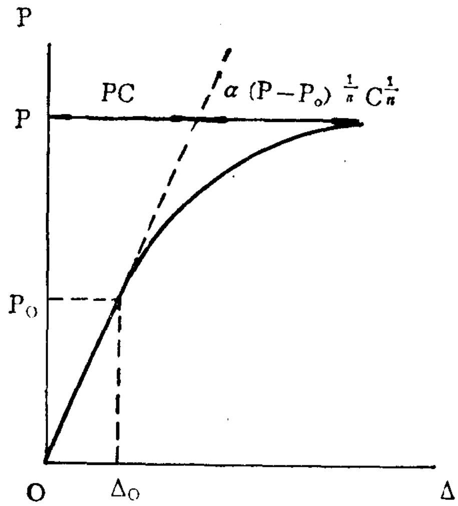

图 3　p——Δ 曲线

这个公式可能比(13)式和 Eftis 等的 $\widetilde{G}$ 计算公式[16]要好，因为后者在计算模型中都略去了 p—Δ 曲线的线弹性部分，偏大地估算了 Δp。

关于 J 积分实用计算公式的另一项研究工作是蔡其巩(一九七七年)得到的。他认为，在简单加载条件下，不可压缩幂乘硬化材料裂纹体的 J 积分全量理论和增量理论是一致的。他用量纲分析法导出不可压缩幂乘硬化材料的 J 积分和裂纹张开位移 δ 与标称应变 ε 以及裂纹尺寸 a 之间的简单函数表达式，并用有限元计算结果的外推独立地求得全塑性区中裂纹 J 积分关系[17]

$$J=2\pi Y^2a\int\sigma d\varepsilon \tag{18}$$

的有效性。他指出，由于存在局部韧带屈服，Burdekin 一九七一年的经验关系[18]

$$\frac{\delta}{2\pi a\varepsilon_Y}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y}-0.25 \tag{19}$$

在含深表面裂纹的全塑性宽板情况并不适用。

J 积分和 COD 是目前弹塑性断裂力学领域里的两种基本参量。陈篪等(一九七五年)研究了两者的关系[19]。设金属材料的硬化服从幂乘律

$$\bar{\sigma}=\alpha(\bar{\varepsilon}_p)^n$$

其中 $\bar{\sigma}$ 是有效应力，$\bar{\varepsilon}_p$ 是有效塑性应变，则 J 积分与裂纹顶端塑性张开位移 δ_p 之间存在关系

$$J=G+\frac{1}{1+n}\sigma\delta_p \tag{20}$$

这个关系和目前广泛采用的公式

$$J=\beta\sigma_Y\delta$$

不同，没有不确定的系数。

在断裂韧度 $J_{\rm Ic}$ 试样的尺寸要求方面，北京钢铁学院断裂韧性组(一九七七年)研究了 $J_{\rm Ic}$ 和 $K_{\rm Ic}$ 相一致的条件[20]。研究结果要求

$$\begin{cases}(W-a)\geqslant(0.35\sim0.45)\left(\dfrac{K_{Ic}}{\sigma_Y}\right)^2\\ B\geqslant\left(\dfrac{K_{Ic}}{\sigma_Y}\right)^2\end{cases}\tag{21}$$

可见，用 J 积分试样测定平面应变断裂韧度比 ASTM E399 的标准 K_{Ic} 试样尺寸要小得多，但却大于 Paris 的建议[21]。他们认为，如开裂时试样韧带已全面屈服，则所测的 J_{Ic} 偏高，J_{Ic} 与 K_{Ic} 不一致。

三、关于复合型裂纹的断裂判据

材料和结构中的裂纹相对于加载方式常常是复合型的。复合型断裂判据是近年来断裂力学研究的一个重要课题。中国科学院力学研究所十二室（一九七六年）认为最大拉应力判据[22]和应变能密度判据[23]都是在以裂纹尖端为中心的同心圆（等 r 线）上比较有关力学量，这种比较缺乏明确的力学意义。作者建议考虑裂纹尖端附近等应变能密度线（简称等 W 线），认为裂纹起始扩展在等 W 线上最大拉应力 $(\sigma_\theta)_{max}$ 方向[24]；开裂时

$$\lim_{r\to0}\sqrt{2r}(\sigma_\theta)_{\theta=\theta_0}=k_{Ic}\tag{22}$$

其中 θ_0 为开裂角。薛大为等（一九七六年）认为裂纹的形成与扩展和位错理论有密切联系，他们建议考虑裂纹尖端等剪应力 $\tau_{r\theta}$ 线（简称等 τ 线），认为裂纹起始扩展在等 τ 线上 $(\sigma_\theta)_{max}$ 方向[25]。王铎等（一九七七年）建议考虑裂纹尖端附近等形状应变能密度线（简称等 w_d 线），认为裂纹起始扩展在等 w_d 线上 $(\sigma_\theta)_{max}$ 方向[26]。薛大为或王铎提出的判据，开裂条件都同样用（22）式表示。某些实验结果分别支持了这些对最大拉应力判据的修正理论。看来，在等 w 线或等 τ 线或等 w_d 线上比较有关力学量比在同心圆上作比较，力学意义要明确些。

马德林（一九七八年）认为，对于二维平面裂纹，当支裂纹长度趋于零时，可定义广义应力强度因子[27]

$$k^*=\lim_{r\to0}\sqrt{2r}\sqrt{\sigma_\theta^2+\tau_{r\theta}^2+\tau_{\theta z}^2}=\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2+\bar{k}_3^2}\tag{23}$$

并在此基础上提出广义应力强度因子断裂判据。此判据认为，裂纹起始扩展在 k^*_{max} 方向；裂纹开裂时

$$k^*_{max}=k_{Ic}.\tag{24}$$

实际上，对于Ⅰ—Ⅱ复合型裂纹，广义应力强度因子判据与最大拉应力判据是等价的，但前者还考虑了Ⅲ型变形的存在。

关于能量释放率判据，王自强（一九七七年）作了探讨[28]，他用复变函数方法得到支裂纹长度趋于零时复合型裂纹尖端的 k_1 和 k_2，则能量释放率

$$G=\frac{\pi(k+1)}{16\mu}(k_1f_1^0+k_2f_2^0)\tag{25}$$

式中 $f_1^0=\{k_1^0(1+\cos\theta)-k_2^03\sin\theta\}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$f_2^0=\{k_1^0\sin\theta+k_2^0(3\cos\theta-1)\}\cos\dfrac{\theta}{2}$,

带小圈的都是指无扩展分支时的函数和物理量，θ 是主裂纹和支裂纹的夹角。作者还进而分析了 k_3 不为 0 的能量判据。还有，龙期威（一九七六年）把宏观裂纹看成是微观位错的塞积，把加到裂纹尖端的扩展力看成和加到塞积位错上的力一样，采用裂纹扩展力[29]

$$F_l = \oint (w\delta_{jl} - \sigma_{ij}u_{i,l})\,dS_j$$

的概念，认为裂纹沿着扩展力最大的方向扩展；扩展力达到它的临界值时裂纹起始扩展[30]。

对于以Ⅱ型或Ⅲ型为主的复合型裂纹问题，赵廷仕（一九七九年）认为其破坏形式主要表现为剪切断裂，破坏的剪切机理就是在剪应力作用下的滑移过程。他从正八面体平面上的剪应力出发，提出剪应力强度因子 c 概念，进而提出剪应力强度因子断裂判据[31]。这个判据并认为，裂纹的开裂方向是裂纹尖端到塑性区边界最短距离的方向。他提出的判据，实际上是形状应变能密度因子 S_d 判据。这个判据提出的开裂方向有颇为明确的意义。

上述各项断裂判据，都属线性的复合型判据。沈为（一九七九年）在能量分析基础上提出了非线性能量率断裂判据[32]。设 J_1，J_2，J_3 分别为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ型的非线性能量率（对于二维问题，它与 Rice 的 J 积分等价）。考察一个弹塑性的复合型裂纹问题，裂纹体的非线性能量率为

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

则非线性能量率判据为

$$J_1 + J_2 + J_3 = J_c \tag{26}$$

式中 J_c 是材料的非线性断裂韧度。无论对单一型裂纹或复合型裂纹，J_c 是常数，即有

$$J_{1c} = J_{2c} = J_{3c} = J_c \tag{27}$$

华中工学院的 $30Cr2MoV$ 钢（$\sigma_Y = 55\text{kg/mm}^2$）Ⅰ—Ⅲ复合型裂纹试验结果，验证了这个非线性能量率断裂判据。

四、关于裂纹在疲劳载荷下的扩展

断裂力学应用于疲劳，提出疲劳裂纹扩展速率概念，为估算结构的剩余寿命奠定了基础。陈篪（一九七七年）认为，当 $R = \frac{K_{min}}{K_{max}}$ = 常数时，用 Paris 公式

$$\frac{da}{dN} = c(\varDelta K_1)^m \tag{28}$$

来表示 $\frac{da}{dN}$——$\varDelta K$ 关系往往与实验结果不符，即使用把实验曲线（图 4）分成三段的办法去逼近也有相当的随意性。他建议[33]用公式

$$\frac{da}{dN} = c'\left\{\frac{(\varDelta K)^2 - K_2^2}{K_1^2 - (\varDelta K)^2}\right\}^p \tag{29}$$

来描述 $\frac{da}{dN}$——$\varDelta K$ 关系的实验结果。同时曲线的最低斜率为

$$m = 2p\left(\frac{K_1+K_2}{K_1-K_2}\right) \tag{30}$$

拐点Q 的

$$(\Delta K)_Q = \sqrt{K_1K_2} \tag{31}$$

一些实验结果与上面的定量表达式符合很好。

研究各种因素对疲劳裂纹扩展速率的影响，是一个重要的实用课题。华中工学院断裂力学科研组（一九七七年）比较系统地研究了加载频率对疲劳裂纹扩展速率的影响。对于 $30Cr2MoV$ 钢的三点弯曲试样，分别给于 0.7—10000cpm 五种加载频率的疲劳载荷。实验结果表明，加载频率对低速扩展阶段的 $\frac{da}{dN}$ 影响不明显，而对中速扩展阶段的 $\frac{da}{dN}$ 有明显影响，即加载频率 f 的降低将使疲劳裂纹扩展速率加大。理论分析结果表示为[34]

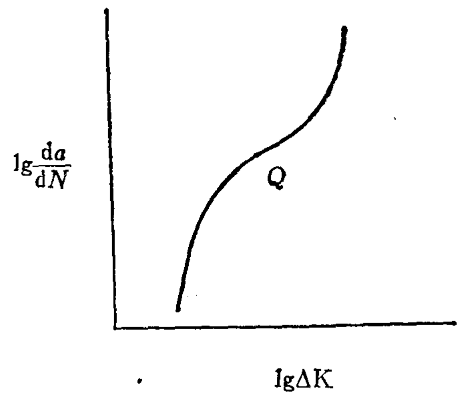

图 4 $\frac{da}{dN}$——ΔK 关系

$$\frac{da}{dN} = (A - B\log f)(\Delta K)^n \tag{32}$$

式中 A、B 和 n 由材料的疲劳试验测定。对 $30Cr2MoV$ 钢试验结果为 $A = 2.78\times10^{-9}$，$B = 0.447\times10^{-9}$，$n = 2.46$。

材料的界限应力强度因子幅度 ΔK_{th} 是进行抗断设计或评定有缺陷构件能否安全使用的一个重要指标。北京力学研究所十二室（一九七五年）的实验研究表明，平均应力是影响 ΔK_{th} 的主要因素，并提出表达式[35]

$$\Delta K_{th} = D\sqrt{1-R}\ \mathrm{kg/mm^{3/2}} \tag{33}$$

式中 D 由材料的试验决定。实验测得 $30Cr2MoV$ 钢的 $D = 37\ \mathrm{kg/mm^{3/2}}$。

北京钢铁学院断裂韧性组等（一九七八年）研究了半椭圆形表面裂纹在疲劳条件下产生和扩展的规律[36]。研究结果表明，曲率半径为 ρ 的表面缺陷形成疲劳裂纹的循环周次为

$$N_i = A(\rho)\left(\frac{\Delta K}{\sqrt{\rho}}\right)^{-n} \tag{34}$$

其中 $A(\rho) = \alpha\left(\frac{1}{\rho^2}\right)^{\beta}$，$\alpha$、$\beta$ 和 n 是材料常数。同时，界限应力强度因子幅度 ΔK_{th} 也和 ρ 有关。实验说明，ρ 愈小，ΔK_{th} 愈小。在拉压疲劳条件下，表面裂纹的疲劳裂纹扩展速率和中心穿透裂纹的扩展速率处在同一分散带里，而且表面裂纹的 c 向和 a 向的扩展速率皆可用 Paris 公式描述。在弯曲疲劳条件下，裂纹扩展速率可用单位椭圆周长的平均裂纹面积 $\frac{A}{S}$ 随 N 的变化率来表征。有

$$\frac{d}{dN}\left(\frac{A}{S}\right) = B(\Delta G_m)^n \tag{35}$$

其中 $\Delta G_m=\frac{1}{2}(\Delta G_a+\Delta G_c)$是半椭圆 a 端和 c 端的平均裂纹扩展力幅度，B 和 n 由实验测定。

实际工程结构和零件的弹塑性断裂，经常发源于塑性应变区中的小裂纹。它的寿命主要是由微裂纹在循环塑性应变介质中的扩展速率所决定。蔡其巩(一九七六年)从 J 积分的近似(17)式，导出应变疲劳下裂纹扩展速率$\frac{da}{dN}$和应力幅度 $\Delta\sigma$ 以及塑性应变幅度 $\Delta\varepsilon_p$ 之间的关系[37]：

$$\frac{da}{dN}=c\left[2\pi aY^2\left(\frac{\Delta\sigma^2}{8E}+\frac{A\Delta\varepsilon_p^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\right]^r \tag{36}$$

式中 c、r、A 和 α 都是由实验测定的参数。这个关系没有任何假定的模型，是建立在塑性区中裂纹的弹塑性分析的基础上，可能有广泛的适用范围。同时，他还从(17)式导出了由应变疲劳寿命实验归纳出的 Coffin-Manson 关系

$$\Delta\varepsilon_p N_f^k=c \tag{37}$$

其中 N_f 是疲劳寿命，k 和 c 由实验决定。

刘元镛(一九七七年)运用 Coffin-Manson 关系和陈篪的考虑到硬化的塑性区修正方法，导出拉伸下 I 型裂纹的应变疲劳裂纹扩展速率[38]

$$\frac{da}{dN}=B(\Delta K)^p \tag{38}$$

其中 $p=2$，系数 B 决定于材料的硬化指数、屈服应力、屈服应变以及疲劳断裂应力和疲劳断裂应变。这项研究结果的意义还在于，如果缺乏材料的应变疲劳裂纹扩展速率实验数据，可以近似用单调加载下的应力应变实验曲线反推得到参数 B，以近似估算结构的疲劳寿命。

参 考 文 献

〔1〕陈篪：《考虑到硬化的塑性区修正》，《力学》，1975 年第 2 期，第 78 页。

〔2〕J. R. Rice, Streses due to a sharp notch in a work-hardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear, J. Applied, Vol. 34, 1967, P.287.

〔3〕P. A. Hilton, J. W. Huchinson, Eng. Fract. Mech., Vol. 34, 1967, P. 287.

〔4〕大连工学院弹塑性理论研究室：《论裂纹尖端的奇异性质》，《中国机械工程学会断裂学术会议资料》，1978 年。

〔5〕H. M. Westergaard, Bearing pressures and cracks, JAM. Vol. 6, 1939.

〔6〕大连工学院弹塑理论研究室：《广义应力强度因子理论》，《中国机械工程学会断裂学术会议资料》，1978 年。

〔7〕J. R. Rice, G. F. Rosengren, Plane strain deformation near a crack tip in power-law hardening material. J. Mech. Phy. Sol., Vol. 16, 1968.

〔8〕薛大为：《平面应变条件下裂纹尖端附近的弹塑性近似分析》，《中国金属学会

第二次断裂学术会议资料》，1978 年。

〔9〕欧阳鬯：《非线性断裂力学的增量研究（Ⅰ）大范围屈服条件下的静态裂纹分析》，《中国机械工程学会断裂学术会议资料》，1977 年。

〔10〕欧阳鬯：《非线性断裂力学的增量研究（Ⅱ）关于裂纹稳定扩展的分析》，《中国机械工程学会断裂学术会议资料》，1977 年。

〔11〕陈篪：《论裂纹扩展的判据》，《新金属材料》，1977 年第 3、4 期，第 31 页。

〔12〕J. R. Rice, et. al, Progress in Flaw Growth and Fracture Toughness Testing, ASTM STP 536, 1973.

〔13〕J. A. Begley, J. D. Landes and W. K. Wilson, Fracture Analysis, ASTM STP 536, 1973.

〔14〕陈篪等：《论单试样测定 J_{Ic} 的方法》，《新金属材料》，1975年第 11、12 期，第 33 页。

〔15〕沈为：《J 积分的单点计算法》，《华中工学院学报》，1978 年第 2 期，第 130 页。

〔16〕J. Eftis, D. J. Jone, H. Liebowitz, On fracture toughness in the nonlinear range, Eng. Fracture Mechanics, Vol. 7, 1975.

〔17〕蔡其巩：《高应变区中裂纹分析》，《金属学报》，1977 年第 4 期，第 246 页。

〔18〕F. M. Burdekin and M. G. Dawes, Conference on Practical Application of Fracture Mechanics to Pressure-vessel Technology, Inst. Mech. Ing., London, 1971, P. 28.

〔19〕陈篪等：《论 J 积分和裂纹顶端张开位移间的关系》，《新金属材料》，1975 年第 11、12 期，第 59 页。

〔20〕北京钢铁学院断裂韧性组：《论 J_{Ic} 和 K_{Ic} 相一致的条件》，《断裂》，1971 年第 3 期，第 56 页。

〔21〕J. A. Begley and J. D. Landes, Fractuere Toughness, Procedings of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics, Part Ⅱ. ASTM STP 514, 1972, P. 1.

〔22〕F. Erdogan and G. C. Sih, On the crack extension in plates under plane loading and transvers shear, J. Basic Ingineering, 1963, P. 854.

〔23〕G. C. Sih, Stress-energy density factor applied to mixed mode crack problems, Int. J. Fracture, Vol. 3, 1974, P. 305.

〔24〕中国科学院北京力学研究所十二室：《一个新的复合型断裂准则》，《力学》，1976 年第 2 期，第 98 页。

〔25〕薛大为等：《建议一个新的断裂准则及对 J 准则的讨论》，《北京断裂力学交流会第二次会议资料》，1976 年。

〔26〕王铎等：《关于最大应力复合型断裂准则的修正准则》，《哈尔滨工业大学学报》，1977 年第 3 期，第 58 页。

〔27〕马德林：《广义应力强度因子断裂准则》，《力学学报》，1978 年第 2 期，第 162 页。

〔28〕王自强：《复合型裂纹的断裂准则》，《北京断裂力学交流会议文集》，1976 年，第 302 页。

〔29〕J. D. Esheby, Solid stlae physics, Vol. 3, ed by F. Seitz and D. Turnbull, Acadmic Pr., New York, 1956, P. 100.

〔30〕龙期威：《用弹性奇点移动模型分析混合裂纹问题》，《金属学报》，1976 年第 1 期，第 68 页。

〔31〕赵廷仕：《剪应力强度因子断裂准则》，《华中工学院学报》，1979 年第 1 期，第 132 页。

〔32〕沈为：《非线性能量率断裂判据》，《华中工学院学报》，1979 年第 1 期，第 120 页。

〔33〕陈篪：《裂纹扩展速率$\frac{da}{dN}$与K_{I}间关系的探讨》，《新金属材料》，1977 年第 3、4 期，第 99 页。

〔34〕华中工学院断裂力学科研组：《加载频率对疲劳裂纹扩展速率的影响》，《华中工学院学报》，1977 年第 2 期，第 59 页。

〔35〕北京力学研究所十二室：《$30Cr2MoV$ 的界限应力强度系数幅度 ΔK_{th} 的测定》，《北京地区断裂力学交流会文集》，1975 年，第 161 页。

〔36〕北京钢铁学院断裂韧性组等：《表面裂纹产生和发展的研究》（内部资料），1978 年。

〔37〕蔡其巩：《论塑性应变区中裂纹的扩展》，《金属学报》，1976 年第 1 期，第 45 页。

〔38〕刘元镛：《裂纹扩展的低周疲劳特性》，《西北工业大学（内部资料）》，1977 年。

Noether理论与场的守恒定律

李　灏

内 容 提 要

本文首先说明Noether理论和守恒定律的关系，介绍能量动量张量的概念，着重讨论了能量动量和角动量的守恒。然后，转入Fletcher关于弹性动力学守恒定律的研究，说明Rice关于J积分与路径无关的提法不过是这些守恒定律在二维弹性静力学里的一个特殊情况。

科学实践说明，自然界物理体系或场的一些可观察量，如质量与能量以及电荷，常具有守恒性。另一方面，体系的对称性一直是数理科学中使人关注的问题，而描述对称性最适当的数学概念往往是自同构群，就是使体系不变的变换群。实际上，设体系在某一变换群下具不变性，就可从这种对称性发现体系某一动态可观察量的守恒性。

不变性来源于经验实践。例如，人们常见到时间和空间参照系的位移下的不变性。又如人们发现，只要参照系的运动是匀速的，其运动状态便无关系。这就是狭义相对论原理，即Lorentz变换下的不变性。

D. Hilbert和A. Einstein将不变性理论提到从来未有的高度[1](注)。在这方面，女数学家E. Noether作出了卓越的贡献[2]。十九世纪，人们只将不变性原理和守恒定律当作运动方程(在场论里就是场方程)的推论。通过他们的工作，才将不变性原理看成现代数理科学的基本原则。反之，现代数理科学的基本原则都可溯源到对称性质或可用对称性来表述，从对称性推出守恒定律。

Noether理论早被用于经典力学[3]、电动力学和引力理论[4]，在量子场论[5]和基本粒子理论[6]中也有广泛的应用。近几年来，J. K. Knowles和E. Sternberg[7]与D.C. Fletcher[8]又将Noether理论分别用于弹性静力学与弹性动力学。这种研究对于断裂力学有很重要的意义。

作者认为，Noether理论还可作适当引伸，这个理论在现代引力理论和断裂力学等领域中的应用还未穷尽，因此试图对Noether定理与场的守恒定律作一较系统的评述，

注：方括号中数字指明文末所提供的参考文献，下同。