

高等学校试用教材

(修订版)

高等代数

田孝贵

芮泽民
华德康

欧阳功博
刘玉森

编

Bao
Deng
ai
Shu

首都师范大学出版社

高等代数

修 订 版

田孝贵 芮泽民 欧阳功博 编
华德康 刘玉森

首都师范大学出版社

(京)新208号

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/田孝贵等编著. —北京:首都师范大学出版社, 1994

ISBN 7-81039-283-2

I. 高… II. 田… III. 代数-高等学校-教材 IV. 015

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (94) 第 09710 号

首都师范大学出版社

(北京西三环北路105号 邮政编码 100037)

衡水地区印刷厂印刷 全国新华书店经销

1994年7月第2版 1994年7月第1次印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 18.75

字数: 448千 印数: 2000册

定价: 15.00元

出版说明

本书曾于1991年10月由高等教育出版社出版，现略加修订，并改由首都师范大学出版社出版。

1994年7月

内 容 提 要

本书是根据国家教委代数、数论编审组1984年成都会议关于改革数学专业代数课的精神，结合高师院校实际编写的。

本书的主要特点是：将通常的高等代数、抽象代数内容揉合在一起，用统一的思想和方法讲述，具有较强的科学性和系统性；正确处理抽象与具体的关系，力图做到由浅入深和深入浅出，具有教学的适用性；在材料的选择和处理以及例题和习题的配备上，尽可能结合中学数学，较充分地体现了师范性。

本书可做为高等师范院校数学专业本科、专科的教材，在一、二年级用三个学期（周学时5或4）讲完，也可做为教学参考书。

本书经代数、数论编审组主持的审稿会审定。

本书原由高等教育出版社出版，现略加修订并改由首都师范大学出版社出版。

前 言

本书是根据国家教委理科数学、力学教材编审委员会代数、数论编审组 1984 年成都会议精神, 结合高师院校实际, 为高师数学专业编写的教材。初稿完成经试用和修改。在代数、数论编审组 1988 年湘潭会议上进行了审议。1989 年底, 在刘绍学教授主持下, 有曹锡华、冯克勤教授等参加的审稿会上, 对本书给予了全面而细致地修改和加工。

代数、数论编审组成都会议关于数学专业代数课改革的主要精神是: 加强代数课在教学中的地位, 增加代数课的学时, 更新代数教材的内容, 改革代数教材的体系。会议提出, 将现有高等代数和抽象代数以及初等数论揉合在一起, 更新内容, 编出两年一贯制的代数基础课教材。本书就是根据这个精神所作的一次初步尝试。考虑到当前高师的实际情况, 本书以同中学数学有紧密联系和比较具体的行列式、线性方程组、矩阵运算和二次型开始, 在这个基础上引出集合、映射和运算等基本概念, 然后用统一的思想和方法来讲述环和域、群以及向量空间和欧氏空间, 并且将多项式理论放在环、域之后与整环的因子分解理论相结合。本书包括了高师当前通用的高等代数和抽象代数教材中的几乎所有内容。此外, 增加了加群的直和、有限加群的结构和加群的自同态环等; 为了突出高师的特点, 还增加了有序环和数系。新增加的内容并不多, 但整个教材在体系安排上有了较大的改变, 近代数学的思想与方法也有所体现, 并且内容也具有了一定的深度。一些更深入的部分例如模和伽罗瓦理论以及初等数论的知识, 宜作为选修课的内容没有编入本书。

我们的教学实践表明,根据代数、数论编审组成都会议的精神来改革代数课的教材是完全可行的。在低年级可以开始学习群、环、域等抽象代数体系的基本知识,并且在具有了这些基本知识之后来学习线性代数的内容和多项式理论,不但更容易而且理解得更深刻;按照一贯制体系的教材进行教学,有利于培养和提高学生的逻辑思维和抽象思维能力。本书可在一、二年级用三个学期(包括习题课在内,周学时为5或4)讲授完毕,所需学时与原来讲授高等代数、抽象代数两课的学时大致相同,这是由于减少了原来两课之间的不必要重复以及重新安排教材的结果。在教学中,有极少部分例如商体系可能会出现困难,但就是在高年级学习这些内容,困难也同样会出现。对这样的部分,本书已经作了慎重处理,相信困难是可以克服的。本书中有些内容,如:有序环和数系(或数系中的最后一节), U 空间和内积空间,多元多项式,有限加群的结构定理等,可根据具体情况不讲或粗讲。本书所附习题,大多是基本题;少数是加宽知识面或较难的题,可作为习题课的例题或习题,也可不予布置。我们希望,代数、数论编审组成都会议的精神能得到广泛响应,通过认真研究和积极改革,进一步提高高师数学专业代数课的教学质量。

本书的编写和出版,承蒙代数、数论编审组和代数界的专家、同仁的指导和支持,提出了许多宝贵意见。谨向参加上述三次编审组会议的诸位先生,特别是丁石孙、刘绍学、曹锡华、郝炳新、石生民、冯克勤、黄登航、丘维声等几位先生表示衷心的感谢。在编写过程中也参阅了中外代数教材(书名不再赘述),谨向编者致谢,高教出版社特别是文小西先生等为本书的出版给予了极大的支持和帮助,谨致以深切的感谢。

本书由北京师范学院田孝贵、芮泽民、欧阳功博、刘玉森、华德康分章编写,并由田孝贵全面整理和修改。本书的初稿和修改稿

曾在北京师院数学系多次试用,得到了梅向明、陈家鼎教授和有关方面负责人以及代数教研室教师的大力支持和帮助。

本书的缺点和错误在所难免,希望读者指正。

1990 年 12 月

目 录

第一章 消元法和行列式	1
§ 1 消元法	1
1.1 线性方程组和消元法的基本思想(1)	
1.2 消元法(4)	
§ 2 n 阶行列式的定义	21
2.1 排列及其逆序数(21) 2.2 n 阶行列式的定义(24)	
§ 3 n 阶行列式的性质	29
3.1 n 阶行列式的基本性质(29) 3.2 按一行(列)展开(34) 3.3 行列式的计算(37)	
§ 4 克莱姆规则	49
4.1 克莱姆规则(49) 4.2 齐次情形(55)	
第二章 线性方程组理论	60
§ 5 n 元向量	60
5.1 导引(60) 5.2 n 元向量及其运算(62)	
§ 6 n 元向量的线性相关性	66
6.1 线性组合(66) 6.2 线性相关(69) 6.3 线性组合与线性相关的关系(72) 6.4 极大无关组与秩(74)	
§ 7 矩阵的秩	80
7.1 矩阵的秩及其与矩阵的子行列式的关系(80) 7.2 用初等变换求矩阵的秩(84)	
§ 8 线性方程组的解	90
8.1 解的判定(90) 8.2 三元一次方程组的解(96)	
§ 9 线性方程组解的结构	101
9.1 基础解系(102) 9.2 非齐次线性方程组解的结构(105)	
第三章 矩阵	109
§ 10 矩阵的运算	109
10.1 矩阵的线性运算(109) 10.2 矩阵的乘法(110) 10.3 可逆矩阵(116)	

10.4	矩阵的转置与运算(120)	
§ 11	初等矩阵	124
11.1	初等矩阵(124)	
11.2	初等矩阵与可逆矩阵(127)	
11.3	矩阵的等价(130)	
§ 12	矩阵的分块	136
12.1	分块的运算(136)	
12.3	用分块矩阵讨论线性方程组(143)	
第四章	二次型	149
§ 13	化二次型为平方和	150
13.1	用配方法化二次型为平方和(150)	
13.2	通过矩阵和初等变换化二次型为平方和(152)	
13.3	对称矩阵的合同(162)	
§ 14	复二次型和实二次型	164
14.1	复二次型(164)	
14.2	实二次型(165)	
§ 15	正定二次型	170
15.1	正定二次型的定义(170)	
15.2	正定二次型的判定(171)	
第五章	基本概念	179
§ 16	集与映射	180
16.1	集的概念和运算(180)	
16.2	映射(183)	
§ 17	运算	189
17.1	运算的定义(189)	
17.2	结合律和交换律(191)	
17.3	单位元和逆元(194)	
17.4	映射的合成(197)	
§ 18	关系和等价关系	203
18.1	关系(203)	
18.2	等价关系(206)	
第六章	环与域	211
§ 19	环	211
19.1	环的定义和例(211)	
19.2	环的简单性质(216)	
19.3	单位元与逆元(219)	
19.4	子环(220)	
§ 20	几种特殊的环	226
20.1	整环(226)	
20.2	除环(229)	
20.3	域(231)	
§ 21	商环和理想	238
21.1	商环(238)	
21.2	理想(244)	
§ 22	环的同构与同态	247
22.1	环的同构(247)	
22.2	环的同态(251)	
§ 23	素理想与极大理想	251

23.1 素理想(261)	23.2 极大理想(263)	
§ 24 分式域		266
24.1 挖补定理(266)	24.2 分式域(270)	
§ 25 有序环与有序域		276
35.1 有序集(276)	35.2 有序环与有序域(279)	
第七章 数系		287
§ 26 自然数系		287
26.1 自然数的基本性质(287)	26.2 自然数的序, 数学归纳法(291)	
§ 27 整数环		295
27.1 整数环的存在和唯一性(295)	27.2 整数环的序(299)	
§ 28 有理数域和复数域		303
28.1 有理数域(304)	28.2 复数域(305)	
§ 29 皮亚诺公理		310
29.1 自然数的皮亚诺公理(311)	29.2 自然数集的唯一性(314)	
第八章 多项式环和因子分解		319
§ 30 环 R 上的一元多项式环		319
30.1 一元多项式环的基本概念(319)	30.2 带余除法(322)	30.3 多项式的值和多项式的根(325)
§ 31 域上一元多项式环的整除性及因子分解		331
31.1 整除的概念和基本性质(331)	31.2 因式分解(333)	31.3 因式分解定理的作用(338)
	31.4 辗转相除法(343)	
§ 32 重因式		351
32.1 重因式(351)	32.2 重根(353)	
§ 33 几个常见域上一元多项式的因式分解		355
33.1 复数域和实数域上一元多项式的因式分解(355)	33.2 有限域上一元多项式的因式分解(358)	
§ 34 整环的整除性及因子分解		359
34.1 整除的概念和基本性质(360)	34.2 唯一分解整环(362)	34.3 欧氏整环和主理想整环(364)
§ 35 整环上一元多项式环的整除性及因式分解		369
35.1 $I[x]$ 与 $F[x]$ 在整除性上的异同(369)	35.2 唯一分解整环上的一元多项式环(371)	35.3 有理数域上一元多项式的因式分解(376)
§ 36 多元多项式环		381

36.1 多元多项式的基本概念和基本性质(381) 36.2 对称多项式(385)

第九章 群..... 391

§ 37 交换群的定义和性质..... 391

37.1 定义和简单性质(391) 37.2 子群(395) 37.3 加群的商群(397)

37.4 加群的同构和同态(399)

§ 38 循环群..... 403

38.1 循环群的定义和例(403) 38.2 循环群的子群与商群(405)

§ 39 有限加群..... 407

39.1 和与直和(407) 39.2 有限加群的结构(411)

§ 40 加群的自同态环..... 419

40.1 加群的自同态环(419) 40.2 循环群的自同态环(422)

§ 41 群的定义和性质..... 424

41.1 定义和简单性质(424) 41.2 子群(428)

§ 42 变换群..... 430

42.1 变换群(430) 42.2 置换群(434)

§ 43 商群和正规子群..... 443

43.1 商群(443) 43.2 正规子群(448)

第十章 向量空间与线性变换..... 457

§ 44 向量空间..... 457

44.1 向量空间的定义和基本性质(457) 44.2 基变换与坐标变换(464)

44.3 向量空间的同构(469)

§ 45 向量空间的子空间..... 474

45.1 定义及判别(474) 45.2 和与直和(477) 45.3 商空间(483)

§ 46 线性变换..... 486

46.1 线性变换的定义和性质(486) 46.2 线性变换代数(489) 46.3 线性变换与矩阵(492)

§ 47 矩阵的相似标准形..... 505

47.1 矩阵的相似(505) 47.2 不变子空间(508) 47.3 特征根与特征向量(511)

47.4 具有对角形矩阵的线性变换(516) 47.5 若当标准形(523)

第十一章 欧氏空间与正交变换..... 533

§ 48 欧氏空间的基本概念..... 533

48.1 欧氏空间的定义与基本性质(533) 48.2 向量的长度、夹角与距离(536)

48.3	欧氏空间的内积与正定矩阵(538)	
§ 49	标准正交基	542
49.1	正交化方法(542)	
49.2	欧氏空间的同构(544)	
49.3	正交矩阵(545)	
§ 50	子空间的正交直和	547
50.1	正交子空间(547)	
50.2	最小二乘问题(550)	
§ 51	正交变换	553
51.1	正交变换的定义与性质(554)	
51.2	正交矩阵的标准形(557)	
§ 52	对称变换	564
52.1	对称变换的定义与性质(564)	
52.2	实对称矩阵的相似合同标准形(565)	
52.3	主轴问题(571)	
§ 53	U空间与内积空间	576
53.1	U空间(576)	
53.2	内积空间(579)	

第一章 消元法和行列式

在中学数学中我们学过二元一次方程组和三元一次方程组，但这是很不够的。在实际中会遇到未知量(元)个数和方程个数相当多的一次方程组，而且还会遇到未知量个数和方程个数不相同的一次方程组。在本书的前两章中我们就来学习这种一般形式的一次方程组。

§1 消元法

1.1 线性方程组和消元法的基本思想

我们把一次方程叫做线性方程,一次方程组叫做线性方程组,一般线性方程组写成以下形式:

[illegible]

其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 表示 n 个未知量。(1)中共有 m 个方程, a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 是第 i 个方程中未知量 x_j 的系数, b_i ($i=1, 2, \dots, m$) 是第 i 个方程的常数项, a_{ij} 和 b_i 都是已知数(a_{ij} 和 b_i 也可以是零).

线性方程组(1)可以简记作

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

所谓线性方程组(1)的一个解,是指一组数 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 当未知量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别用 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 代入后, 组(1)中的每个式

子都变成等式. 方程组(1)的一个解用 $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 表示.

在讨论线性方程组时, 无论是在有理数范围内(即所涉及的数全是有理数), 或者是在实数范围内, 或者是在复数范围内, 完全可以用同样的方法得出同样的结果. 因此, 在这两章中, 我们用 F 来表示有理数集或者实数集或者复数集. 讨论中所涉及的数全是 F 中的数, 我们说在数集 F 上讨论线性方程组.

这一节我们讨论求解组(1)的方法——消元法. 消元法是中学数学中加减消元法的直接推广. 我们首先用下面的例子来分析加减消元法的基本思想.

例如, 用加减消元法解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \quad (2)$$

首先消去 x_1 , 第二个方程减去第一个方程, 第三个方程减去乘以2的第一个方程, 得到

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases} \quad (3)$$

再消去 x_2 , 组(3)中第一个方程乘以 $\frac{1}{2}$, 得到

$$x_2 - x_3 = 2.$$

由(3)的第二个方程减去乘以3的上面方程, 得到

$$-x_3 = -3.$$

上式乘以 -1 , 得到

$$x_3 = 3.$$

将 $x_3 = 3$ 代回前面的方程, 便得到(2)的一个解.

在消元的过程中我们多次地运用了以下两个变换:

- 1) 将某个方程乘以不为零的数;
- 2) 将某个方程乘以数后加到另一个方程上.

这两个变换是线性方程组的同解变换, 即施行变换1)或2)

后,新方程组与原方程组是同解的. 加减消元法的基本思想是: 施行一系列上面所说的同解变换, 把所给的方程组化成最简单的形式以求其解. 对于上面的例子可以按以下步骤写出完整的解法. 将组(2)的第一个方程乘以 -1 加到第二个方程上, 第一个方程乘以 -2 加到第三个方程上, 得到

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases} \quad (4)$$

将(4)的第二个方程乘以 $\frac{1}{2}$, 然后将它加到第一个方程上, 再将它乘以 -3 加到第三个方程上, 得到

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 3, \\ x_2 - x_3 = 2, \\ -x_3 = -3, \end{cases} \quad (5)$$

将(5)的第三个方程乘以 -1 , 然后将它加到第二个方程上, 再将它乘以 -2 加到第一个方程上, 得到

$$\begin{cases} 2x_1 = -3, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 3. \end{cases} \quad (6)$$

将(6)的第一个方程乘以 $\frac{1}{2}$, 得到

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 3. \end{cases} \quad (7)$$

(7)已是最简单的方程组, 它的解显然是 $(-\frac{3}{2}, 5, 3)$. 因为组(2)与组(7)同解, 所以(2)的解也就求到.

对于一个方程组来说, 起作用的是未知量的系数和常数项, 至

于未知量用什么符号来表示是没有什么关系的;施行同解变换时,主要是对系数和常数项进行运算。因此,我们可以略去未知量而把方程组的系数和常数项分离出来排成一个表,用这个表来代替方程组,而且运算也只对这样的表来进行。对方程组所施行的两种同解变换反映在表上就是(表中横的叫行,纵的叫列):

- 1) 将某行乘以不为零的数;
- 2) 将某行乘以数后加到另一行上.

对上面的例子来说,把方程组的系数和常数项排成下表

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

对这个表进行上面所说的两种变换就得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

于是便知道方程组的解是 $\left(-\frac{3}{2}, 5, 3\right)$.

下面我们根据加减消元法的基本思想把以上的作法推广到一般情形.

1.2 消元法

设线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \quad (1)$$

定理 1.1 以下两种变换都是线性方程组的同解变换