

数学的故事

談 祥 柏 編 著

科 技 卫 生 出 版 社

內 容 提 要

有时候生动的例子和有趣的故事往往要比刻板的推导和学术式的讲解更能扣人心弦，激发起人们对于这门科学的兴趣。事实上，历史告诉我们，很多创造性的发明是由不平凡的思路所引致的。

这本书将告诉读者一些数学家的故事、重要的发现和几种数学游戏，例如，阿基米德怎样发现了王冠的掺杂，海王星是怎样发现的，怎样设计一个楼梯上的两头开关等，还谈到数学与生产实践的联系，希望读了它以后，将会使你增进对于数学的爱好和钻研的兴趣。

数 学 的 故 事

編著者 談 祥 柏

*

科技卫生出版社出版

(上海南京西路2004号)

上海市书刊出版业营业许可证出093号

上海市印刷五厂印刷 新华书店上海发行所总经售

*

开本 78 $\times$ 1092 1/32 · 印张 3 · 字数 66,000

1958年10月第1版

1958年10月第1次印刷 · 印数 1—13,000

統一書号: 13 · 192

定 价: (7) 0.28 元

目 录

1. 上古的数学	2
2. 阿基米德和王冠	20
3. 神行太保追不上乌龟的故事	28
4. 聪明的孩子	35
5. 海王星的发现	42
6. 兔子与蜜蜂	49
7. 二进位的故事	56
8. 集合論和数理邏輯淺說	69
9. 什么是諾模学	80
10. 数学与应用	91

上古的数学

“要辯証而又唯物地了解自然，就必须熟悉数学。”

——恩格斯

“純粹数学具有非常现实的内容，虽然这些内容以极端抽象的形式出现，但那只能略微掩盖它起源于外間世界的事实。”

——恩格斯

在现代社会里，几乎很少有人对数学的重要性再表示怀疑了。数学是任何自然科学的基础，它是一把总的鑰匙；为了向大自然进军，我们是必须把它牢固地掌握住，并且加以发展的。

然而，环绕着数学这个题目，历来就有着种种歪曲和誤解。譬如說，有些人認為数学只是一种符号游戏，还有些人則認為数学是少数几个聪明的大数学家的玩艺，只要他們开动脑筋，数学便可向前发展了。总之，他們認為数学似乎是与生产实践很少連系的。其实，这种看法完全錯誤，恩格斯說得好：“数学是研究事物的空間形式和数量关系的科学”，因此虽然从表面上看来它似乎非常抽象，其实却是和人們的生产活动有着最緊密的联系。从古到今，无数的历史事实告訴了我們，每当

一种新的生产方式代替了旧的一种生产方式时，生产力被解放出来，数学也就大大地向前发展了，因此我們可以断言：正是生产实践，才是使数学向前发展的决定性因素。

不妨讓我們远溯过去，看看以往的情形吧。

在几万年以前，当原始人还过着穴居野处的生活，生产工具只是些极端粗陋的石器的时候，虽然他們所掌握的知識是极少的，然而对于“数”却也已有了蒙昧的概念，最初是“有”和“无”的区别，經過了許多世代以后，慢慢地注意到了“多”和“少”。并且，有了“对应”这一个重要的概念。举例來說，当猎人們出去狩猎，每个人帶着一支戈矛时，他們已經无形地在“人”的全体（用一个数学术語來說，叫做“集合”）和戈矛的全体之間树立起了一个一一对应的关系来了。而正是有了一一对应的关系，比較多少才有可能，同时，也在这个基础上，逐步地发展了記数法。

据历史学家們的研究，大約在一万年以前，复盖在欧亞大陆上的冰块开始逐漸融化了，地面上的景致发生新的变化，冰河和苔原被茂密的森林和肥沃的平原所代替。这时，原始的农民愈来愈多过漁人和猎人了。这些农民停留在一个固定的地方，开始建造比較固定的住所，同时，陶器、木器制造、紡織等最初的手艺有了萌芽，某些地方的人們已学会了烘面包和酿酒。这个时代，历史学者称为新石器时代，是人类社会从仅仅收集食物到真正生产的一个基本改变。这是一个巨大的进步，科学和技术发生了并且发展了，人們对于自然界的斗争由被动轉而为主动，对于数量关系和空間性状的認識也在很大的程度上有了提高。

原始人的繪画是一樁极宝貴的遺產，現今考古学家們在各处发掘的結果，发现了大宗的材料，几乎各民族的都有。从这

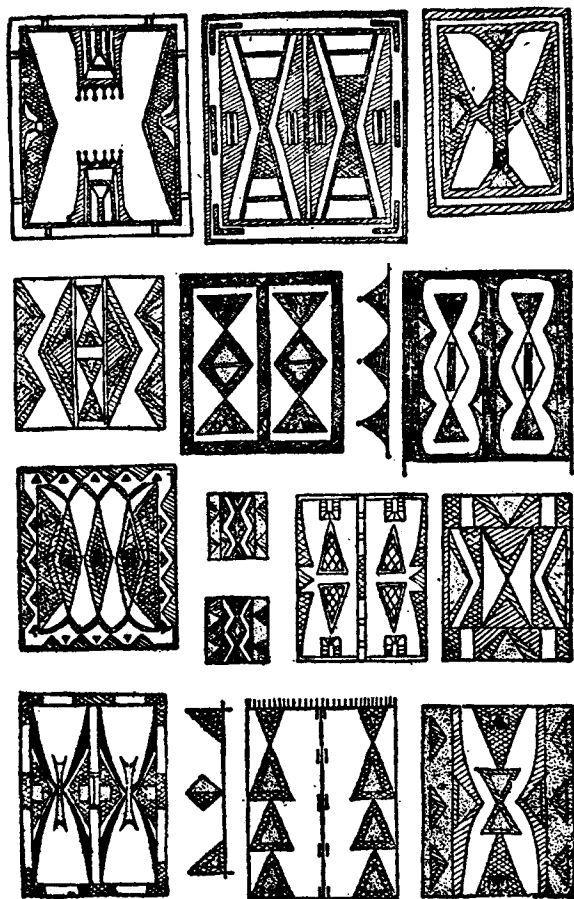


图1 美洲印第安人所作为几何花纹

些遺物里，表現出了原始人对于图形的值得惊异的智力和敏銳的直观。由于生产的发展，象陶器的燒煉和着色，編織籃子和衣料，制造金屬等等，都刺激着人們对于平面和空間图形作进一步的研究。此外，跳舞的样子，祭祀的仪式也呈现出种种极丰富的对称的图案来。

从地穴、坟墓等地方发现的新石器时代的种种物件——例如陶器、籃子，灯心草編織品上，可以看出这些图案和飾物往往喜于表示相合性、相似性和对称性。这些图案，常常有很好的意匠，其中有不少仍可为今日的裝飾艺术家們所取法。

我們中国的情形也差不多。根据地下发掘所获得的資料来看，古代劳动人民已經知道如何在用器上飾以几何图案，从新石器时代石斧、石鏟所凿圓孔的整齐看来，当时似乎有画圓形的工具。

上古应用規和矩两种器具来制作方圓。它的由来是很久远的，在甲骨文里，就已經有規和矩这两个字。其中規字是（很象一个人手执圓規在画圓），矩字是（象两个直角三角形），可以說曲尽象形文字之妙。此外，关于規、矩两字，在古書上

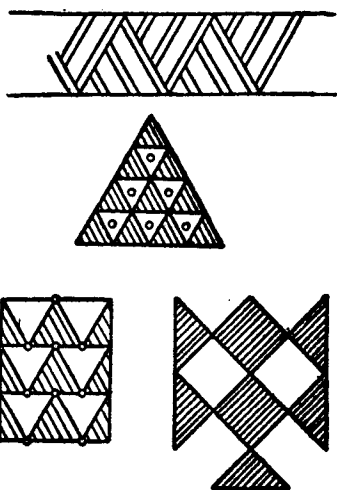


图 2 上 波斯尼亞的新石器时代的陶器上的紋样。

图 2 下 匈牙利某古墓骨甕上的 3 种紋样。

引用得也很多。譬如，大家都知道的，“孟子”里就有着这么一句话：“孟子曰：离婁之明，公輸子之巧，不以規矩，不能成方圓。”山东嘉祥县的汉武梁祠石室造象(公元129年至147年)就有伏羲氏手执矩，女媧氏手执規的图象。其他有关規矩的書籍图誌，簡直多得記不胜記。

著名的几何三大問題，在古代希腊曾受到广泛注意，它們是：

1. 三等分一任意角；

2. 化圓为方：即求作与一已知圓等积的正方形；

3. 提洛問題(二倍立方体問題)，即求一立方体的边長，使这立方体的体积为已知立方体体积的二倍。

我們知道他們是不能用圓規和直尺来作图的。由此可見，关于規矩这两种作图工具，不論中西，在当时都是居于头等重要的地位。

几何图案的作品，自上古以至汉代，几乎到处可見。石器时代的陶片，它的图案有简单的几何紋样，如山紋、連珠紋等。到了周秦时候，鐘鼎、彝器多用雷紋。現时在殷墟掘得的車軸，其中的飾物有五边形、六边形一直到九边形的。而汉代的磚、瓦和各种飾物中所見到的几何图案，不下数十种之多。

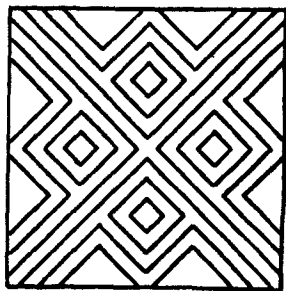


图3 汉磚

我們偉大的祖国有着优秀的艺术傳統，不論繪画、雕刻、建筑、工艺等各种艺术都产生了不



图4 战国彩漆雕花板

可計数的偉大、庄严而精美的作品，单就工艺图案与各种裝飾来看，已經够丰富美丽的了。諸如夏、商、周、秦、两汉时期的陶器、銅器和玉器，汉唐六朝的石刻，唐代的雕塑和壁画，汉代的漆器，宋、明的建筑裝飾、織錦、刺綉等图案，無論在造形、設色、紋样等各方面，全部达到十分成熟完美的境地，发展成为高度的裝飾艺术。至今我們在甘肃燉煌莫高窟的华盖、藻井（見封面）、龙眉、人字帔等处看到的，莫不使人歎为观止，在脑海中留下了不可磨灭的印象。在这些裝飾图案里，当然形形色色的各种图案都有，但是瑰丽精致而又丰富多采的几

何紋样却在其中占据了相当大的比重。



图5 挂落

說起图案，大家对它再熟悉也沒有了，在日常生活里到处可以碰見，如窗花、剪紙、刺綉、台毯、枕衣、手帕絨綾編結物、小孩衣裙、还有印花布、糊牆紙、浴室里的花磚，那里不用到它呢？此外，在祖国古代建筑上也是应用得非常多的，游过苏州拙政园或者留园的人，对于那些花牆、地坪、栏杆、挂落和漏明窗都是很称賞的。

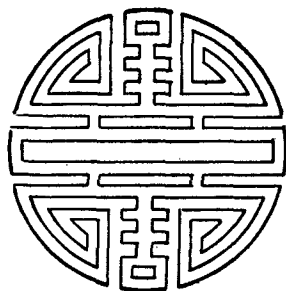


图6 花牆

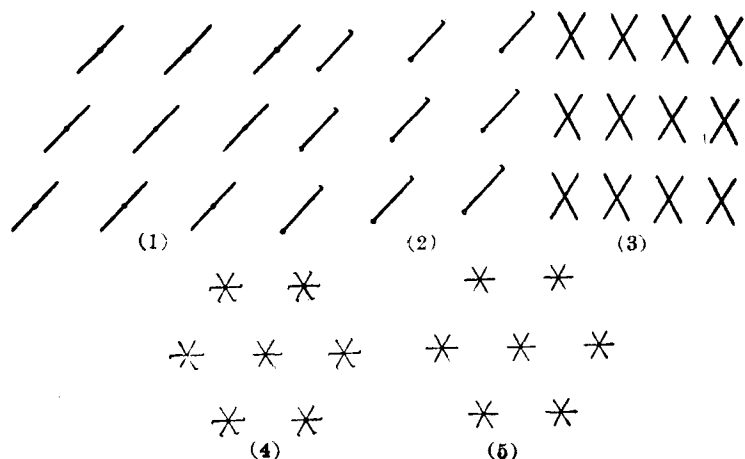
但是真想不到，关于图案却正有着一套很系統，很有趣，并且极不平凡的数学理論。通常象打绳結，包扎，一笔画等問題，看上去十分简单的东西，却都有着极为深刻的数学意义，图案也一样，它与对称的理論有着极密切的連系，直到近代，数学家有了近世代数中的有力工具——群論的知識加以探討之后，这个問題才得到完全的解决。

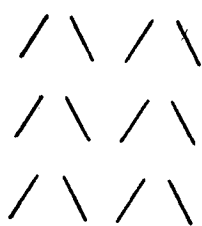
我們可以証明，平面上的图案配置，其不同的对称花样最

多只有17种(在空間,可能更多)。說来奇怪,这些具体的排列方法,远在很久很久以前的我国古代人民和古埃及人民早就知道了,并且已經把它們应用到建筑等方面去了。但这方面的理論性研究却一直到1924年,才被数学家波雅用群論的观点加以証明。

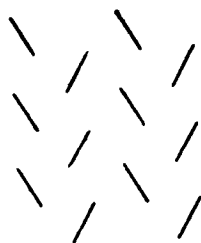
为了帮助大家理解,在下面繪出了这17种不同的排列方法。大家不妨在日常生活中随时留心观察,注意到你所看見的图案是属于那一类的。再告訴大家一件有趣的事,我在上海参观过1957年春季的花布图案展覽会,那里的图案虽有成千上万种,却始終逃不出这17种的范围。当然,在这里不能給出它的严格証明,但是深信大家在理解了群論的一般知識以后,这是不难办到的。

图7 平面图案的17种对称型

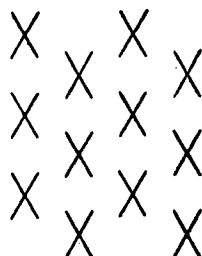




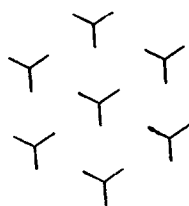
(6)



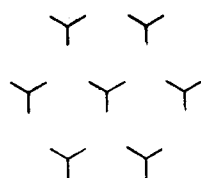
(7)



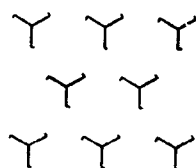
(8)



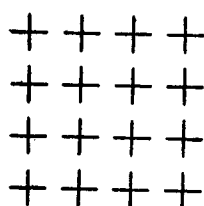
(9)



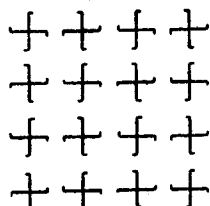
(10)



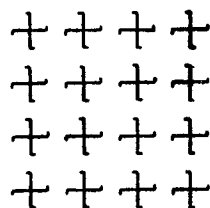
(11)



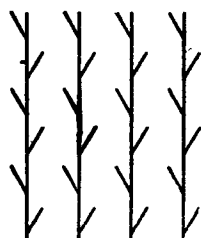
(12)



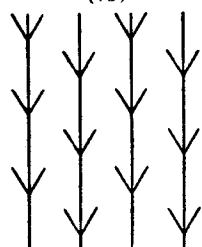
(13)



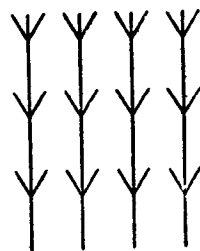
(14)



(15)



(16)



(17)

大家都熟悉結晶体吧？它們是很有規則的，具有多面体形状的固体，例如食盐，明矾，石膏，硫酸銅等等。关于結晶体的构造，在相当長的一段时期內差不多完全依賴着实验所获得的一些知識，說不上什么有系統的研究，当然更缺乏理論的指导了。但是，后来人們发现結晶体的問題和图案問題有着共通性，只不过是將平面上的情形进一步推广之于空間，因此，关于結晶体的对称理論就完全遵循数学的規律，簡直可以說，数学是建立近代結晶学的基础。从前俄国的結晶学家費道洛夫曾应用空間对称的观点，发现了晶体在空間的各种排列状况，共有230种，这就是在結晶学上著名的230个“空間群”。后来利用X射綫来研究晶体构造，所得的照片完全証实了他的理論。

从非常原始的图案问题出发，不断地向纵深发展，竟会得到如此的成功，从此我们可以更加相信数学与实践的关系了。

上面我們談到的，都是關於幾何圖形方面的材料，現在讓我們回過頭來看一看記數方面。

在上古的时候，沒有創造文字以前，大家只在绳上挽成結子，作为記号，来表示事物的件数，这就是所謂“結绳”。易經的“繫”辞篇里說道：“上古結绳而治，后世圣人，易之以書契”。这里說到的“書契”，开始只有文字的簡單形态，把記号雕刻在竹片或木头上面，最先是象形或者計数，以后才逐步用来表达其他的意思。在計数时，以一划表示一，两划表示二，三划表示三，这是自然数表示法的开端。相傳書契的开始起于商代，在下表中可以約略地看一看上古数字演变的情形

現代：一，二，三，四，五，六，七，八，九，十

商甲骨文：一，=，≡，≡，X，∧，∩，十，X，ㄣ，丨

周秦金文：一，二，三，三，五，三，介，十，八，九，十

許慎說文：一，二，三，四，五，六，七，八，九，十

在国外，古代两河流域的苏馬連人的情况与此相似。甚至在現代，一些未开化的民族，如琉球土人，北美洲的印第安部落等，也还有用結绳和書契来計数的事实。

至于記数的方法，在殷商甲骨文和周秦金文中，十以下从一至五，十以上自十至四十，都由累积而成，再进則有百，千，万，亿，兆，都以“十”进位。对于大的数字，我国是以“万”进位，而与西洋用“千”进位不同，至于小数方面，則有分、釐、毫、絲、忽等的名称，而在实际計算时，却是用分数的。

虽然我国古代采用的是十进記数法，但是他們也知道其他的記数方法，例如最常見的八卦，就是一种二进位記数法（二进位記数法在現代电子計算技术上有极广泛的应用，下文当專門討論之）。

关于八卦的傳說，史書上的記載很多，易經里說，古时伏羲氏治理世界，仰望天象，俯視地形，仔細觀察鳥兽的踪迹和地勢的道理，在近处就拿身子做标准，在远处采取事物作榜样，这样才画出八卦来。这部書里又說道，变动的开始是一个“太极”，由“太极”生出“两仪”。由“两仪”生出“四象”，再由“四象”生出八卦。

上面这些話，說得很神秘，很玄虛，当然含有許多迷信和附会的成分在內，但是如果把謎揭开了，那么它实际上就是：

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

这一来，它的意义就清清楚楚了，所以我们說，八卦实际上即是一种二进位的記数方法。

八卦的画法如下：

			
乾三連	坤六斷	震仰盂	艮复碗
			
离中虛	坎中滿	兌上缺	巽下斷

这里是八句歌訣，其中第一个字表示卦名，其余两个字是大略解說其形状的，例如“艮复碗”是說艮卦的形状很象一只倒放的碗，其余几句的意义亦可依此类推。每个卦都用三划来表示，叫做“三爻”。各爻分为阴阳两种：阳爻作“—”状，阴爻作“--”状。每一卦的底下一划叫做“初爻”，中間的叫做“中爻”，上面的叫做“上爻”，通常八卦是用来表示下面八种东西的。

乾一天	坤一地	艮一山	兌一泽
震一雷	巽一风	坎一水	离一火

現在用近代的術語来把它稍加解釋一下，如果把阳爻“—”当作阿拉伯数字中的“1”，阴爻“--”当作“0”，再把初爻看作是第一位上的数字，中爻和上爻依次視為第二位和第三位上的数字，那么便可以列出一張对照表来：

卦名	符号	二进位制記法	相当于十进位的
坤	☷	0 0 0 ($0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$)	0
震	☳	0 0 1 ($0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$)	1
坎	☵	0 1 0 ($0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$)	2
兑	☱	0 1 1 ($0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$)	3
艮	☶	1 0 0 ($1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$)	4
离	☲	1 0 1 ($1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$)	5
巽	☴	1 1 0 ($1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$)	6
乾	☰	1 1 1 ($1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$)	7

因此我們可以知道，古人发明八卦，正是建立了一种記数符号，以应生产需要，而后世竟把八卦附会到算命、起課等迷信上去，那真正是完全歪曲了它原先的意思了。

傳說中有巢氏、伏羲氏、神农氏到黃帝的时代，我国正在由漁猎社会逐步过渡到农业社会，因为农产品的种植收获，必須注意到季节的推移，寒暑的变迁，才好从事工作，黃帝时占日月，作算数，堯时治历象，定閏法，……等等，这正是为了适应实际的需要而产生天算的研究。鯀筑城垣，必須了解地形的高低；禹治洪水，也得明白水流的方位，从此又产生了测地术和水利工程等知識。

“九章算术”是我国古代最宝贵的数学文献之一，是秦汉数

百年間数学研究成果的总结性著作。全書共分方田、粟米、衰分、少广、商功、均輸、盈不足、方程、勾股等九章，所討論的問題多半是与秦汉时期的生产与社会状况有关。并且差不多每个問題都是从实际出发的。

“管子”地員篇里討論管乐，說把“宮”音管長“三分而益之以一”便得到“徵”音管的長度，另外一本在公元前三世紀左右写成的“考工記”在講到制造車輪时，也有“六分其輪崇，以其一为之牙圍”“參分牙圍而漆其二”等說法，可見我們中国人远在秦朝以前，就已經能掌握分数的实际应用了。

例如“周髀算經”(大約完成于西汉末年的算書)关于月行速度的計算，有

$$383\frac{847}{940} \times 13\frac{7}{19} = 5132\frac{2698}{17860}$$

的算式，說明已經能把繁分数化簡为单分数了。

在历法方面，分数的应用頗广，如秦始皇时顓頊历拟定一年的日数是 $365\frac{1}{4}$ 天，因而叫做四分历法，又拟定一年的月数是 $12\frac{7}{19}$ 月，这便是十九年七閏的办法。

分数四則运算方法在九章算术方田章里叙述得更为清楚，这一段里先講約分，术曰：“可半者半之；不可半者，副置分子之数，以少减多，更相减損求其等，以等数約之。”这里所謂“以少减多”，并不是从少的里面减去多的，如說以 2 减 4，实际上是 $4 - 2$ 的意思，这是古書中常用的說法。此外“等数”就是“最大公約数”，而“更相减損”就是輾轉相除法。