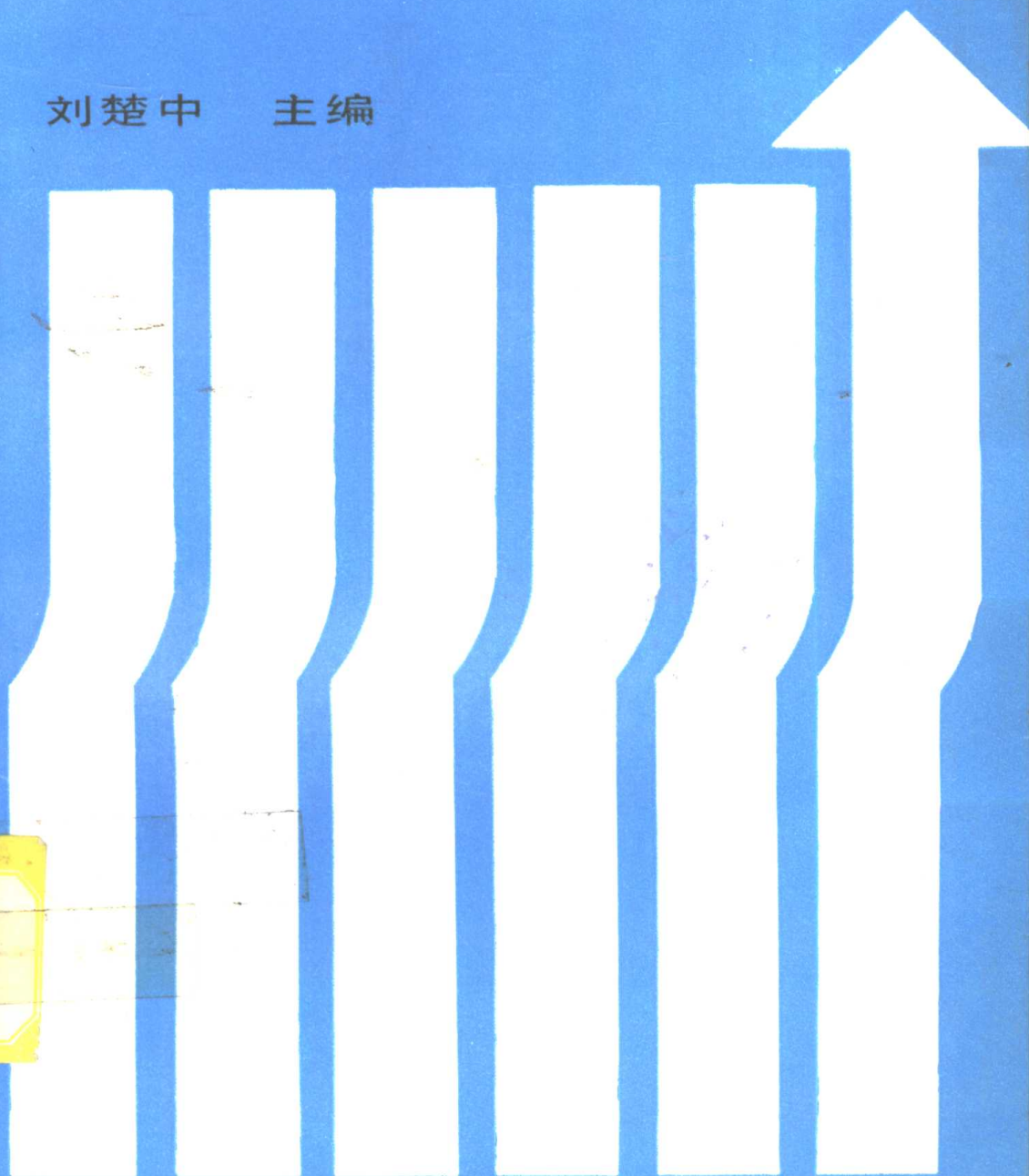


高等学校教材

955823

高等数学

刘楚中 主编



机械工业出版社

高等学~~校教材~~

高等数学

主编 刘楚中

参编 张诚坚 胡跃荣 许青松 王仙桃
罗 汉 刘宪高 周 展 黄立宏

主审 郭 忠 何灿芝



机械工业出版社

(京)新登字054号

本书是参照国家教委高等工业学校的“高等数学课程教学基本要求”及1990、1994年全国工科数学会议精神编写的。

本书包含一元微积分、多元微积分、向量代数与空间解析几何、级数、微分方程及数学分析中的数值方法。各章节后面配有适量的习题。

本书的结构和一些讲述方法有别于以往的同类教材，能为学生接受近代数学方法打下一定的基础。本书可作为高等工科院校少学时教材，或作为专科及成人教育系列的教材，也可作为广大工程技术人员自学用书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘楚中主编. —北京:机械工业出版社, 1995.5

高等学校教

ISBN 7-111-04610-2

I. 高...

I. 刘...

II. 高等数学-高等学校-教材

N. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(94)第15335号

出版人:马九荣(北京市百万庄南街1号 邮政编码100037)

责任编辑:王世刚 版式设计:张世琴 责任校对:肖新民

封面设计:姚毅 责任印制:卢子祥

三河市宏达印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1995年5月第1版·1995年5月第1次印刷

850mm×1168mm¹/₃₂·16.625印张·439千字

0 001—4 000册

定价:14.50元

前 言

本书是参照国家教委高等工业学校的“高等数学课程教学基本要求”及1990、1994年全国工科数学会议精神编写的。

本书包含一元微积分、多元微积分、向量代数与空间解析几何、级数、微分方程及数学分析中的数值方法。各章节后面配有适量的习题。

本书的结构和一些讲述方法有别于以往的同类教材，能为学生接受近代数学方法打下一定的基础。本书可作为高等工科院校少学时教材，或作为专科及成人教育系列的教材，也可作为广大工程技术人员自学用书或参考书。

讲授本书的学时范围为130~150学时。

本书由刘楚中主编，其中第一、二章由张诚坚编写，第三、八章由胡跃荣编写，第四、五章由许青松编写，第六、七章由王仙桃编写，第十、十一章由罗汉编写，第十二、十三章由刘宪高编写，第十四、十六章由周展编写，第十五章由黄立宏编写，其余章节的编写工作及全书的最后定稿由刘楚中完成。

本书由郭忠教授和何灿芝教授主审。在编写中得到了周叔子教授的帮助和指导，在此我们深表感谢。

限于编者水平，书中可能存在不妥之处，希广大读者斧正。

编 者

1994年7月

E4B18/07.08

目 录

第一章 函数	1
第一节 集合与映射	1
第二节 函数	7
第三节 初等函数	17
第四节 杂例	21
第二章 极限与连续	25
第一节 数列的极限	25
第二节 函数的极限	31
第三节 无穷大量与无穷小量	36
第四节 极限的运算法则	41
第五节 夹逼定理、两个重要极限	45
第六节 无穷小量的比较	52
第七节 函数的连续性与间断点	55
第八节 连续函数的基本性质	63
第九节 闭区间上连续函数的性质	68
第三章 函数的导数与微分	71
第一节 导数的概念	71
第二节 求导法则	81
第三节 高阶导数	89
第四节 函数的微分	94
第四章 微分中值定理	99
第一节 微分中值定理	99
第二节 洛比达 (L'Hospital) 法则	105
第三节 杂例	109
第四节 泰勒 (Taylor) 公式	112

第五章 利用导数研究函数	115
第一节 函数的单调性与极值	115
第二节 函数的最值及其应用	120
第三节 函数的凸凹性	124
第四节 函数图形的描绘	128
第五节 曲率和曲率圆	133
第六节 相关变化率	138
第六章 不定积分	141
第一节 不定积分的概念和性质	141
第二节 不定积分的换元法	145
第三节 分部积分法	152
第四节 有理函数的积分	155
第五节 杂例	161
第六节 积分表的使用	167
第七章 定积分	170
第一节 定积分的概念	170
第二节 定积分的性质	176
第三节 微积分的基本定理	181
第四节 求定积分的基本方法	187
第五节 广义积分	194
第六节 杂例	199
第八章 定积分应用	204
第一节 定积分的微元法	204
第二节 平面图形的面积	205
第三节 平面曲线的弧长	209
第四节 立体体积和旋转体侧面积	212
第五节 定积分在物理中的应用	216
第九章 向量代数与空间解析几何	221
第一节 向量的概念及其运算	221
第二节 空间直角坐标系及向量的坐标表示式	225

第三节	向量的数量积, 向量积	231
第四节	平面及其方程	239
第五节	空间直线及其方程	244
第六节	空间曲面及曲线	250
第七节	二次曲面的标准方程	260
*第八节	二阶、三阶行列式	264
第十章	多元函数微分学	273
第一节	多元函数的概念	273
第二节	二元函数的极限和连续	277
第三节	偏导数	281
第四节	全微分	286
第五节	复合函数的微分法	290
第六节	隐函数的微分法	296
第七节	高阶偏导数	299
第十一章	多元微分学的应用	303
第一节	曲线的切线和曲面的切平面	303
第二节	多元函数的极值	308
*第三节	方向导数和梯度	314
第十二章	重积分	319
第一节	二重积分的概念和性质	319
第二节	二重积分的计算	324
第三节	二重积分的应用	336
第四节	三重积分的概念及其计算方法	342
第十三章	曲线积分和曲面积分	358
第一节	对坐标的曲线积分	358
*第二节	对弧长的曲线积分	368
第三节	格林 (Green) 公式	373
*第四节	对坐标的曲面积分	383
第十四章	无穷级数	393
第一节	常数项级数的概念和性质	393

第二节	常数项级数敛散性的判别法	399
第三节	幂级数	410
第四节	函数展开成幂级数	419
第五节	杂例	425
第十五章	常微分方程	431
第一节	基本概念	431
第二节	一阶微分方程的初等解法	434
第三节	几种可降阶的高阶微分方程	441
第四节	二阶线性微分方程	445
第五节	二阶常系数线性微分方程	449
第六节	微分方程的应用举例	457
*第十六章	傅里叶级数	463
第一节	傅里叶级数	463
第二节	正弦级数和余弦级数	471
第三节	任意区间上的傅里叶级数	476
第四节	杂例	479
第十七章	数学分析中的数值方法	485
第一节	误差和数的近似表示	485
第二节	微分在近似计算中的应用	488
第三节	方程的近似解	491
第四节	定积分的近似计算	495
*第五节	最小二乘法	503
附录	不定积分表	508
	参考文献	523

第一章 函 数

第一节 集合与映射

一、集合

所谓**集合**（简称**集**）是指具有某种特定属性的事物的全体，常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示。组成集合的事物称为该集合的**元素**，常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示。

x 是集合 A 的元素，记为 $x \in A$ ，即 x 属于 A ； x 不是 A 的元素，记为 $x \notin A$ ，即 x 不属于 A 。 x 或属于 A ，或不属于 A 。

例1-1 xy 平面上的曲线 L 是满足某特性的点 $P(x, y)$ 的集合。此时， $P(x, y) \in L$ 。

一个集合若只含有有限个元素，则称为**有限集**，否则称为**无限集**。

我们规定：不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\emptyset$ 。

通常用下列两种方法来表示集合：（1）列举法：列举集合中的全部元素，并用大括号括上。如 $A = \{a, b, c\}$ ；（2）特性描述法：给出该集合中元素 x 所具有的性质 $P(x)$ ，记为 $A = \{x | P(x)\}$ 。不论哪种表示法，集合中的元素不得重复出现。

为直观起见，我们有时也用几何图形来表示某些集合。

例1-2 设 a 为一非负常数，则点集

$$C(x_0, y_0) = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2\}$$

的图形是平面上以点 (x_0, y_0) 为圆心， a 为半径的一个圆。

例1-3 满足不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的全体实数构成的集合，记为 $\{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，这是特性描述法。

例1-4 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解的全体组成一个集，列举法表示为 $A = \{-1, 1\}$ ，特性描述法表示为 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$ 。

例1-5 $0, \{0\}, \emptyset$ 是三个不同的概念： 0 是数，不是集合； $\{0\}$ 是仅含一个元素 0 的集合， $\emptyset$ 是空集。

若当 $x \in A$ 时必有 $x \in B$ ，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。任何集合都是它自身的子集，即 $A \subset A$ ，并规定 $\emptyset$ 是任何集合的子集，即 $\emptyset \subset A$ 。

若 $A \subset B$ ，且存在 $x \in B, x \notin A$ ，则称 A 是 B 的**真子集**。

子集及真子集具有传递性质，即：若 $A \subset B$ ，又 $B \subset C$ ，则 $A \subset C$ 。事实上，若 $x \in A$ ，则由 $A \subset B$ 有 $x \in B$ ，又 $B \subset C$ ，故 $x \in C$ ，所以 $A \subset C$ 。

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$ 。

例1-6 $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}, B = \{-1, 1\}$ ，则 $A = B$ 。

常用的数集符号有

$$N = \{n \mid n \text{ 为自然数}\} = \{n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z = \{k \mid k \text{ 为整数}\} = \{k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$Q = \{x \mid x \text{ 为有理数}\} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p, q \in Z, q \neq 0\}$$

$R = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$ ；实数集有时也表示为 R^1 。在这些集合中 $\emptyset \subset N \subset Z \subset Q \subset R$

二、集合的运算

(1) **交集** 由集 A 和集 B 中的公共元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记为 $A \cap B$ ，见图1-1 a。当 $A \cap B = \emptyset$ 时，简称 A 与 B 不交。

例1-7 $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}, B = \{(x, y) \mid x - 2y = 2\}$

则 $A \cap B = \{(x, y) \mid 2x - y = 1 \text{ 且 } x - 2y = 2\} = \{(0, -1)\}$

例1-8 若 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}, B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 > 0\}$

则 $A \cap B = \{x \mid -1 < x < 1 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$

(2) **并集** 由集 A 和集 B 的一切元素所组成的集合称为 A

与 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 见图1-1b。

例1-9 $M = \{1, 2, 3, 5\}, P = \{1, 2, 3, 4\}$, 则

$$M \cup P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

例1-10 若 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}, B = \{x \mid x = -1, 3\}$, 则

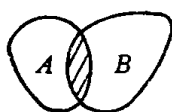
$$A \cup B = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$$

(3) 差集 设 A, B 为两集, 由集 A 中不属于 B 的那些元素所组成的集合, 称

为 A 与 B 的差集, 记为 $A - B$ 。这里并不

要求 $B \subset A$ 。例如 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$, 则 $A - B = \{1, 2\}$ 。

见图1-1c。当 $B \subset A$ 时, 称差集 $A - B$ 为 B 关于 A 的余集。



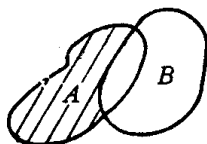
$A \cap B$

a)



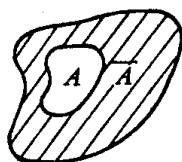
$A \cup B$

b)



$A - B$

c)



$\bar{A}$

d)

图 1-1

(4) 补集 包

含所论及的一切元素的集合称为全集, 记为 Ω 。若集 $A \subset \Omega$, 则称 $\bar{A} = \{x \mid x \in \Omega \text{ 且 } x \notin A\} = \Omega - A$ 为 A 的补集, 如图1-1d。

例如 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4, 6\}$, 则 $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ 。

例1-11 试证 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

证 设任意 $a \in \overline{A \cap B}$, 则 $a \notin A \cap B$, 即 $a \notin A$, 或 $a \notin B$, 亦即 $a \in \bar{A}$ 或 $a \in \bar{B}$, 故 $a \in \bar{A} \cup \bar{B}$, 从而 $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ 。

设任意 $b \in \bar{A} \cup \bar{B}$, 则 $b \in \bar{A}$ 或 $b \in \bar{B}$, 即 $b \notin A$, 或 $b \notin B$, 亦即 $b \notin A \cap B$, 则 $b \in \overline{A \cap B}$, 从而 $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$ 。

故

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

完全类似地可以定义任意有限个集的并集及交集, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一组集。由所有 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的元素

所组成的集, 称为该组集的并集, 记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$; 所有的 A_i ($i =$

$1, 2, \dots, n$) 的公共元素所组成的集, 称为这组集的交集,

记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

例1-12 已知 $A_i = \left\{ x \mid 0 \leq x < 1 + \frac{1}{i} \right\}$, $i = 1, 2, \dots$,

求 $\bigcap_{i=1}^n A_i$, $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

$$\text{解 } \bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid 0 \leq x < 2\} \cap \left\{ x \mid 0 \leq x < 1 + \frac{1}{2} \right\}$$

$$\times \dots \cap \left\{ x \mid 0 \leq x < 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \left\{ x \mid 0 \leq x < 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \mid 0 \leq x < 2\} \cup \left\{ x \mid 0 \leq x < 1 + \frac{1}{2} \right\} \cup \dots \cup$$

$$\left\{ x \mid 0 \leq x < 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \{x \mid 0 \leq x < 2\}$$

集合的运算有如下性质:

$$1) A \cup A = A, A \cap A = A, A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$2) A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$$

$$3) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$4) (A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C);$$

$$5) (C - A) - B = C - (A \cup B).$$

以上性质可由定义推导出来, 这里证明从略.

以下逻辑量词在本书中常用到:

$\forall$ 表示“对每一…”或“对任意…”, 或“对所有的…”, $\exists$

表示“存在”。 $\exists$ 表示不存在。

例如“存在正数 x ，使得 $x^2 - 3x + 2 > 0$ ”，可以写成

$$\exists x > 0, \text{ 使 } x^2 - 3x + 2 > 0$$

又例如，“对所有的实数 x ，都有 $x^2 + 1 > 0$ ”可以写成

$$\forall x \in R, \text{ 都有 } x^2 + 1 > 0$$

如果当命题 A 成立时，必然得出命题 B 也成立，记为 $A \Rightarrow B$ 或 $B \Leftarrow A$ ，称 B 是 A 的必要条件， A 是 B 的充分条件。如果 A, B 互为“充要条件”，记成 $A \Leftrightarrow B$ ，这时也可说：“当且仅当 A 成立时 B 成立”，或“ A 与 B 等价”。

例如，“ $a = b = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$ ”，可以述成“当且仅当 $a = b = 0$ 时， $a^2 + b^2 = 0$ ”或“ $a^2 + b^2 = 0$ 等价于 $a = b = 0$ ”。

三、映射

在中学初等数学学习阶段，我们对实值函数 $y = f(x)$ 已较为熟悉，它实质上是将 x 轴上某一实数集与 y 轴上某一实数集构成了一种对应关系。现在我们研究一般的集合间的对应关系。

定义 1 设 X, Y 为两个非空集，若存在某个对应规则 f ，使 $\forall x \in X$ ，均有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 是从 X 到 Y 的一个映射，记为 $f: x \rightarrow y$ 或 $y = f(x)$ 。

此时， y 称为 x 在映射 f 下的像， x 称为 y 的一个原像，集 X 称为映射 f 的定义域，记为 $D(f)$ ； $f(X)$ 称为映射 f 的值域，记为 $R(f)$ 。

例 1-13 设 $X = \{x | x \in Z\}$ ， $Y = \{y | y \text{ 为偶数}\}$ ，则

$$y = f(x) = 2x, x \in X$$

定义了 $X \rightarrow Y$ 的一个映射 f ，其中 $D(f) = X$ ， $R(f) = Y$ 。

定义 2 设 $f: X \rightarrow Y$ 为 X 到 Y 的一个映射，若 $f(X) = Y$ （或 $R(f) = Y$ ），则称 f 是 X 到 Y 上的映射（或满射）；若 $\forall x_1, x_2 \in X$ ，且 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称 f 为 X 到 Y 的一个单射；若 f 既是满射又是单射，则称 f 为 X 到 Y 的一一对应。

例 1-14 设 $A = \{C(x, y) | C(x, y) \text{ 是平面上圆心为}$

(x, y) 的圆}, $B = \{(x, y) | x \in R, y \in R\}$, 令

$$f: C(x, y) \longrightarrow (x, y)$$

则圆与圆心的对应 f 是 A 到 B 上的映射, 但不是单射。

例1-15 验证例1-13中的映射是一一对应。

解 $\because R(X) = Y$

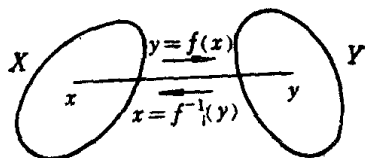
$\therefore$ 映射 $f: X \longrightarrow Y$ 是一个满射。

又 $\forall x_1, x_2 \in X$, 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $2x_1 \neq 2x_2$, 故 $f: X \longrightarrow Y$ 是单射, 从而 $f: X \longrightarrow Y$ 是 X 到 Y 的一一对应。

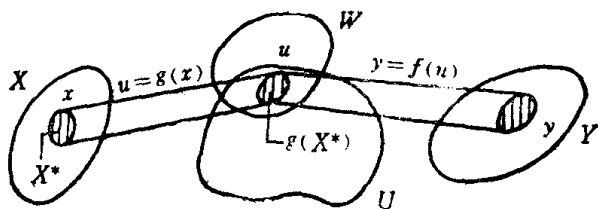
定义3 设 $f: X \longrightarrow Y$ 是 X 到 Y 的一一对应, 则 $\forall y \in Y$, 存在唯一的 $x \in X$, 使 $f(x) = y$, 这就确定了映射 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$, 称之为映射 f 的逆映射。

f 的逆映射可记为 $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, $x \in X$, 它也是一一对应, 如图1-2a所示。

例1-16 设 $X = Y = R$, $y = \varphi(x) = x^3$ 是 X 到 Y 的一一对应, 则 $\varphi^{-1}: Y \longrightarrow X$, 即 $x = \varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ 。



a)



b)

图 1-2

定义4 设有映射 $g: X \longrightarrow U$, $f: W \longrightarrow Y$ 若存在非空集 $X^* \subset X$, 使 $g(X^*) \subset W$, 则可构造 X^* 到 Y 的映射 $f \circ g$:

$X^* \longrightarrow Y$, 即 $y = f \circ g(x) = f[g(x)]$, $x \in X^*$, 称 $f \circ g$ 为 f 与 g 的复合映射 (见图1-2b)。

例1-17 设映射 $y = f(u) = \sqrt{u}$, $D(f) = \{u \mid u \geq 0\}$, $R(f) = \{y \mid y \geq 0\}$; $u = g(x) = 1 + x^2$, $D(g) = R$, $R(g) = \{u \mid u \geq 1\}$, 由于 $R(g) \subset D(f)$, 故可构造复合映射

$$y = f[g(x)] = \sqrt{1 + x^2}, \quad x \in R.$$

第二节 函 数

一、实数

在中学阶段我们对函数和实数已有了一定的了解, 在这里我们用集合与映射的观点对实数和函数作简单介绍。

1. 实数集与数轴

在初等数学里, 我们已讨论过了有理数和无理数。全体有理数称为有理数集, 全体无理数称为无理数集。实数集 = {有理数} $\cup$ {无理数}, 或记为 $R = Q \cup W$, 其中 W 为无理数集。

直线可看作是直线上的点形成的集合, 当给一条直线确定了方向、原点和单位长度后, 就形成了数轴。实际上, 这就确定了实数集 R 与数轴上点的集合的一一对应。与有理数对应的点称为有理点, 与无理数对应的点称为无理点。数轴上与点对应的数称为该点的坐标。因为实数与数轴上的点一一对应, 所以我们今后常将数说成点, 如说点 2, 点 $\sqrt{2}$ 等。

任何两个实数之间一定存在无穷多个实数。此外, $\forall a \in R$, 必 $\exists n, n+1 \in Z$, 使 $n \leq a < n+1$ 。

2. 绝对值、距离

任一实数 a 的绝对值 $|a|$ 的定义是:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

绝对值有如下性质:

$$(1) \sqrt{a^2} = |a|, -|a| \leq a \leq |a|;$$

$$(2) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \left| \frac{b}{a} \right| = \frac{|b|}{|a|}, a \neq 0;$$

$$(3) |a \pm b| \leq |a| + |b|, ||a| - |b|| \leq |a \pm b|.$$

两点间的距离就是连接这两点的线段的长度，我们常用符号 ρ (或 $\|\cdot\|$) 来表示。例如点 a 与点 b 的距离，就写成 $\rho(a, b)$ (或 $\|a - b\|$)。

在数轴上，点的距离的计算往往是通过绝对值来实现，即 $\rho(a, b) = |a - b|$ ，因此绝对值的几何意义也就是直线上点的距离。

二、区间、邻域、去心邻域

1. 区间

高等数学中常用的实数集合是区间、邻域、去心邻域。点集

$[a, b] \triangleq \{x \mid a \leq x \leq b, a, b \in R\}$ 称为闭区间；

$(a, b) \triangleq \{x \mid a < x < b, a, b \in R\}$ 称为开区间；

$[a, b) \triangleq \{x \mid a \leq x < b, a, b \in R\}$ 及

$(a, b] \triangleq \{x \mid a < x \leq b, a, b \in R\}$ 称为半开半闭区间；

$$(-\infty, +\infty) \triangleq \{x \mid x \in R\},$$

$$(-\infty, b) \triangleq \{x \mid x < b, b \in R\},$$

$$(-\infty, b] \triangleq \{x \mid x \leq b, b \in R\},$$

$$(a, +\infty) \triangleq \{x \mid x > a, a \in R\}$$

及 $[a, +\infty) \triangleq \{x \mid x \geq a, a \in R\}$ 称为无穷区间。前面四种也称为有限区间， a 与 b 称为区间的端点， a 称为左端点， b 称为右端点。

对于有限区间，我们定义区间两端点的距离为该区的长度。 $[a, b]$, (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ 的区间长度都为

$$\rho(a, b) = b - a.$$

当不必区分区间类型时, 将笼统说成区间 I 。

2. 邻域、去心邻域

邻域是高等数学的重要概念之一。

集 $\{x \mid |x - x_0| < \delta, x \in R\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$ 。 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径。

集 $U(x_0, \delta) - \{x_0\} = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, x \in R\}$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域, 记为 $\hat{U}(x_0, \delta)$ 。

集 $\{x \mid x_0 - \delta < x \leq x_0, \delta > 0, x \in R\}$ 称为点 x_0 的左邻域, 记为 $U(x_0^-, \delta)$ 。

集 $\{x \mid x_0 \leq x < x_0 + \delta, \delta > 0, x \in R\}$ 称为点 x_0 的右邻域, 记为 $U(x_0^+, \delta)$ 。

相应地, 也有去心左邻域和去心右邻域。

$$\hat{U}(x_0^-, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0, \delta > 0, x \in R\},$$

$$\hat{U}(x_0^+, \delta) = \{x \mid x_0 < x < x_0 + \delta, \delta > 0, x \in R\}.$$

在运用邻域讨论问题时, 如果不必强调半径时, 则用 $U(x_0)$, $\hat{U}(x_0)$, $U(x_0^-)$, $U(x_0^+)$, $\hat{U}(x_0^-)$, $\hat{U}(x_0^+)$ 等记号。

三、函数的定义

在观察某现象时, 所遇到的诸变量之间并非独立变化, 它们之间存在着相互依赖关系, 即所谓函数关系。函数是高等数学的主要研究对象。

例如, 用一块边长为 a 的正方形铁皮作一个高为 x 的无盖小盒 (图1-3), 易知该盒的容积 V 和高 x 之间存在着依赖关系

$$V = x(a - 2x)^2$$

即容积 V 与高 x 之间的函数关系。

我们将这种形形色色的变量间的依赖关系抽象出来, 便得到

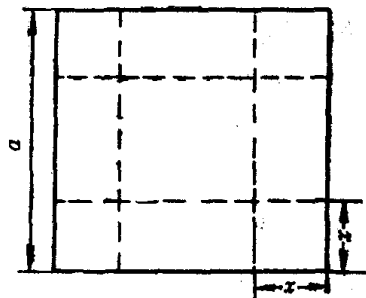


图 1-3