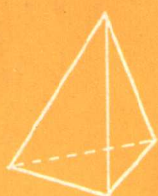
中等专业学校试用教材

工科专业通用

数学

第二册第一分册



人民教育出版社

中等专业学校试用教材

工科专业通用

数　　学

第二册第一分册

工科中专数学教材编写组编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书主要讲立体几何，内容有平面、直线和直线的位置关系，直线和平面的位置关系，平面和平面的位置关系，空间图形的计算等，内容比较简明实用，可供中等专业学校工科性质各专业的学生作为试用教材。

中等专业学校试用教材

工科专业通用

数　　学

第二册第一分册

工科中专数学教材编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海市第四印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 2　字数 44,000

1979 年 12 月第 1 版　1981 年 1 月第 2 次印刷

印数 120,001—240,000

书号 13012·0413　定价 0.17 元

目　　录

第八章　空间的直线和平面

在初中，我们研究了关于平面图形的一些概念、性质和这些性质的应用，但是在生产实际中，只知道一些平面图形的性质是很不够的．例如：修筑堤坝，建造厂房，制造机器等等，都需要知道一些空间图形的概念和性质．

由点、线、面所构成的图形，当所有各点不完全在同一平面上时，叫做**空间图形**．

几何体是一种空间图形，它是物体所占的空间部分，由面把它和周围的空间分开，在研究时，我们只考虑它的形状和大小，而不涉及物体的重量、颜色等物理性质．

空间图形仍和平面图形一样，具有下面的基本性质：任何图形都可以在空间移动，而不改变它的大小、形状及各部分的位置关系．

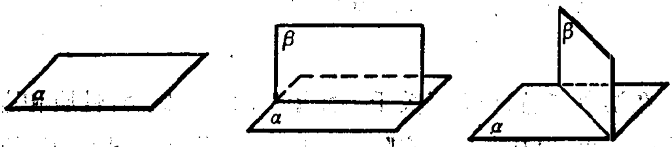
本章将讨论空间图形中关于直线、平面的基本性质，并利用它们来解决有关柱、锥、台、球等方面的一些计算问题．

§8-1　平　　面

一　平面及其表示法

平面是广阔无涯的．平静的水面、窗玻璃面和课桌面等，都可看作平面的一部分．我们在适当的角度和适当的距离看窗玻璃面和课桌面时，觉得它们都象平行四边形．因此，通常用**平行四边形表示平面**，并用希腊字母 α、β、γ…等来表示(图 8-1)．至

于点和直线的表示方法仍和平面几何一样，即用大写拉丁字母 A、B、C、…、M、N…表示点；小写拉丁字母 a、b、c、…、p、q、…或两个大写拉丁字母 AB、CD、…、MN、…表示直线.

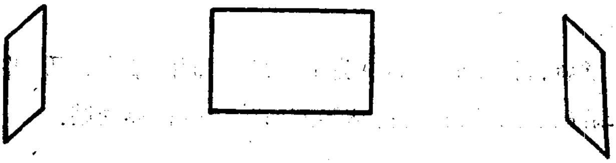


(a) (b) (c)

图 8-1

画一个水平放着的平面时，通常把平行四边形的锐角画成 45°，把横边画得大约等于另一边的两倍 (图 8-1(a)). 如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，被遮住部分的线段画成虚线或不画(图 8-1(b)、(c)).

如果平面是直立的，那末可以画成如图 8-2 所示的几种情况：图 8-2(a)是平面在观察者的左前方；图 8-2(b)是平面在观察者的正前方；图 8-2(c)是平面在观察者的右前方.



(a) (b) (c)

图 8-2

二 平面的基本性质

关于平面的基本性质有下列几条公理：

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那末这条直线上的所有点都在这个平面内(图 8-3).

直线 AB 上的所有点都在平面 α 内，叫做直线 AB 在这平面

α 内，有时也称作平面 α 经过直线 AB. 这都表示直线 AB 是平面 α 的一个真子集，或平面 α 包含直线 AB. 因此，把它们之间的这种关系记作：平面 $\alpha\supset$ 直线 AB 或直线 $AB\subset$ 平面 α.

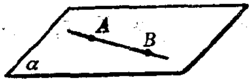


图 8-3

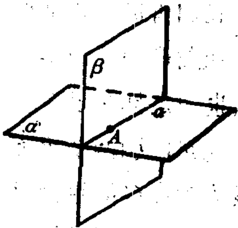


图 8-4

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那末它们相交于过这点的一条直线(图 8-4).

天花板和墙壁的交线，折纸的折痕等，都能说明两个平面相交是成一条直线的.

平面 α 与平面 β 相交于直线 a，表示直线 a 是平面 α 与平面 β 的交集. 因此，可记作：$\alpha\cap\beta=a$.

公理 3 过不在一直线上的任意三点，可以引一个平面，并且只可以引一个平面(图 8-5).

这时，我们也说"不在一直线上的三点确定一个平面".

测量仪器上所以采用三脚架，就是应用这个道理.

根据公理 1 和 3，还可以推得以下三个推论：

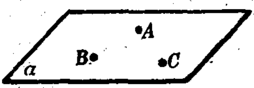


图 8-5

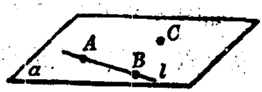


图 8-6

推论 1 过一条直线和这条直线外的一点可以引一个平面. 并且只可以引一个平面.

如图 8-6，设 C 是直线 l 外的一点. 在 l 上取 A、B 两点，

这样 A、B 和 C 组成不在一直线上的三点．根据公理 3，这三点确定一个平面 α．因为直线 l 上有两点 A、B 在平面 α 内，根据公理 1，$l\subset\alpha$，所以直线 l 和 l 外的一点 C 确定一个平面 α．

我们再进一步证明，这样的平面只可以引一个．如果过直线 l 和点 C 的平面除平面 α 外还有另一个平面 β，那末 A、B、C 三点也一定都在平面 β 内．这样，过不在一条直线上的三点 A、B、C 就可以引两个平面 α 和 β 了．这和公理 3 相矛盾．所以过直线 l 和点 C 的平面只有一个．

显然可见，经过一条直线(或经过两点)，可以引无限多个平面．设空间已知直线为 l(图 8-7)，取这直线外的任意一点 A，过直线 l 及点 A 可引一个平面 α(推论 1)，在 α 外另取一点 B，则过 B 和 l 又可引一平面 β．如此继续可以得到无限多个平面．

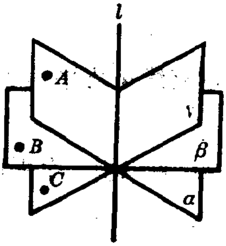


图 8-7

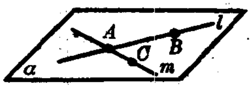


图 8-8

推论 2 过两条相交的直线可以引一个平面，并且只可以引一个平面．

如图 8-8，设直线 l 与 m 相交于点 A．除 A 点外，在直线 l 上取 B 点，直线 m 上取 C 点．这样 A、B 和 C 组成不在一直线上的三点．根据公理 3，这三点确定一个平面 α．因为直线 l 有两点 A、B 在平面 α 内，直线 m 有两点 A、C 在平面 α 内，根据公理 1，$l\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，所以这两条相交直线确定一个平面 α．

同时，这样的平面只可以引一个．它的证明方法，和证明推

论 1 相仿.

推论 3　过两条平行的直线可以引一个平面，并且只可以引一个平面.

根据"在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线"的定义可知：过两条平行直线 AB 和 CD 可以引一个平面 α(图 8-9). 同时，这样的平面只能引一个. 因为如果过平行直线 AB 和 CD 还可以引一个平面 β，这就是说过直线 AB 和直线 CD 上的一点可以引两个平面 α 和 β. 这与推论 1 相矛盾. 所以过平行直线 AB 和 CD 的平面只有一个.

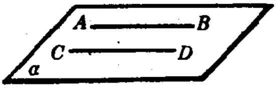
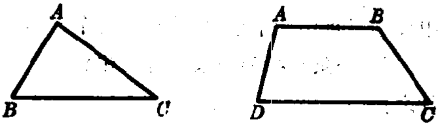


图 8-9



(a)　　(b)

图 8-10

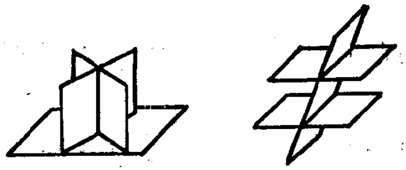
根据公理 3 和它的推论，可以知道三角形、梯形都是平面图形.

因为(1)$\triangle ABC$ 可以看作是由三点 A、B、C 所确定的[图 8-10 (a)]. 根据公理 3、1 可知 $\triangle ABC$ 是一个平面图形.

(2) 在梯形 $ABCD$ 中，设 $AB \parallel CD$. 根据推论 3，可知线段 AB 和 CD 必定在同一平面内. 也就是说：A、B、C、D 四点在同一平面内. 再根据公理 1，可知线段 AD 和 BC 也必定在这个平面内，这就说明了梯形 $ABCD$ 也是一个平面图形[图 8-10(b)].

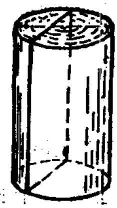
习　题　8-1

1. (1) 仿照附图画出图形，在图中注上字母，并且写出每个图各有哪几个平面；(2) 用虚线画出图中被遮住的部分.



(a) (b)

（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 木工锯板时，为什么先要在树干的两侧弹出两条平行线，然后沿线锯板，才能使板面平整？

3. 过一点任意作三条直线，它们是否在同一平面内？为什么？

4. 空间有四个点，它们中间的任何三点都不在一直线上，那末，过其中任意三点作一个平面，共可作几个平面？

5. 一条直线和两条平行线相交，这三条直线是否在同一平面内，为什么？

6. 过已知直线外一点向直线上三个定点分别连结三条线段，问这三条线段是否在同一平面内？为什么？

7. 三条直线两两平行，但不在同一平面内．如果过其中任意两条各引平面，共可引几个平面？

8. 四条线段依次首尾相接，所得的封闭图形，一定是平面图形吗？为什么？

§8-2 直线和直线的位置关系

我们知道，在同一个平面内的两条不重合的直线，它们之间的位置关系只有两种：**相交或者平行**．

不在同一平面内的两条直线，它们既不能相交也不能平行（因为如果相交或平行，它们就将在同一平面内）．例如，教室里下垂的电线和黑板边沿的一条横线，便是这样的两条直线．

定义 不在同一平面内的两条直线，叫做**异面直线**（**或交错直线**）．

由此可见，空间两直线的位置关系只有下列三种：

(1) **相交**；(2) **平行**；(3) **异面**.

画异面直线时，要把两条直线画在不同的平面内，这样才容易显出异面直线的特点. 例如，画异面直线 a 和 b 时，图 8-11 (a)、(b)的画法比较明显；(c)的画法就不明显.

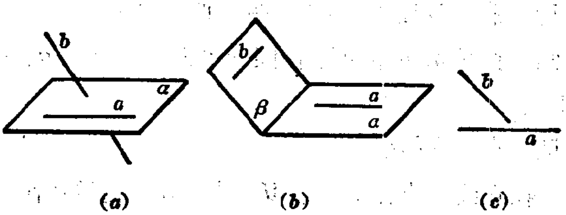


图 8-11

一 空间直线的平行关系

定理 1 如果两个相交平面，分别通过两条平行直线，那末这两个平面的交线，一定平行于这两条平行线.

已知 直线 $a /\!/ b$，平面 α 通过直线 a，平面 β 通过直线 b，平面 α 和 β 的交线为 c，且 c 不和直线 a 及直线 b 重合(图 8-12).

求证 直线 c 平行于直线 a 及直线 b.

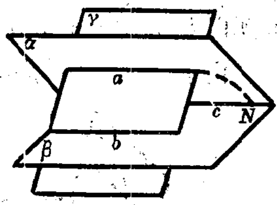


图 8-12

证 直线 a 和 c 同在平面 α 内，假若不平行，就一定相交于一点 N.

因点 N 在 α、β 的交线 c 上，所以它既在平面 α 内也在平面 β 内.

另外点 N 既在直线 a 上，所以它一定在两平行直线 a 及直线 b 所决定的平面 γ 内.

这就是说，点 N 在平面 β 内又在平面 γ 内，也就是在 β 和 γ

的交线 b 上.

点 N 既在直线 a 上，又要在直线 b 上，因此它是直线 a 和 b 的公共点. 这和假设 $a \parallel b$ 相矛盾. 可见在同一平面 α 内的直线 a 和 c 不能相交. 所以 $c \parallel a$. 同理可证 $c \parallel b$.

定理 2 不在同一个平面内的三条直线，如果其中两条直线都平行于第三条直线，那末这两条直线也平行.

已知 直线 a、b 和 c 不在同一平面内，并且 $a \parallel c$ 及 $b \parallel c$ (图 8-13).

求证 直线 $b \parallel a$.

证 在直线 b 上任取一点 M，过点 M 和直线 a 作平面 α，过点 M 和直线 c 作平面 β. 假设 α 和 β 的交线是过点 M 的直线 b'.

因为 $a \parallel c$，所以有

$$b' \parallel a \text{ 和 } b' \parallel c \quad \text{(定理 1)}.$$

两平行直线 b' 和 c 可以确定一个平面，而这个平面和平面 β 都经过点 M 和直线 c. 所以它们一定重合(§ 8-1 推论 1).

在平面 β 内，直线 b' 和 b 都经过点 M，并且都平行于直线 c，所以 b' 和 b 一定重合.

由于 $b' \parallel a$，便可得到 $b \parallel a$.

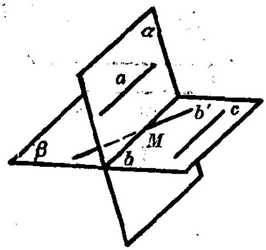


图 8-13

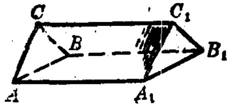
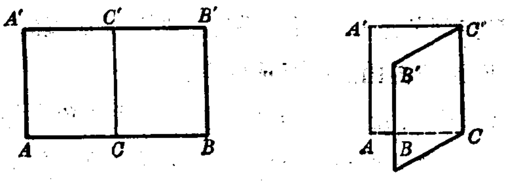


图 8-14

这个定理的正确性是很明显的. 例如：图 8-14 是一个三

棱尺，棱 BB_1、CC_1 都和棱 AA_1 平行，而棱 BB_1 和 CC_1 也平行。

又如：$ABB'A'$(图 8-15(a)) 是一张矩形的纸片，线段 $C'C$ 和边 $A'A$、$B'B$ 平行．若以 $C'C$ 为折痕将纸片 $ABB'A'$ 折成如图 8-15(b)的形状，这时 $A'A$、$B'B$、$C'C$ 就成为空间的三条线段，而且 $A'A \parallel C'C$，$B'B \parallel C'C$．如果再把纸片摊平放在桌面上，可以看到 $A'A$ 和 $B'B$ 在同一个平面内，并且互相平行．



(a)　　(b)

图 8-15

定理 3　如果两个角的边分别平行并且同向，那末这两个角相等．

已知　两个角 $\angle ABC$ 与 $\angle DEF$(图 8-16) 中有 $BA \parallel ED$，$BC \parallel EF$，且都同向．

求证　$\angle ABC = \angle DEF$．

证　截取 $BM = EN$，$BP = EQ$．连结 BE，MN，PQ，MP 和 NQ．$\because$ $BM \mathrel{\underline{\parallel}} EN$，

$\therefore$ $BMNE$ 是平行四边形．

$\therefore$ $BE \mathrel{\underline{\parallel}} MN$．

同理有　$BE \mathrel{\underline{\parallel}} PQ$．

因此，$MN \mathrel{\underline{\parallel}} PQ$，

$\therefore$ $MNQP$ 是平行四边形．

$\therefore$ $MP = NQ$．

于是　$\triangle BMP \cong \triangle ENQ$，

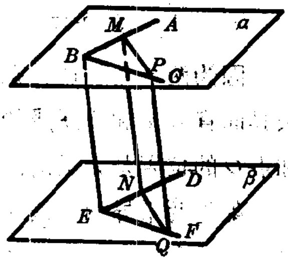


图 8-16

$\therefore\ \angle ABC=\angle DEF$.

二　两异面直线所成的角

平面内两条相交直线的位置关系可以用它们的交角来表示. 同样, 两异面直线的位置关系, 也可以化为用同一平面内两条相交直线的交角的大小来表示. 下面给出异面直线所成的角的定义:

定义　自空间任意一点所作平行于两条异面直线的两条直线所成的角, 叫做**两异面直线所成的角**.

根据定义可以作出异面直线 a 和 b 所成的角. 如图 8-17 所示, 在空间任意取一点 O, 过 O 作直线 $a'\parallel a$, $b'\parallel b$, a' 和 b' 相交所成的角就是异面直线 a 和 b 所成的角. O 点也可以取在直线 b(或 a)上, 过 O 作 $a'\parallel a$, 那末 a' 和 b 所成的角, 也就是异面直线 a 和 b 所成的角(图 8-18).

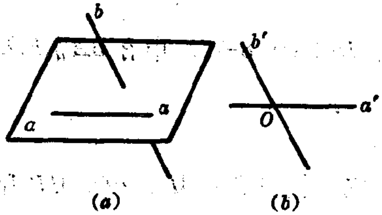


图　8-17

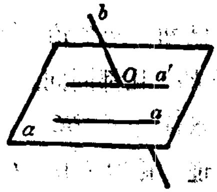


图　8-18

因为两个角的边分别平行且同向, 这两个角就相等, 所以两条异面直线 a 和 b 所成的角的大小, 只由 a 和 b 的位置来决定, 和点 O 的位置是无关的.

如果两条异面直线所成的角等于 90°, 就叫做**两条异面直线互相垂直**. 异面直线 a 和 b 垂直, 也记作 $a\perp b$. 空间两直线垂直, 这两条直线可能相交(同一平面时), 也可能不相交(异面时). 例如, 图 8-19 是一个正方体, A_1A 和 B_1C_1 是两条互相垂

直的异面直线；A_1A 和 A_1B_1 是两条互相垂直的相交直线.

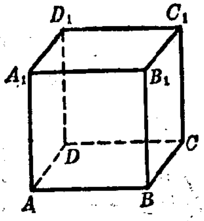


图 8-19

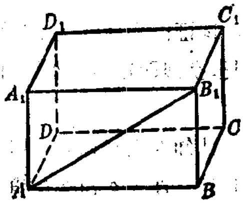


图 8-20

例 如图 8-20，$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是一个长方体，$\angle BAB_1=30°$，求下列直线所成的角：

(1) AB 和 CC_1；(2) AB_1 和 DC.

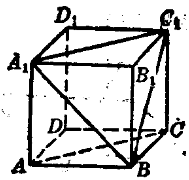
解 因为 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，所以它的每一个侧面的形状都是矩形.

(1) 因为直线 AB 和直线 CC_1 是异面直线，而 $AB\perp BB_1$，$BB_1\parallel CC_1$，所以根据异面直线所成的角的定义，可知 $AB\perp CC_1$.

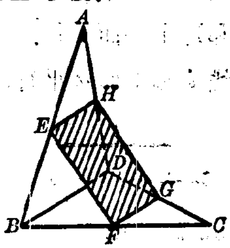
(2) 同理，直线 AB_1 和直线 DC 是异面直线，而 $AB\parallel DC$，$\angle BAB_1=30°$，所以 AB_1 和 DC 所成的角是 30°.

习 题 8-2

1. 在附图所示的正方体里，下列每一对直线各是什么位置关系的直线？如果它们不是平行直线，它们所成的角是多少度？



（第 1 题图）

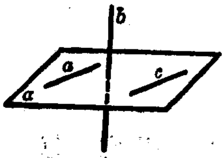


（第 2 题图）

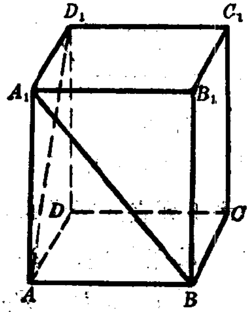
(1) AB 和 CC_1；(2) A_1A 和 BC_1；(3) A_1B 和 BC_1；(4) A_1C_1 和 AC；(5) AC 和 A_1B.

2. 试证：顺次连结空间四边形 $ABCD$（四顶点不在一个平面内的四边形叫做空间四边形，如图）的各边中点 E、F、G、H，构成一个平行四边形.

3. 已知直线 a 和 b 互相垂直（不一定相交），直线 c 和 a 互相平行，求证 c 和 b 也互相垂直(不一定相交).



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 如图，$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是个长方体，$AB=BC=3$ 厘米，$AA_1=4$ 厘米，求异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的度数.

§8-3 直线和平面的位置关系

根据 §8-1 公理 1 可以知道，一条直线和一个平面如果有两个公共点，这条直线就全部在这平面内．此外，直线和平面之间的位置关系还有下面的相交和平行两种：

定义 1 如果一条直线和一个平面没有公共点，就叫做这条直线和这个平面平行.

直线 l 和平面 α 平行，记作 $l \parallel \alpha$(图 8-21).

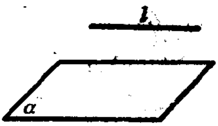


图 8-21

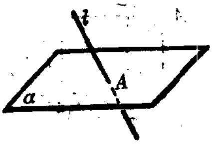


图 8-22

定义 2 如果一条直线和一个平面只有一个公共点，就叫做这条直线和这个平面相交.

直线 l 和平面 α 相交于点 A，记作 $l\cap\alpha=A$(图 8-22).

一 直线和平面平行

1 直线和平面平行的判定

判定一条直线和平面是否平行，常用如下的判定定理：

定理 如果平面外的一条直线平行于这个平面内的一条直线，那末这条直线就和这个平面平行.

已知 直线 a 在平面 α 外，直线 $b\subset\alpha$，且 $a\parallel b$(图 8-23).

求证 $a\parallel\alpha$.

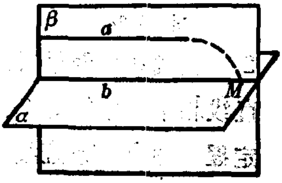


图 8-23

证 用反证法证明. 已知 a 不在 α 内，因此 a 和 α 的位置关系只有两种可能：(1) a 和 α 相交；(2) a 和 α 平行. 如果我们能够证明 a 和 α 相交是不可能的，那末 a 就和 α 平行.

$\because$ $a\parallel b$，$\therefore$ 过 a 和 b 可以引一平面 β.

由于 b 在 α 内，所以 β 与 α 的交线就是 b.

如果 a 不平行于 α，那末 a 和 α 一定相交，设交点为 M.

$\because$ M 点在直线 a 上，$\therefore$ M 点在平面 β 内.

$\because$ M 点在平面 α 内，

$\therefore$ M 点在 α 和 β 的交线 b 上，即 a 和 b 相交，

这与已知条件 $a\parallel b$ 相矛盾.

$\therefore$ a 与 α 不能相交，即 $a\parallel\alpha$.

例 1 设 AB、BC、CD 是不在同一平面的三条线段，E、F、G 分别是它们的中点. 试证：线段 AC、BD 都和 E、F、G 三点所确定的平面 α 平行(图 8-24).