

微分方程的数值解法



51163
9022

微分方程的数值解法

W. E. 米尔纳著

何 国 伟 译

科 学 出 版 社

1959

WILLIAM EDMUND MILNE
NUMERICAL SOLUTION OF
DIFFERENTIAL EQUATIONS
NEW YORK LONDON

1953

內 容 簡 介

本书是米尔納“数值分析”的續本，它闡述了微分方程数值解的基本方法及与这种解法有关的問題。

本书共分二部分：第一部分闡述常微分方程的数值解法，并研究了它們的精确度等等。第二部分闡述偏微分方程的数值解法，并研究了綫性方程組解的輔助問題等等。

原书有俄譯本，中譯本里加上了俄譯本序，以便讀者参考。

微分方程的数值解法

W. E. 米尔納著

何 国 伟 譯

徐 猷 璩 校

*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街117号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1959年8月第一版

书号：1849 字数：231,000

1959年8月第一次印刷

开本：850×1168 1/32

(京) 0001—7,500

印张：9

定价：1.15元

序

在最近十年中，在一般的数值方法以及特别是微分方程的数值解法的园地上掀起了一股活跃的现象。同时，机械计算方面的进展也打开了以前认为是难以达到的整个领域。

本书企图使读者学到一些可用于常微分方程及偏微分方程数值解法的主要技巧。作者尽力用初等方式，并且很多地方用详述的例题来介绍这些技巧。为了实际计算工作者的方便，简明的陈述是首要的目的。尽管在初等教本所容许的范围内，作者已力求本书在数学上的严格性，但是严格性并不是书中崇拜的对象。把在文献中叙述过的所有的数值解法都提出来也超出了本书的范围，所以我们的意图是要来适当地讨论其中一些看来是最重要的方法。

由于数值解的方法繁多，有些在基本概念上不同，但很多只是在方法上不同，这使我们难于作一个清楚的、逻辑的叙述。为了企图解决这个困难，我们把不要求高精度度时数值地求解微分方程的简单办法在第二章中作了初步描述，并且只要求极少量的数学知识。这里的讨论是详细的，因为这些概念是基本的，并且在以后诸章中还会出现。为便于参考及避免打断特殊方法的解释，我们把第一部分的必要数学工具主要集中在第三章。第一部分的其余内容是从大量有用的方法中选出的几个有代表性的方法的分析。

因为在第一部分中所描述的某些方法只能用于特殊情况，或由于有了机械计算的帮助，它们已成为过时的东西，但读者如果需求一个好的现代的方法，则他将必欢迎任何的指导。作者冒着引起争论的危险，把方法Ⅱ及Ⅶ介绍给读者。详细地说，第二章以及第28, 29, 30, 37, 38, 39, 41 诸节给予实际计算工作者以主要的工

13

具来处理常微分方程中差不多任何一个“适当”的問題。

为了对矩陣不够熟悉的讀者的方便，本书列入了第九章关于綫性方程組及矩陣。虽然已有許多优秀的关于矩陣的教本，但我們相信把专为与解的迭代法有关的矩陣知識作一簡短的叙述还是合适的。

为了使本书对教学上更有用，插入了許多練習題，供給学生掌握数值方法必不可缺的实际經驗。这些練習題的有些答案已經算出。

W. E. 米尔納

1953年1月于柯瓦利斯

俄譯本序

米尔納的“微分方程的数值解法”是米尔納的“数值分析”¹⁾(俄譯本也已出版)的續本。本书闡明微分方程数值解的基本方法及与这种解法有关的問題。在书的第一部分研究了常微分方程的数值解法。在叙述这些方法的同时,作者研究了它們的精确度問題。在这方面,不只給出了余項的估值,还指出了估計累积誤差的办法。在第一部分的第三章,叙述了数值积分的解析基础。本书的第二部分专述偏微分方程,而且把相当一部分篇幅,留給綫性方程組解的輔助問題。

应当注意,本书并没有企图成为包罗万象的著作。与常微分方程有关的資料在这里提到的相当全面。但是与偏微分方程有关的,則作者在这里只限于极简单地研究了网格法对简单方程的应用。作者不过份注意結構上的数学严整性,并且常常完全不加証明。但是,在书中可以找到很多意見及見解;毫无疑问,这些对于实际工作者是有好处的。书中所研究的内容是用数字例子很好地闡明的。在某些节的末了有練習,作好这些練習会使讀者更完整地理解所研究的方法。米尔納的全书可以作为一本手册,对于熟悉这方面内容的人也是一本参考书。这些优点使得这本书对有兴趣于数值方法实际应用的广大讀者們都是有用的。

俄譯本第三到第七章是由 А. П. 格魯斯曼完成的,剩下的几章是我譯的。

M. P. 舒拉-鮑拉

1) 米尔納的“数值分析”(Numerical Calculus) 由徐鍾濟、安其春合譯,科学出版社即將出版。

目 录

第一部分 常微分方程	1
第一章 引言	3
1. 微分方程	4
2. 微分方程的解. 任意常数. 任意函数	6
3. 解: 明显解, 不明显解, 数值解	10
4. 数值解的需要	13
5. 解的初步研究	14
第二章 初等数值解	18
6. 点斜式. 方法 I	18
7. 方法 I 的误差	21
8. 梯形公式. 方法 II	23
9. 收敛因子	25
10. 校验行. 截断误差的实际估计	26
11. 方法 II 的误差	29
第三章 解析基础	31
12. 借助于泰勒级数的形式解	31
13. 收敛半径	32
14. 解析开拓. 方法 III	34
15. 逐次代入法	37
16. 逐次代入法的收敛性	39
17. 数值积分	42
18. 逐次代入法. 方法 IV	44
19. 用纵标表示的公式	47
20. 用向后差分表示的公式	50
21. 用中央差分表示的公式	52
第四章 在数值积分公式基础上的方法	54
22. 向前积分法. 方法 V	54

23. 方法 V 的变形	56
24. 方法 V 的討論	58
25. 用迭代的积分法, 方法 VI	60
26. 方法 VI 的变形	62
27. 差分用于开始計算	63
28. 向前及用迭代的积分法, 方法 VII	66
29. 誤差分析	69
30. 方法 VII. 五点公式	72
第五章 龙盖-庫塔方法, 以高阶导数为基础的方法	74
31. 庫塔的四阶法, 方法 VIII	74
32. 五阶法	75
33. 方法 VIII 与方法 VII 的比較	76
34. 以高阶导数为基础的方法	77
35. 方法 IX. 具有一阶及二阶导数的公式	78
36. 方法 IX 的变形	80
第六章 方程組, 高阶方程	82
37. 一阶方程組	82
38. 二阶或更高阶的方程	84
39. 特殊的二阶方程, 方法 X	85
40. 求和法	88
41. 方法 XI	90
42. 二阶綫性方程, 方法 XII	92
43. 二阶綫性方程, 方法 IX	95
44. 綫性方程, 方法 XIII	97
第七章 两点边值問題	101
45. 两端点边值問題	101
46. 綫性方程	102
47. 非綫性方程. 尝试及校正法	104
48. 逐次代入法	108
49. 变分法	112
50. 里茲方法	114
51. 伽勒金方法	117

第二部分 偏微分方程 119

第八章 明显法, 抛物型及双曲型方程 121

- 52. 抛物型微分方程 $U_t = c^2 U_{xx}$ 121
- 53. 誤差分析 122
- 54. 截断誤差 123
- 55. 抛物型方程的数值例 125
- 56. 双曲型方程 $U_{tt} = a^2 U_{xx}$ 126
- 57. 双曲型方程的例 127
- 58. 任意边界条件 129
- 59. 点組 129
- 60. 变系数 132
- 61. 非綫性方程 133
- 62. 拉普拉斯算子 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 134
- 63. 方程 $U_t = c^2 \nabla^2 U$ 140
- 64. 方程 $U_{tt} = c^2 \nabla^2 U$ 147
- 65. 曲綫边界 151

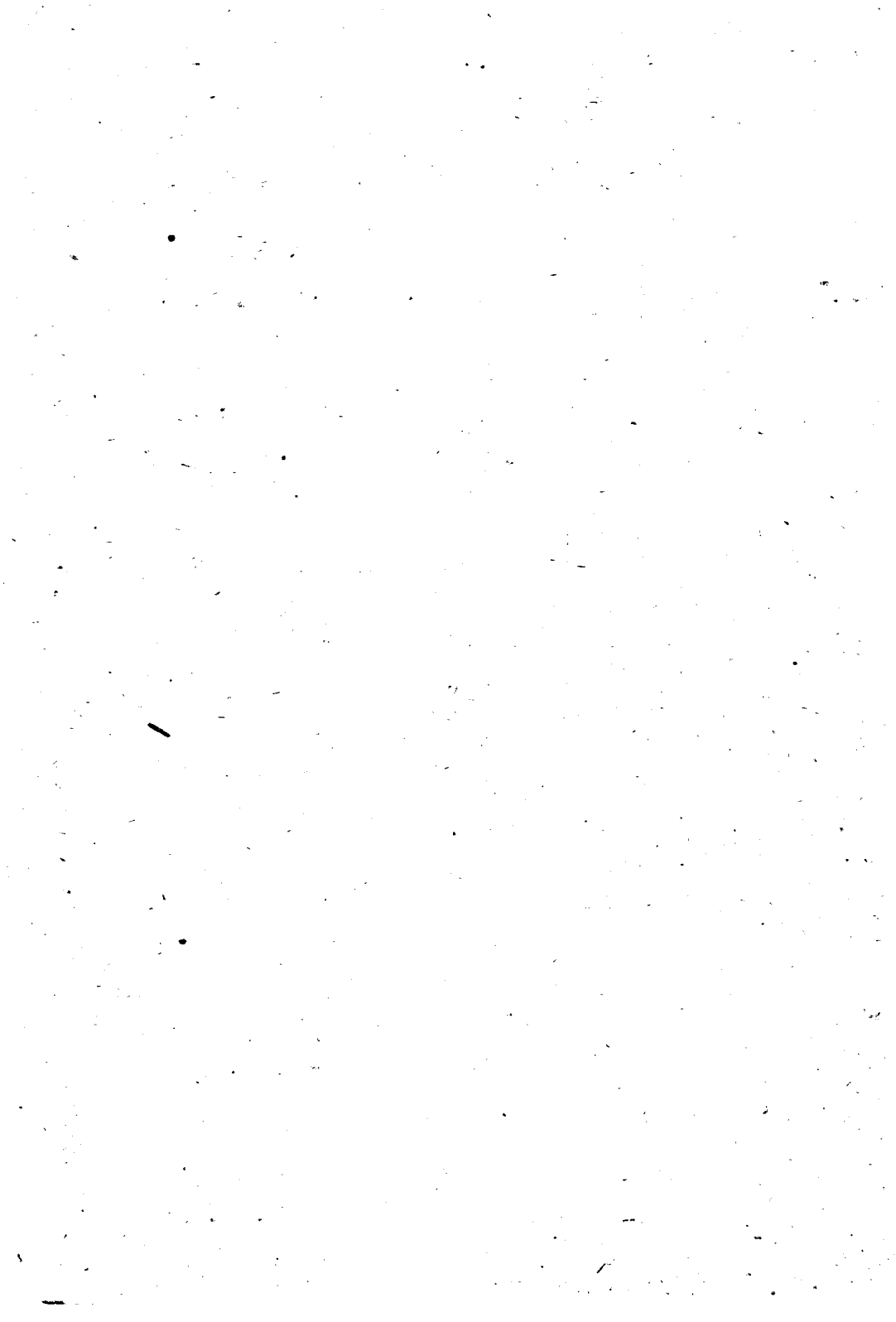
第九章 綫性方程組及矩陣 159

- 66. 綫性方程組 159
- 67. 隱伏根及隱伏向量 164
- 68. 实对称矩陣 166
- 69. 隱伏根的極值性 170
- 70. 逐次近似法 173
- 71. 每次改变一个分量的方法 175
- 72. 成羣变化 177
- 73. 张弛法 177
- 74. 最速下降法(梯度法) 179
- 75. 迭代法 180
- 76. 以 $w = A^{-1}r$ 作迭代 183
- 77. 用逐次迭代的值表出解 186
- 78. 校正矩陣 $C = F(A)$ 190
- 79. 加速收斂 192
- 80. 隱伏根的决定 193

81. 具消去的迭代法, 实对称矩阵	197
82. 直交性的利用	200
83. 梯度法(最速下降法)	202
第十章 不明显法, 橢圓型方程	204
84. 拉普拉斯方程	204
85. 矩阵 H	207
86. $Hu = b$ 的解	211
87. 第一近似	215
88. 矩阵 K	216
89. 更进一步的改进	220
90. 误差分析	221
91. 边界上奇点的消除	225
92. 不連續点的影响域	227
93. 布哇松方程	229
94. 重調和方程	230
第十一章 特征数	233
95. 問題的表述	233
96. 特征方程的推导	235
97. 二度情况	242
98. M 的隱伏根的計算	245
99. 算子 K 的使用	248
100. 曲綫边界情况的特征数	250
附录	253
I. 舍入誤差	253
II. 大型計算机	254
III. 蒙特卡罗方法	257
参考文献	260

第 一 部 分

常 微 分 方 程



第 一 章

引 言

当科学或技术上的一个实际问题可用数学公式来表示时，很可能导出的是一个或一组微分方程。对于有关力与运动问题的广大范畴来说肯定是这样的，所以不论我们要知道的是木星在天空中将来的路线或是一个电子在电子显微镜中的路线，我们往往得助于微分方程。对于连续介质中的现象、波的传播、热的流动、扩散、静电或动电等的研究这也是同样真确的，除了有一点不同，这里讨论的是偏微分方程。

微分方程的一些初等教程中提出了一长列的巧妙方法，用这些方法似乎每人都可以解出微分方程了。所以当最后发现了用这些方法所能解的方程相对的少，同时把问题能整洁地表成微分方程，但由于缺乏解法，不能进一步得到解决的又多么多的时候，真会使人引起可怕的失望及无用的感觉。流体力学、弹性力学、量子力学及其它的教本中导出了整齐的微分方程组，但确定的解只限于非常简单情况。

针对这个情形，一些大胆的学者决定了完全抛弃分析的解法，而企图直接从微分方程中挤出所要的讯息。于是产生了这样的事情，各种不同的数值方法并非专门的数学家所发明，而是其它领域中的工作者所创举的；后者的意图是为了另一个目的，而且对他们来说解法只是次要的事情。

阿当姆斯的方法于1882年出现在白许福斯及阿当姆斯的论文[4]“毛细管作用的理论”中¹⁾。动力学的二阶微分方程的另一解

1) 在方括弧中的数目可参照书末的文献目录。

法，是在考威尔及克罗梅林的“关于哈雷彗星复归的論文”[41]中得到的。还有其它一些方法是在第一次世界大战中为天文学家 F. R. 摩尔頓由有关弹道問題而得出的。事实上，天文学及弹道学的問題曾特別有助于数值方法的发展。

可能是由于这个原因，可能因为它包含着很冗长而厌膩的計算，微分方程的数值解法从来没有得到純粹数学家的尊重。不然的話，恐怕这学科一定会系統化得多，而在我們現在知識中的缺陷也会已經弥补好了，并且有关哪一个方法是最好的論証也会已經确立起来了。

实际上，人們已經发现了几个差不多相似的方法，并把它們独立地发表了；但在很多情况中，人們还没有創立完全适当的估求累积誤差的方法。对于一个确实是比較初等的学科來說，微分方程的数值解法还处于一个惊人的不成熟的情况。我們希望为大型数字計算机所激起的，对数值解法的新兴趣的浪潮会引起精干的数学家們的注意，投向这一学科中仍未解决的問題。

1. 微分方程

包含变数及它們的导数的方程叫做微分方程。在最簡單的情形有两个变数 x 及 y ，一个記作 y' 的导数 dy/dx ，及一个方程

$$F(x, y, y') = 0.$$

如果可能的話，这个方程通常把导数解出，并写成如下形式

$$y' = f(x, y). \quad (1.1)$$

包含着較高阶导数的两个变数的情形，常可以写作方程

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.2)$$

这里 n 表示諸导数中的最高阶数。这是一个 n 阶的常微分方程。

一个方程可能包含几个因变数 $y_1, y_2, \dots, y_m$ ，及它們对一自变数 x 的一阶导数 $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$ 。方程

$$F_1(y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m, x) = 0$$

就表示这样一个情况。要使 m 个因变数确定成为 x 的函数，这里需要与因变数数目同样多的方程。习惯上从这些方程中解出諸导

数如下:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, \dots, y_m, x), \\ y_2' &= f_2(y_1, \dots, y_m, x), \\ &\dots\dots\dots \\ y_m' &= f_m(y_1, \dots, y_m, x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

这是一个 m 阶的微分方程组.

通过代换

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)},$$

n 阶微分方程 1.2 可用一个等价的 n 个一阶方程的方程组来代替.

因为如果从方程 1.2 解 $y^{(n)}$ 得

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

则显然一个等价组就是

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

反之,从象方程 1.3 的一个 m 阶的方程组,至少在形式上可得到一个阶数不超过 m 并只包含一个因变数的微分方程.但是要来实行真正的消去通常是不可能,所以这个变换与其说有实用上的价值,不如说有理论上的价值.

只有一个自变数的微分方程或微分方程组叫作常微分方程.到此为止本书中所提引的都是常微分方程.包含多于一个自变数以及因变数对自变数的偏导数的方程叫作偏微分方程.

这里又须注意应当有与因变数数目同样多的方程.例如,在有三个自变数 x, y, z 及二个因变数 U, V 的情形,我们可以有二个一阶方程:

$$F_1(U, V, U_x, U_y, U_z, V_x, V_y, V_z) = 0,$$

$$F_2(U, V, U_x, U_y, U_z, V_x, V_y, V_z) = 0.$$

偏微分方程的一般理论还未存在,人们的兴趣主要集中于象

柯西-黎曼方程一样的一些特殊的偏微分方程,这类方程是在流体力学,弹性学,静电及动电学,热的流动及波动中产生的。

2. 微分方程的解。任意常数。任意函数

我們記得一个一阶微分方程

$$y' = f(x, y) \quad (2.1)$$

的通解是下述方程的形式

$$\phi(x, y, C) = 0,$$

这方程包含 x, y 及一个任意常数。如果我們按照以下方法用一个差分方程来代替微分方程,則任意常数的重要性就更加明显了:

令 $x_0, x_1, x_2, \dots$ 表示 x 的一组等距值,步长 $x_{i+1} - x_i = h$, 令 $y_0, y_1, y_2, \dots$ 表示 y 的特定的諸相应值,并注意到

$$y'_i = \lim_{x_{i+1} \rightarrow x_i} \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

代替这个微分方程我們来考虑差分方程

$$\frac{(y_{i+1} - y_i)}{h} = f(x_i, y_i)$$

或

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (2.2)$$

設 i 相繼地取 n 个值 $0, 1, \dots, n-1$, 我們从方程 2.2 得出一組包含 $n+1$ 个未知数 $y_0, y_1, \dots, y_n$ 的 n 个方程。要从这 n 个方程确定出 $n+1$ 个未知数是不够的。但是,如果諸未知数中之一,譬如說 y_0 , 看成是任意的,則其余的 y 就能够自方程 2.2 通过这任意值 y_0 全部定出来。

例題 微分方程

$$y' = x + y$$

有解为

$$y = Ce^x - x - 1$$

或

$$y = (y_0 + x_0 + 1)e^{x-x_0} - x - 1.$$

这里当 $x = x_0$ 时 $y = y_0$, 相应的差分方程是

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i),$$

由此

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + h(x_0 + y_0), \\y_2 &= y_1 + h(x_1 + y_1), \\y_3 &= y_2 + h(x_2 + y_2), \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

逐次消去得

$$\begin{aligned}y_1 &= (1+h)(y_0 + x_0 + 1) - x_1 - 1, \\y_2 &= (1+h)^2(y_0 + x_0 + 1) - x_2 - 1, \\y_3 &= (1+h)^3(y_0 + x_0 + 1) - x_3 - 1,\end{aligned}$$

而一般有

$$y_n = (1+h)^n(y_0 + x_0 + 1) - x_n - 1.$$

从关系式 $x_n - x_0 = nh$, 我們得 $n = (x_n - x_0)/h$ 及

$$y_n = (1+h)^{(x_n-x_0)/h}(y_0 + x_0 + 1) - x_n - 1.$$

因为

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{(x_n-x_0)/h} = e^{x_n-x_0};$$

当 h 趋向于零时, 这个解趋向于微分方程的解.

我們用同样办法来处理二阶微分方程

$$y'' = f(x, y, y'),$$

除了有一点不同, 在这里宜于 (但不是必需的) 用 $(y_i - y_{i-1})/h$ 来代替 y' . 二阶导数可用

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$$

来代替, 于是差分方程成为

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 f(x_i, y_i, (y_i - y_{i-1})/h).$$

給 i 以 $n-1$ 个值 $1, 2, \dots, n-1$, 我們得到包含 $n+1$ 个未知数 $y_0, y_1, \dots, y_n$ 的 $n-1$ 个方程. 这里很明显必須再給定两个补加条件才能确定出全部的 y 值. 这相当于这样的事实, 即我們在二阶微分方程的解中有二个任意常数.

联立方程組的情形可以用

$$x' = X(x, y, z, t), \quad y' = Y(x, y, z, t), \quad z' = Z(x, y, z, t)$$

来闡明, 这是一个有三个因变数 x, y, z 及一个自变数 t 的三个方程的方程組. 照例, 右角上的一撇表示对自变数的微商. 如前例一样, 我們得三个差分方程

$$x_{i+1} = x_i + hX_i, \quad y_{i+1} = y_i + hY_i, \quad z_{i+1} = z_i + hZ_i,$$