高等学校教材

高等数学

刘楚中　主编

机械工业出版社

高等学校教材

高等数学

主编　刘楚中
参编　张诚坚　胡跃荣　许青松　王仙桃
　　　罗　汉　刘宪高　周　展　黄立宏
主审　郭　忠　何灿芝

机械工业出版社

（京）新登字054号

本书是参照国家教委高等工业学校的“高等数学课程教学基本要求”及1990、1994年全国工科数学会议精神编写的。

本书包含一元微积分、多元微积分、向量代数与空间解析几何、级数、微分方程及数学分析中的数值方法。各章节后面配有适量的习题。

本书的结构和一些讲述方法有别于以往的同类教材，能为学生接受近代数学方法打下一定的基础。本书可作为高等工科院校少学时教材，或作为专科及成人教育系列的教材，也可作为广大工程技术人员自学用书或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/刘楚中主编. —北京：机械工业出版社，1995.5
高等学校教
ISBN 7-111-04610-2

Ⅰ. 高…
Ⅱ. 刘…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第15335号

出版人：马九荣（北京市百万庄南街1号　邮政编码100037）
责任编辑：王世刚　版式设计：张世琴　责任校对：肖新民
封面设计：姚　毅　责任印制：卢子祥
三河市宏达印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1995年5月第1版·1995年5月第1次印刷
850mm×1168mm 1/32·16.625印张·439千字
0 001—4 000册
定价：14.50元

前　　言

本书是参照国家教委高等工业学校的“高等数学课程教学基本要求”及1990、1994年全国工科数学会议精神编写的。

本书包含一元微积分、多元微积分、向量代数与空间解析几何、级数、微分方程及数学分析中的数值方法。各章节后面配有适量的习题。

本书的结构和一些讲述方法有别于以往的同类教材，能为学生接受近代数学方法打下一定的基础。本书可作为高等工科院校少学时教材，或作为专科及成人教育系列的教材，也可作为广大工程技术人员自学用书或参考书。

讲授本书的学时范围为130～150学时。

本书由刘楚中主编，其中第一、二章由张诚坚编写，第三、八章由胡跃荣编写，第四、五章由许青松编写，第六、七章由王仙桃编写，第十、十一章由罗汉编写，第十二、十三章由刘宪高编写，第十四、十六章由周展编写，第十五章由黄立宏编写，其余章节的编写工作及全书的最后定稿由刘楚中完成。

本书由郭忠教授和何灿芝教授主审。在编写中得到了周叔子教授的帮助和指导，在此我们深表感谢。

限于编者水平，书中可能存在不妥之处，希广大读者斧正。

编　者

1994年7月

目　　录

第一章 函　数

第一节 集合与映射

一、集合

所谓**集合**（简称**集**）是指具有某种特定属性的事物的全体，常用大写字母A，B，C，…表示。组成集合的事物称为该集合的**元素**，常用小写字母a，b，c，…表示。

x是集合A的元素，记为$x\in A$，即x属于A；x不是A的元素，记为$x\overline{\in}A$，即x不属于A。x或属于A，或不属于A。

例1-1　xy平面上的曲线L是满足某特性的点$P(x,y)$的集合。此时，$P(x,y)\in L$。

一个集合若只含有有限个元素，则称为**有限集**，否则称为**无限集**。

我们规定：不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$。

通常用下列两种方法来表示集合：(1)列举法：列举集合中的全部元素，并用大括号括上。如$A=\{a,b,c\}$；(2)特性描述法：给出该集合中元素x所具有的性质$P(x)$，记为$A=\{x\mid P(x)\}$。不论哪种表示法，集合中的元素不得重复出现。

为直观起见，我们有时也用几何图形来表示某些集合。

例1-2　设a为一非负常数，则点集

$$C(x_0,y_0)=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2\}$$

的图形是平面上以点(x_0,y_0)为圆心，a为半径的一个圆。

例1-3　满足不等式$x^2-2x-3<0$的全体实数构成的集合，记为$\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，这是特性描述法。

例1-4　方程$x^2-1=0$的解的全体组成一个集，列举法表示为$A=\{-1,1\}$；特性描述法表示为$A=\{x\mid x^2-1=0\}$。

例1-5 0，$\{0\}$，$\varnothing$是三个不同的概念：0是数，不是集合；$\{0\}$是仅含一个元素0的集合，$\varnothing$是空集。

若当$x\in A$时必有$x\in B$，则称A是B的**子集**，记为$A\subset B$或$B\supset A$。任何集合都是它自身的子集，即$A\subset A$，并规定$\varnothing$是任何集合的子集，即$\varnothing\subset A$。

若$A\subset B$，且存在$x\in B$，$x\,\overline{\in}\,A$，则称A是B的**真子集**。

子集及真子集具有传递性质，即：若$A\subset B$，又$B\subset C$，则$A\subset C$。事实上，若$x\in A$，则由$A\subset B$有$x\in B$，又$B\subset C$，故$x\in C$，所以$A\subset C$。

若$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B相等，记为$A=B$。

例1-6 $A=\{x\mid x^2-1=0\}$，$B=\{-1,1\}$，则$A=B$。

常用的数集符号有

$N=\{n\mid n\text{为自然数}\}=\{n\mid n=1,2,3,\cdots\}$

$Z=\{k\mid k\text{为整数}\}=\{k\mid k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

$Q=\{x\mid x\text{为有理数}\}=\{x\mid x=\dfrac{p}{q},\ p,q\in Z,\ q\neq0\}$

$R=\{x\mid x\text{为实数}\}$；实数集有时也表示为R^1。在这些集合中$\varnothing\subset N\subset Z\subset Q\subset R$

二、集合的运算

（1）交集 由集A和集B中的公共元素组成的集合，称为A与B的**交集**，记为$A\cap B$，见图1-1 a。当$A\cap B=\varnothing$时，简称A与B不交。

例1-7 $A=\{(x,y)\mid 2x-y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x-2y=2\}$

则 $A\cap B=\{(x,y)\mid 2x-y=1\text{且}x-2y=2\}=\{(0,-1)\}$

例1-8 若$A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+2>0\}$

则 $A\cap B=\{x\mid -1<x<1\text{或}2<x<3\}$

（2）并集 由集A和集B的一切元素所组成的集合称为A

与B的**并集**，记为$A\cup B$，见图1-1 b。

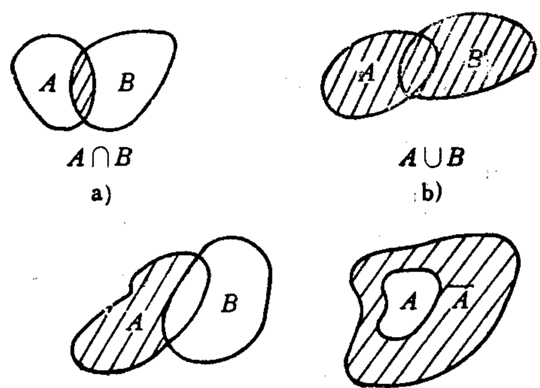
例1-9 $M=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$，$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，则

$$M\cup P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

例1-10 若$A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x\mid x=-1,\ 3\}$，则

$$A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$$

（3）差集 设A、B为两集，由集A中不属于B的那些元素所组成的集合，称为A与B的**差集**，记为$A-B$。这里并不要求$B\subset A$。例如$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5\}$，则$A-B=\{1,\ 2\}$。见图 1-1 c。当$B\subset A$时，称差集$A-B$为B关于A的**余集**。



$A\cap B$ a) $A\cup B$ b) $A-B$ c) $\overline{A}$ d)

图 1-1

（4）补集 包含所论及的一切元素的集合称为**全集**，记为Ω。若集$A\subset\Omega$，则称$\overline{A}=\{x\mid x\in\Omega$且$x\,\overline{\in}\,A\}=\Omega-A$为$A$的**补集**，如图1-1 d。例如$\Omega=\{1,\ 2,3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，$A=\{2,4,\ 6\}$，则$\overline{A}=\{1,3,\ 5\}$。

例1-11 试证 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

证 设任意$a\in\overline{A\cap B}$，则$a\,\overline{\in}\,A\cap B$，即$a\,\overline{\in}\,A$，或$a\,\overline{\in}\,B$，亦即$a\in\overline{A}$或$a\in\overline{B}$，故$a\in\overline{A}\cup\overline{B}$，从而$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$。

设任意$b\in\overline{A}\cup\overline{B}$，则$b\in\overline{A}$或$b\in\overline{B}$，即$b\,\overline{\in}\,A$，$b\,\overline{\in}\,B$，亦即$b\,\overline{\in}\,A\cap B$，则$b\in\overline{A\cap B}$，从而$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$。

故
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

完全类似地可以定义任意有限个集的并集及交集，设A_1，A_2，…，A_n为一组集。由所有A_i（$i=1$，2，…，n）的元素

所组成的集，称为该组集的并集，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$；所有的 A_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的公共元素所组成的集，称为这组集的交集，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$。

例1-12 已知 $A_i=\left\{x \mid 0 \leqslant x<1+\frac{1}{i}\right\}$，$i=1, 2, \cdots, n$，求 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$。

解

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n} A_i &=\{x \mid 0 \leqslant x<2\} \cap\left\{x \mid 0 \leqslant x<1+\frac{1}{2}\right\} \\ &\times \cap \cdots \cap\left\{x \mid 0 \leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\} \\ &=\left\{x \mid 0 \leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} A_i &=\{x \mid 0 \leqslant x<2\} \cup\left\{x \mid 0 \leqslant x<1+\frac{1}{2}\right\} \cup \cdots \cup \\ &\left\{x \mid 0 \leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\} \\ &=\{x \mid 0 \leqslant x<2\}\end{aligned}$$

集合的运算有如下性质：

1）$A \cup A=A$，$A \cap A=A$；$A \cup \varnothing=A$，$A \cap \varnothing=\varnothing$；

2）$A \cup B=B \cup A$，$A \cap B=B \cap A$；

3）$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup(B \cap C)$；

4）$(A-B) \cap C=(A \cap C)-(B \cap C)$；

5）$(C-A)-B=C-(A \cup B)$。

以上性质可由定义推导出来，这里证明从略。

以下逻辑量词在本书中常用到：

$\forall$ 表示“对每一…”或“对任意…”，或“对所有的…”；$\exists$

表示“存在”。$\bar{\exists}$表示不存在。

例如“存在正数x，使得$x^2-3x+2>0$”，可以写成

$$\exists x>0，使x^2-3x+2>0$$

又例如，“对所有的实数x，都有$x^2+1>0$”可以写成

$$\forall x\in R，都有x^2+1>0$$

如果当命题A成立时，必然得出命题B也成立，记为$A\Longrightarrow B$或$B\Longleftarrow A$，称B是A的必要条件，A是B的充分条件。如果A，B互为“充要条件”，记成$A\Longleftrightarrow B$，这时也可说：“当且仅当A成立时B成立”，或“A与B等价”。

例如，“$a=b=0\Longleftrightarrow a^2+b^2=0$”，可以述成“当且仅当$a=b=0$时，$a^2+b^2=0$”或“$a^2+b^2=0$等价于$a=b=0$。

三、映射

在中学初等数学学习阶段，我们对实值函数$y=f(x)$已较为熟悉，它实质上是将x轴上某一实数集与y轴上某一实数集构成了一种对应关系。现在我们研究一般的集合间的对应关系。

定义1 设X，Y为两个非空集，若存在某个对应规则f，使$\forall x\in X$，均有唯一确定的$y\in Y$与之对应，则称f是从X到Y的一个**映射**，记为f：$x\longrightarrow y$或$y=f(x)$。

此时，y称为x在映射f下的像，x称为y的一个**原像**，集X称为映射f的**定义域**，记为$D(f)$；$f(X)$称为映射f的**值域**，记为$R(f)$。

例1-13 设$X=\{x\mid x\in Z\}$，$Y=\{y\mid y为偶数\}$，则

$$y=f(x)=2x,\quad x\in X$$

定义了$X\longrightarrow Y$的一个映射f，其中$D(f)=X$，$R(f)=Y$。

定义2 设f：$X\longrightarrow Y$为X到Y的一个映射，若$f(X)=Y$（或$R(f)=Y$），则称f是X到Y**上**的映射（或**满射**）；若$\forall x_1$，$x_2\in X$，且$x_1\neq x_2$时，有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f为X到Y的一个**单射**；若f既是满射又是单射，则称f为X到Y的**一一对应**。

例1-14 设$A=\{C(x,y)\mid C(x,y)$是平面上圆心为

(x, y) 的圆$\}$，$B=\{(x, y) | x\in R, y\in R\}$，令

$$f: C(x, y) \longrightarrow (x, y)$$

则圆与圆心的对应 f 是 A 到 B 上的映射，但不是单射。

例1-15 验证例1-13中的映射是一一对应。

解 $\because$ $R(X)=Y$

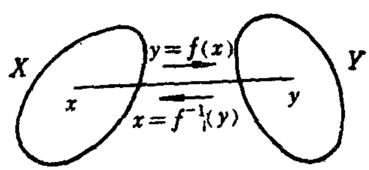
$\therefore$ 映射 f：$X\longrightarrow Y$ 是一个满射。

又 $\forall x_1, x_2\in X$，且 $x_1\neq x_2$，则 $2x_1\neq 2x_2$，故 f：$X\longrightarrow Y$ 是单射，从而 f：$X\longrightarrow Y$ 是 X 到 Y 的一一对应。

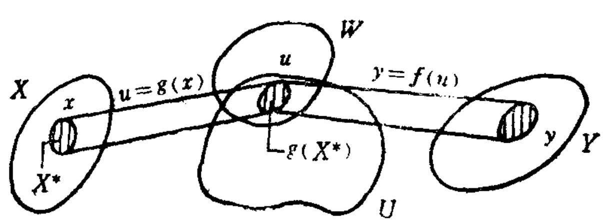
定义 3 设 f：$X\longrightarrow Y$ 是 X 到 Y 的一一对应，则 $\forall y\in Y$，存在唯一的 $x\in X$，使 $f(x)=y$，这就确定了映射 f^{-1}：$Y\longrightarrow X$，称之为映射 f 的**逆映射**。

f 的逆映射可记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Y$，$x\in X$，它也是一一对应，如图1-2 a 所示。

例1-16 设 $X=Y=R$，$y=\varphi(x)=x^3$ 是 X 到 Y 的一一对应，则 φ^{-1}：$Y\longrightarrow X$，即 $x=\varphi^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$。



a)



b)

图 1-2

定义 4 设有映射 g：$X\longrightarrow U$，f：$W\longrightarrow Y$ 若存在非空集 $X^*\subset X$，使 $g(X^*)\subset W$，则可构造 X^* 到 Y 的映射 $f\circ g$：

$X^* \longrightarrow Y$，即 $y = f\circ g(x) = f[g(x)]$，$x\in X^*$，称 $f\circ g$ 为 f 与 g 的**复合映射**（见图1-2 b）。

例1-17 设映射 $y = f(u) = \sqrt{u}$，$D(f)=\{u\mid u\geqslant 0\}$，$R(f)=\{y\mid y\geqslant 0\}$；$u = g(x) = 1+x^2$，$D(g)=R$，$R(g)=\{u\mid u\geqslant 1\}$，由于 $R(g)\subset D(f)$，故可构造复合映射

$$y = f[g(x)] = \sqrt{1+x^2},\quad x\in R。$$

第二节 函 数

一、实数

在中学阶段我们对函数和实数已有了一定的了解，在这里我们用集合与映射的观点对实数和函数作简单介绍。

1. 实数集与数轴

在初等数学里，我们已讨论过了有理数和无理数。全体有理数称为有理数集；全体无理数称为无理数集。实数集＝{有理数}∪{无理数}，或记为 $R = Q\cup W$，其中 W 为无理数集。

直线可看作是直线上的点形成的集合，当给一条直线确定了方向、原点和单位长度后，就形成了数轴。实际上，这就确定了实数集 R 与数轴上点的集合的一一对应。与有理数对应的点称为有理点，与无理数对应的点称为无理点。数轴上与点对应的数称为该点的坐标。因为实数与数轴上的点一一对应，所以我们今后常将数说成点，如说点 2，点 $\sqrt{2}$ 等。

任何两个实数之间一定存在无穷多个实数。此外，$\forall a\in R$，必 $\exists n$、$n+1\in Z$，使 $n\leqslant a < n+1$。

2. 绝对值、距离

任一实数 a 的**绝对值** $|a|$ 的定义是：

$$|a| = \begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

绝对值有如下性质：

（1）$\sqrt{a^2}=|a|$，$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$；

（2）$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$，$\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}$，$a\neq 0$；

（3）$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|$。

两点间的距离就是连接这两点的线段的长度，我们常用符号ρ（或$\|\cdot\|$）来表示。例如点a与点b的距离，就写成$\rho(a,b)$（或$\|a-b\|$）。

在数轴上，点的距离的计算往往是通过绝对值来实现，即$\rho(a,b)=|a-b|$，因此绝对值的几何意义也就是直线上点的距离。

二、区间、邻域、去心邻域

1. 区间

高等数学中常用的实数集合是区间、邻域、去心邻域。点集

$[a,b]\triangleq\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,\ a,b\in R\}$称为**闭区间**；

$(a,b)\triangleq\{x\mid a<x<b,\ a,b\in R\}$称为**开区间**；

$[a,b)\triangleq\{x\mid a\leqslant x<b,\ a,b\in R\}$及

$(a,b]\triangleq\{x\mid a<x\leqslant b,\ a,b\in R\}$称为**半开半闭区间**；

$$(-\infty,+\infty)\triangleq\{x\mid x\in R\},$$
$$(-\infty,b)\triangleq\{x\mid x<b,\ b\in R\},$$
$$(-\infty,b]\triangleq\{x\mid x\leqslant b,\ b\in R\},$$
$$(a,+\infty)\triangleq\{x\mid x>a,\ a\in R\}$$

及$[a,+\infty)\triangleq\{x\mid x\geqslant a,\ a\in R\}$称为**无穷区间**。前面四种也称为**有限区间**，a与b称为区间的端点，a称为**左端点**；b称为**右端点**。

对于有限区间，我们定义区间两端点的距离为该区间的**长度**。$[a,b]$，(a,b)，$(a,b]$，$[a,b)$的区间长度都为

$\rho(a, b) = b - a$。

当不必区分区间类型时，将笼统说成区间 I。

2. 邻域、去心邻域

邻域是高等数学的重要概念之一。

集$\{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in R\}$称为点 x_0 的 **δ 邻域**，记为 $U(x_0, \delta)$。x_0称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**。

集$U(x_0, \delta) - \{x_0\} = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in R\}$ 称为点x_0的**去心δ邻域**，记为$\hat{U}(x_0, \delta)$。

集$\{x \mid x_0 - \delta < x \leqslant x_0, \delta > 0, x \in R\}$称为点 x_0 的**左邻域**，记为$U(x_0^-, \delta)$。

集$\{x \mid x_0 \leqslant x < x_0 + \delta, \delta > 0, x \in R\}$称为点 x_0 的**右邻域**，记为$U(x_0^+, \delta)$。

相应地，也有**去心左邻域**和**去心右邻域**。

$\hat{U}(x_0^-, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0, \delta > 0, x \in R\}$，

$\hat{U}(x_0^+, \delta) = \{x \mid x_0 < x < x_0 + \delta, \delta > 0, x \in R\}$。

在运用邻域讨论问题时，如果不必强调半径时，则用$U(x_0)$，$\hat{U}(x_0)$，$U(x_0^+)$，$U(x_0^-)$，$\hat{U}(x_0^+)$，$\hat{U}(x_0^-)$等记号。

三、函数的定义

在观察某现象时，所遇到的诸变量之间并非独立变化，它们之间存在着相互依赖关系，即所谓函数关系。函数是高等数学的主要研究对象。

例如，用一块边长为 a 的正方形铁皮作一个高为 x 的无盖小盒（图1-3），易知该盒的容积V和高 x 之间存在着依赖关系

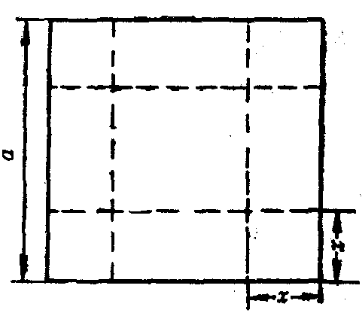


图 1-3

$$V = x(a - 2x)^2$$

即容积V与高 x 之间的函数关系。

我们将这种形形色色的变量间的依赖关系抽象出来，便得到