微分方程的数值解法

微分方程的数值解法

W. E. 米尔納著
何 国 伟 譯

科 学 出 版 社
1 9 5 9

WILLIAM EDMUND MILNE

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

NEW YORK LONDON

1953

內容簡介

本书是米尔納"数值分析"的續本，它闡述了微分方程数值解的基本方法及与这种解法有关的問題。

本书共分二部分：第一部分闡述常微分方程的数值解法，幷研究了它們的精确度等等。第二部分闡述偏微分方程的数值解法，幷研究了綫性方程組解的輔助問題等等。

原书有俄譯本，中譯本里加上了俄譯本序，以便讀者参考。

微分方程的数值解法

W. E. 米尔納著

何国伟譯

徐献瑜校

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1959 年 8 月第一版 书号：1849 字数：231,000

1959 年 8 月第一次印刷 开本：850×1168 1/32

(京) 0001—7,500 印张：9

定价：1.15 元

序

在最近十年中，在一般的数値方法以及特别是微分方程的数値解法的园地上掀起了一股活跃的現象．同时，机械計算方面的进展也打开了以前認为是难以达到的整个領域．

本书企图使讀者学到一些可用于常微分方程及偏微分方程数値解法的主要技巧．作者尽力用初等方式，并且很多地方用詳述的例題来介紹这些技巧．为了实际計算工作者的方便，簡明的陈述是首要的目的．尽管在初等教本所容許的范围內，作者已力求本书在数学上的严格性，但是严格性并不是书中崇拜的对象．把在文献中叙述过的所有的数値解法都提出来也超出了本书的范围，所以我們的意图是要来适当地討論其中一些看来是最重要的方法．

由于数値解的方法繁多，有些在基本概念上不同，但很多只是在方法上不同，这使我們难于作一个清楚的、邏輯的叙述．为了企图解决这个困难，我們把不要求高精确度时数値地求解微分方程的簡单办法在第二章中作了初步描述，并且只要求极少量的数学知識．这里的討論是詳細的，因为这些概念是基本的，并且在以后諸章中还会出現的．为便于参考及避免打断特殊方法的解释，我們把第一部分的必要数学工具主要集中在第三章．第一部分的其余內容是从大量有用的方法中选出的几个有代表性的方法的分析．

因为在第一部分中所描述的某些方法只能用于特殊情况，或由于有了机械計算的帮助，它們已成为过时的东西，但讀者如果需求一个好的現代的方法，则他将必欢迎任何的指导．作者冒着引起爭論的危险，把方法Ⅱ及Ⅶ介紹給讀者．詳細地說，第二章以及第28，29，30，37，38，39，41諸节給予实际計算工作者以主要的工

具来处理常微分方程中差不多任何一个“适当”的問題.

为了对矩陣不够熟悉的讀者的方便，本书列入了第九章关于綫性方程組及矩陣. 虽然已有許多优秀的关于矩陣的教本，但我們相信把专为与解的迭代法有关的矩陣知識作一簡短的叙述还是合适的.

为了使本书对教学上更有用，插入了許多練习題，供給学生掌握数值方法必不可缺的实际經驗. 这些練习題的有些答案已經算出.

W. E. 米尔納

1953年1月于柯瓦利斯

俄譯本序

米尔納的"微分方程的数値解法"是米尔納的"数値分析"[1](俄譯本也已出版)的續本. 本书闡明微分方程数值解的基本方法及与这种解法有关的問題. 在书的第一部分研究了常微分方程的数値解法. 在叙述这些方法的同时,作者研究了它們的精确度問題. 在这方面,不只給出了余項的估值,还指出了估計累积誤差的办法. 在第一部分的第三章,叙述了数值积分的解析基础. 本书的第二部分专述偏微分方程,而且把相当一部分篇幅,留給綫性方程組解的輔助問題.

应当注意,本书并沒有企图成为包罗万象的著作. 与常微分方程有关的資料在这里提到的相当全面. 但是与偏微分方程有关的,則作者在这里只限于极簡单地研究了网格法对簡单方程的应用. 作者不过份注意結构上的数学严整性,并且常常完全不加証明. 但是,在书中可以找到很多意見及見解;毫无疑問,这些对于实际工作者是有好处的. 书中所研究的內容是用数字例子很好地闡明的. 在某些节的末了有練习,作好这些練习会使讀者更完整地理解所研究的方法. 米尔納的全书可以作为一本手册,对于熟悉这方面內容的人也是一本参考书. 这些优点使得这本书对有兴趣于数値方法实际应用的广大讀者們都是有用的.

俄譯本第三到第七章是由 Д. П. 格魯斯曼完成的,剩下的几章是我譯的.

M. P. 舒拉-鮑拉

---

1) 米尔納的"数值分析"(Numerical Calculus)由徐鍾济、安其春合譯,科学出版社即将出版.

目　　录

第一部分

常微分方程

第 一 章

引 言

当科学或技术上的一个实际問題可用数学公式来表示时，很可能导出的是一个或一組微分方程．对于有关力与运动問題的广大范畴来說肯定是这样的，所以不論我們要知道的是木星在天空中将来的路綫或是一个电子在电子显微鏡中的路綫，我們往往得助于微分方程．对于連續介質中的現象、波的传播、热的流动、扩散、静电或动电等的研究这也是同样眞确的，除了有一点不同，这里討論的是偏微分方程．

微分方程的一些初等教程中提出了一长列的巧妙方法，用这些方法似乎每人都可以解出微分方程了．所以当最后发現了用这些方法所能解的方程相对的少，同时把問題能整洁地表成微分方程，但由于缺乏解法，不能进一步得到解决的又多么多的时候，眞会使人引起可怕的失望及无用的感覚．流体力学、弹性力学、量子力学及其它的教本中导出了整齐的微分方程組，但确定的解只限于非常簡单的情况．

針对这个情形，一些大胆的学者决定了完全抛弃分析的解法，而企图直接从微分方程中挤出所要的訊息．于是产生了这样的事情，各种不同的数値方法并非专門的数学家所发明，而是其它領域中的工作者所創举的；后者的意图是为了另一个目的，而且对他們来說解法只是次要的事情．

阿当姆斯的方法于 1882 年出現在白許福斯及阿当姆斯的論文[4]“毛細管作用的理論”中[1]．动力学的二阶微分方程的另一解

1）在方括弧中的数目可参照书末的文献目录．

法，是在考威尔及克罗梅林的"关于哈雷彗星复归的論文"[41]中得到的．还有其它一些方法是在第一次世界大战中为天文学家F. R. 摩尔頓由有关弹道問題而得出的．事实上，天文学及弹道学的問題曾特别有助于数值方法的发展．

可能是由于这个原因，可能因为它包含着很冗长而厌膩的計算，微分方程的数值解法从来沒有得到純粹数学家的尊重．不然的話，恐怕这学科一定会系統化得多，而在我們現在知識中的缺陷也会已經弥补好了，并且有关哪一个方法是最好的論証也会已經确立起来了．

实际上，人們已經发現了几个差不多相似的方法，并把它們独立地发表了；但在很多情况中，人們还沒有創立完全适当的估求累积誤差的方法．对于一个确实是比較初等的学科来說，微分方程的数值解法还处于一个惊人的不成熟的情况．我們希望为大型数字計算机所激起的，对数值解法的新兴趣的浪潮会引起精干的数学家們的注意，投向这一学科中仍未解决的問題．

1. 微分方程

包含变数及它們的导数的方程叫做微分方程．在最簡单的情形有两个变数 x 及 y，一个記作 y' 的导数 dy/dx，及一个方程

$$F(x, y, y') = 0.$$

如果可能的話，这个方程通常把导数解出，并写成如下形式

$$y' = f(x, y). \tag{1.1}$$

包含着較高阶导数的两个变数的情形，常可以写作方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.2}$$

这里 n 表示諸导数中的最高阶数．这是一个 n 阶的常微分方程．

一个方程可能包含几个因变数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$，及它們对一自变数 x 的一阶导数 $y_1', y_2', \cdots, y_m'$．方程

$$F_1(y_1, \cdots, y_m, y_1', \cdots, y_m', x) = 0$$

就表示这样一个情况．要使 m 个因变数确定成为 x 的函数，这里需要与因变数数目同样多的方程．习惯上从这些方程中解出諸导

数如下：

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(y_1, \cdots, y_m, x), \\
y_2' &= f_2(y_1, \cdots, y_m, x), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m' &= f_m(y_1, \cdots, y_m, x).
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

这是一个 m 阶的微分方程組.

通过代换

$$y_1 = y, \ y_2 = y', \ y_3 = y'', \ \cdots, \ y_n = y^{(n-1)},$$

n 阶微分方程 1.2 可用一个等价的 n 个一阶方程的方程組来代替. 因为如果从方程 1.2 解 $y^{(n)}$ 得

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}),$$

則显然一个等价組就是

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2, \\
y_2' &= y_3, \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n, \\
y_n' &= f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n).
\end{aligned}
$$

反之，从象方程 1.3 的一个 m 阶的方程組，至少在形式上可得到一个阶数不超过 m 并只包含一个因变数的微分方程. 但是要来实行眞正的消去通常是不可能，所以这个变换与其說有实用上的价値，不如說有理論上的价値.

只有一个自变数的微分方程或微分方程組叫作常微分方程. 到此为止本书中所提引的都是常微分方程. 包含多于一个自变数以及因变数对自变数的偏导数的方程叫作偏微分方程.

这里又須注意应当有与因变数数目同样多的方程. 例如，在有三个自变数 x, y, z 及二个因变数 U, V 的情形，我們可以有二个一阶方程：

$$
\begin{aligned}
F_1(U, V, U_x, U_y, U_z, V_x, V_y, V_z) &= 0, \\
F_2(U, V, U_x, U_y, U_z, V_x, V_y, V_z) &= 0.
\end{aligned}
$$

偏微分方程的一般理論还未存在，人們的兴趣主要集中于象

柯西-黎曼方程一样的一些特殊的偏微分方程，这类方程是在流体力学，弹性学，静电及动电学，热的流动及波动中产生的.

2. 微分方程的解。任意常数。任意函数

我們記得一个一阶微分方程

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

的通解是下述方程的形式

$$\phi(x, y, C) = 0,$$

这方程包含 x, y 及一个任意常数. 如果我們按照以下方法用一个差分方程来代替微分方程，則任意常数的重要性就更加明显了：令 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 表示 x 的一組等距值，步长 $x_{i+1} - x_i = h$，令 $y_0, y_1, y_2, \cdots$ 表示 y 的待定的諸相应值，并注意到

$$y_i' = \lim_{x_{i+1}\to x_i} \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

代替这个微分方程我們来考虑差分方程

$$\frac{(y_{i+1} - y_i)}{h} = f(x_i, y_i)$$

或

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \tag{2.2}$$

設 i 相繼地取 n 个值 $0, 1, \cdots, n-1$，我們从方程 2.2 得出一組包含 $n+1$ 个未知数 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 的 n 个方程. 要从这 n 个方程确定出 $n+1$ 个未知数是不够的. 但是，如果諸未知数中之一，譬如說 y_0，看成是任意的，則其余的 y 就能够自方程 2.2 通过这任意值 y_0 全部定出来.

例題 微分方程

$$y' = x + y$$

有解为

$$y = Ce^x - x - 1$$

或

$$y = (y_0 + x_0 + 1)e^{x-x_0} - x - 1,$$

这里当 $x = x_0$ 时 $y = y_0$. 相应的差分方程是

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i),$$

由此

$$y_1 = y_0 + h(x_0 + y_0),$$
$$y_2 = y_1 + h(x_1 + y_1),$$
$$y_3 = y_2 + h(x_2 + y_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

逐次消去得

$$y_1 = (1 + h)(y_0 + x_0 + 1) - x_1 - 1,$$
$$y_2 = (1 + h)^2(y_0 + x_0 + 1) - x_2 - 1,$$
$$y_3 = (1 + h)^3(y_0 + x_0 + 1) - x_3 - 1,$$

而一般有

$$y_n = (1 + h)^n(y_0 + x_0 + 1) - x_n - 1.$$

从关系式 $x_n - x_0 = nh$，我們得 $n = (x_n - x_0)/h$ 及

$$y_n = (1 + h)^{(x_n - x_0)/h}(y_0 + x_0 + 1) - x_n - 1.$$

因为

$$\lim_{h\to 0}(1 + h)^{(x_n - x_0)/h} = e^{x_n - x_0};$$

当 h 趋向于零时，这个解趋向于微分方程的解.

我們用同样办法来处理二阶微分方程

$$y'' = f(x, y, y'),$$

除了有一点不同，在这里宜于（但不是必需的）用 $(y_i - y_{i-1})/h$ 来代替 y'. 二阶导数可用

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$$

来代替，于是差分方程成为

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 f(x_i, y_i, (y_i - y_{i-1})/h).$$

給 i 以 $n - 1$ 个值 $1, 2, \cdots, n - 1$，我們得到包含 $n + 1$ 个未知数 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 的 $n - 1$ 个方程. 这里很明显必須再給定两个补加条件才能确定出全部的 y 值. 这相当于这样的事实，即我們在二阶微分方程的解中有二个任意常数.

联立方程組的情形可以用

$$x' = X(x, y, z, t), \quad y' = Y(x, y, z, t), \quad z' = Z(x, y, z, t)$$

来闡明，这是一个有三个因变数 x, y, z 及一个自变数 t 的三个方程的方程組. 照例，右角上的一撇表示对自变数的微商. 如前例一样，我們得三个差分方程

$$x_{i+1} = x_i + hX_i, \quad y_{i+1} = y_i + hY_i, \quad z_{i+1} = z_i + hZ_i,$$