工程测量平差计算手册

GONGCHENGCELIANG PINGCHAJISUAN SHOUCE

煤炭工业出版社

工程测量平差计算手册

煤炭工业部《工程测量平差计算手册》编写组

煤 炭 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本手册比较系统地介绍了四等和四等以下三角测量和水准测量的平差计算方法，同时还扼要地作了理论方面的阐述。本手册共分十一章，包括误差理论知识、计算工作的一般知识、三角测量的概算、三角网按条件观测平差、克吕格两组平差、典型图形平差、小三角网近似平差、水准测量平差、三角高程测量平差、导线测量平差、高斯平面坐标换带计算和坐标换算等。

本手册可供测绘人员内业计算参考使用，也可作为测绘专业学校的参考书。

工程测量平差计算手册

煤炭工业部《工程测量平差计算手册》编写组

*

煤炭工业出版社 出版

（北京安定门外和平北路16号）

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 $787\times1092^{1}/_{16}$　　印张 $25^{1}/_{4}$

字数 601 千字　　印数 1—23,400

1978年5月第1版　　1978年5月第1次印刷

书号 15035·2051　　定价 3.40 元

前　言

在毛主席无产阶级革命路线的指引下，工业学大庆、农业学大寨的群众运动在全国蓬勃兴起，推动了工农业生产的迅速发展，使我国的社会主义建设出现了新的跃进局面。

为了适应测绘工作发展的需要，我们遵照毛主席**要认真总结经验**的教导，将我们多年来实际运用的一些平差计算方法总结整理出来，编写了这本手册。工程建设中的控制测量工作，绝大部分是在国家已有等级控制网基础上进行加密，或者建立独立的控制网，因此计算工作比较繁多，而大部分需要在较短的时间内提出成果。本手册就是为了适应这种计算工作的需要而编写的。在内容上，我们力求简明易懂，安排算例较多，计算程序简化，并且编进了一些新的计算方法。同类图形有几种平差方法，便于读者灵活运用。考虑到读者自学的需要，在平差理论方面也作了必要的阐述。

由于我们水平有限，因此书中难免出现错误，恳请广大测绘工作者予以批评指正。

本手册由项麟、俞梓良、马荣、刘声涛、陈尚轩、陈柏年等同志参加编写。在编写过程中得到煤炭工业部煤炭规划设计院、陕西省煤矿设计研究院、湖北煤矿设计院、山西省煤矿设计院、大屯煤矿工程指挥部、三河煤矿、重庆煤矿设计研究院、辽宁省煤矿设计研究院等单位的大力支持和热情关怀，特此表示谢意。

《工程测量平差计算手册》编写组

目　录

第一章　误差理论知识 ……1
§1-1　平差计算的概念 ……1
§1-2　观测种类和平差方法的关系 ……1
§1-3　观测误差 ……2
§1-4　衡量精度的标准 ……3
§1-5　误差传播定律 ……4
§1-6　算术平均值和带权算术平均值原理 ……6
§1-7　权的意义及确定权的方法 ……6
§1-8　观测值的精度评定 ……9
第二章　计算工作的一般知识 ……11
§2-1　运算数字的凑整规则 ……11
§2-2　计算机的检查和使用中的一些技巧问题 ……13
§2-3　利用对数表作乘、除、乘方、开方运算 ……16
第三章　三角测量的概算 ……18
§3-1　概述 ……18
§3-2　三角测量外业成果的检查 ……19
§3-3　三角测量测站平差 ……19
§3-4　三角形边长概算和球面角超计算 ……23
§3-5　测站点归心和照准点归心改正计算 ……25
§3-6　三角点近似坐标计算 ……32
§3-7　方向归化改正数之计算 ……33
§3-8　水平方向整理 ……34
第四章　三角网按条件观测平差 ……35
§4-1　概述 ……35
§4-2　条件方程式的种类及其组成 ……36
§4-3　条件方程式数目的确定 ……44
§4-4　条件方程式的选择 ……48
§4-5　举例列出条件方程式 ……50
§4-6　条件方程式不符值的限值 ……54
§4-7　法方程式的组成 ……56
§4-8　组成法方程式时的检算 ……57
§4-9　法方程式解算 ……58
§4-10　改正数的计算 ……62
§4-11　平差值权函数式的列法 ……62
§4-12　平差值函数的中误差计算 ……65
§4-13　三角网按角度进行条件观测平差的计算步骤 ……65
§4-14　三角网按角度进行条件观测平差算例 ……66

第五章　克吕格两组平差……76
§5-1　概述……76
§5-2　克吕格两组平差法的原理……76
§5-3　克吕格两组平差法的精度评定……79
§5-4　应用“平均分配改化规则”作克吕格两组平差……80
§5-5　按克吕格两组平差法作复合中心多边形网的严密平差……83
§5-6　两固定边之间插入三角形单锁的严密平差……99
§5-7　固定边与固定点之间插入三角形单锁的严密平差……105
§5-8　按克吕格两组平差法作线形锁的严密平差……111
§5-9　线形锁加入辅助角的严密平差……122
§5-10 线形锁参入未知数 v_{S_0} 的严密平差……132
第六章　典型图形平差……150
§6-1　概述……150
§6-2　克吕格三组平差法作典型图形平差……150
一、克吕格三组平差法原理……151
二、精度评定……153
三、固定角内插入两点的平差……154
四、固定角内插入一点的平差……163
五、中心三角形的平差……166
六、中心多边形的平差……169
七、大地四边形的平差……175
八、固定三角形内插入一点的平差……181
九、固定三角形外插一点的平差……186
十、部分图形的平差计算公式……189
§6-3　展开系数法作典型图形平差……192
一、展开系数平差法原理……192
二、精度评定……195
三、固定角内插入两点的平差……195
四、固定角内插入两个相邻的大地四边形的平差……203
五、固定三角形内外各插一点的平差……209
六、固定三角形内外插四点的平差……214
七、部分图形的展开系数……221
§6-4　全展系数法作典型图形平差……227
一、全展系数平差法原理……227
二、精度评定……229
三、固定角内插入一点的平差……231
四、固定角内插入两点的平差……234
五、固定角内插入三点的平差……236
六、固定角外插一点的平差……239
七、中心三角形的平差……241
八、中心四边形的平差……244
九、中心多边形的平差……249
十、大地四边形的平差……251

十一、具有公共顶点的线形锁平差 ……254
十二、固定三角形内插入一点的平差 ……256
十三、固定三角形外插一点的平差 ……260
十四、固定三角形外插两点的平差 ……262
十五、部分图形的全展系数 ……264
第七章　小三角网近似平差 ……270
§7-1　概述 ……270
§7-2　中心多边形的近似平差 ……270
§7-3　固定角内插入一点的近似平差 ……275
§7-4　固定角内插入n点(半网形)的近似平差 ……277
§7-5　大地四边形的近似平差 ……279
§7-6　两固定边之间插入三角形单锁的近似平差 ……282
§7-7　固定边与基线之间插入三角形单锁的近似平差 ……288
§7-8　固定边与固定点之间插入三角形单锁的近似平差 ……289
§7-9　线形三角锁的近似平差 ……293
第八章　水准测量平差 ……312
§8-1　概述 ……312
§8-2　单一附合水准路线的平差 ……312
§8-3　单一结点水准网的平差 ……315
§8-4　等权代替法作水准网平差 ……318
§8-5　逐渐趋近法作水准网平差 ……323
§8-6　多边形法作水准网平差 ……327
第九章　三角高程测量平差 ……333
§9-1　概述 ……333
§9-2　单一附合三角高程路线的平差 ……333
§9-3　独立交会点三角高程的平差 ……335
§9-4　逐渐趋近法作三角高程网平差 ……337
§9-5　多边形法作三角高程网平差 ……341
第十章　导线测量平差 ……344
§10-1　概述 ……344
§10-2　单一附合导线的平差(方法之一) ……344
§10-3　单一附合导线的平差(方法之二) ……347
§10-4　单一结点导线网的平差 ……351
§10-5　等权代替法作导线网平差 ……356
§10-6　逐渐趋近法作导线网平差 ……365
§10-7　多边形法作导线网平差 ……375
第十一章　高斯平面坐标换带计算和坐标换算 ……383
§11-1　高斯—克吕格正形投影概述 ……383
§11-2　高斯投影分带与百万分之一地形图分幅的关系 ……384
§11-3　由大地坐标求高斯平面直角坐标及子午线收敛角 ……385
§11-4　由高斯平面直角坐标反算大地坐标 ……387
§11-5　高斯平面坐标换带计算 ……388
§11-6　平面直角坐标换算 ……392

第一章　误差理论知识

§1-1　平差计算的概念

测量平差就是运用辨证唯物主义观点，采用一种合理的方法解决观测值与理论值（或已知值）不符的矛盾，求得各观测值的最或是值；评定观测值和最或是值的精度；研究测量工作最合理的方案和观测方法。

各种测量工作大都是在野外进行的，由于仪器和工具本身存在着误差，加之外界条件不断变化的影响，故观测的结果总是不可避免地带有误差，使实际观测值和理论值（或已知值）不相符合，这种不符值称为闭合差。例如一个平面三角形内角之和应等于 180°，而实际观测结果往往不等于 180°，其差数就称为三角形闭合差。

为了合理地处理观测中的偶然误差，以改正观测所得的结果，从而使改正后的观测值满足理论值（或已知值）的要求，或求得某些量的最或是值，这是平差计算中的一项重要内容。用以改正观测结果的方法很多，但以用最小二乘法进行平差是最合理的。这种方法的原理为：解算任意一个平差问题时，在等精度之观测值上应加的改正数 v_i，是在满足其平方之和为最小的条件下求得的，所以，v_i 平方之和应为最小，即：

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2=\text{最小} \tag{1-1}$$

当非等精度观测时，应加的改正数 v_i 是在其平方后乘以相应观测值的权的总和为最小，即：

$$[Pvv]=P_1v_1^2+P_2v_2^2+\cdots\cdots+P_nv_n^2=\text{最小} \tag{1-2}$$

式中　$v_1,v_2,\cdots\cdots v_n$ 表示观测值的改正数；

$P_1,P_2,\cdots\cdots P_n$ 表示观测值的权。

§1-2　观测种类和平差方法的关系

平差中将观测区分为：直接观测、间接观测和条件观测三种。无论何种观测，又可根据使用的仪器精度、测量方法、测量次数，分为等精度和非等精度观测两种。

当测量中是直接地测定某一个未知量，这种观测称为直接观测。若对某一量进行多次观测，得出多个观测值时，即发生平差问题。欲求其最或是值，可用直接观测平差方法计算，在等精度直接观测平差中，是取算术平均值作为该量的最或是值。因此，直接观测平差只能解算一个未知数。

如果不是直接测定未知量，而是测定其函数，如图 1-1 中，x、y、z 为所需要求的角值，但观测时没有直接测定 x、y、z，而是测量其函数 $x+y+z$、$x+y$、$y+z$ 之值，然后间接地求得未知量 x、y、z，这种观测称为间接观测。

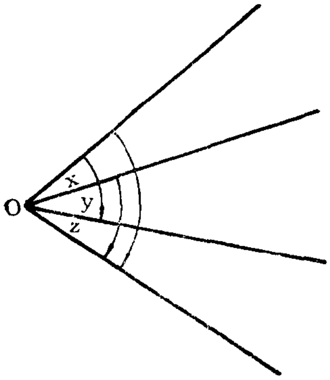

图 1-1

为了提高测量精度，检查错误，往往对未知量（或其函数）作“多余观测”。比如一个三角形的三内角之和为180°，因此只要观测其中两个内角就能满足计算几何图形。但为了提高精度，实际上往往观测三个内角，这样，其中一个就是“多余观测角”。这种在有一定几何条件下的观测，就称为条件观测。

不论用间接观测或条件观测，只要对未知量进行多余观测，即产生平差问题。用间接观测时，既可用间接观测平差法来解算，也可用条件观测平差法来解算；而用条件观测时，同样既可用条件观测平差法来解算，也可以用间接观测平差法来解算。用间接观测平差或条件观测平差均能解算多个未知数。

在同一外界条件下，用同等精度的仪器，同样的方法，同样的观测次数，以及同样的注意力所完成的观测，叫做等精度观测。如果观测时外界的自然条件不同，或用不同精度的仪器，用不同的观测方法，不同的观测次数，或由不同的人观测，象这样的观测，不论是具有这些因素的全部或其一部分，都叫非等精度观测。在测量平差计算中，把观测组区分为等精度观测组或非等精度观测组，通常只考虑测量时所用仪器的精度，测量的方法，以及测量的次数。

§ 1-3 观 测 误 差

为了求得某量的最或是值，常进行多次观测，但各次所得的观测值总是不一样的。例如，在水准测量中，对两水准点间的高差进行往返观测，其结果总会存在着一些差别，这就说明了观测值中存在着误差。产生误差的原因很多，主要是仪器本身存在误差，观测时仪器安置、照准、读数的误差，或外界自然条件变化使观测结果受到影响而造成的误差。按误差的性质可分为系统误差和偶然误差两类。

一、系统误差

在各种相同的条件下，作一系列观测，如果其观测的误差在大小、正负符号上呈现一致性，或者按一定的规律变化着，或者保持一定的常数，那么这种误差就称为系统误差。系统误差在一定的条件下，可以用各种方法加以消除，或者最大限度地减少其影响程度。例如，50米长的钢带尺，它与标准长度相比差了一个$\pm\Delta l$的值，用其丈量距离S时，就必然包含着$\pm\frac{\Delta l}{50}\cdot S$的误差。这种误差的大小与距离成正比，距离越长，所累积的误差越大。但我们在测量前，通过钢尺鉴定，求出其尺长改正数，那么所量距离S的系统误差就可以消除。

二、偶然误差

在各种相同条件下，作一系列的观测，如果观测的误差在数值的大小、正负符号上都呈现不一致性（但其数值保持在一定的范围内），也就是说从表面上来看好象没有什么规律性，比如读数误差、照准误差的出现都带有偶然性，这类误差就称为偶然误差。

经无数次测量实践证明，在各种条件相同的情况下，大量的偶然误差是有其规律性的，而且这种规律性在各种测量过程中都反映出来，概括来说有以下几个特性：

1. 在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值；

2. 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的机会多;

3. 绝对值相等的正误差与负误差出现的机会相等;

4. 偶然误差的算术平均值,随着观测次数的无限增加而趋近于零。

偶然误差与系统误差在观测过程中一般是同时出现的。对于系统误差总是采取各种措施加以消除,或尽量减少其影响,因此,在这种情况下,最后整理出来的观测成果中带有的误差,我们就认为主要是偶然误差。故平差计算时不考虑系统误差,而只考虑偶然误差。

§1-4 衡量精度的标准

在测量过程中由于存在着不可避免的偶然误差,所以在相同的条件下,对某未知量作多次观测,其观测结果总是不一致的。为了衡量观测结果的精确程度,我们常用中误差、平均误差、极限误差和相对误差作为评定精度的标准。

一、中误差

所谓中误差,就是各个真误差平方和的平均值的平方根。即

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-3}$$

式中m为观测值中误差; n为观测次数;Δ为真值X与观测值l之差,即$\Delta=X-l$。

由于偶然误差正值和负值出现的机会相等,故中误差总带有双重符号。另外,中误差并不等于每个观测值的真误差,而是用来评定一组观测值精度的一个量。观测值愈精确,其真误差愈小,则中误差愈小,反之亦然。

二、平均误差

所谓平均误差,就是一组观测值中真误差之绝对值的算术平均数。即

$$t=\pm\frac{|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots\cdots+|\Delta_n|}{n}=\pm\frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1-4}$$

式中t称为平均误差;$|\Delta|$为真误差的绝对值;n为观测次数。

当观测次数相当多时,平均误差与中误差对衡量观测精度同样可靠。但观测次数不多时,则用中误差衡量精度较为可靠。这是因为大的真误差在中误差计算中能灵敏地反映出来,而平均误差没有这种明显的反映。我国采用中误差作为衡量精度的标准。

三、极限误差

偶然误差的第一个特性告诉我们,在一定的观测条件下,偶然误差的绝对值,不会超过一定的限值。如果在测量工作中所出现的误差超过这个限值,我们就认为观测的质量不好,应将超出这个限值的观测值舍去不用。那么究竟应当如何确定这个限值呢?根据或然率理论及多次实验的统计证明:大于二倍中误差的偶然误差,其出现的机会只有5%,大于三倍中误差的偶然误差出现的机会仅0.3%。在实际工作中,观测次数总是有限的,所以可以认为大于三倍中误差的偶然误差事实上是不可能出现的,为此,我们以三倍中误差作为观测成果允许误差的限值,称它为极限误差。即

$$W_{限}=3m \tag{1-5}$$

在现行规范中,往往提出了更严格的要求,以二倍中误差($2m$)作为极限误差。

四、相对误差

对于某些测量成果，只用中误差还不能很确切的衡量其精度。例如我们分别丈量两段距离，它们的长度分别为 1000 米和 500 米，其观测值的中误差均为±2 厘米。不能说这两个观测值精度是相同的，为此，我们用相对中误差来衡量其精度。所谓相对中误差，就是中误差与观测值之比。在上例中，前者为$\frac{2}{100000}=\frac{1}{50000}$，而后者为$\frac{2}{50000}=\frac{1}{25000}$，显然前者的精度高于后者。相对误差是个无名数，在评定精度时，都将分子化为 1。

对于真误差与极限误差，有时也用相对误差来表示。在导线测量中，一般用相对极限误差来衡量其精度。如经纬仪导线测量中规定相对闭合差不能超过$\frac{1}{8000}$，这就是相对极限误差。而在实测中所产生的相对闭合差，我们就认为是相对真误差了。

我们一般所指的真误差、中误差、极限误差均称为绝对误差。

§ 1–5　误差传播定律

前面我们简单介绍了根据多次观测而产生的误差来衡量观测值的精度问题。但在实际工作中，未知量的值经常是由观测值间接计算出来的。因此，未知量与观测值存在着函数关系。那么，研究和阐述观测值的中误差与它们的函数的中误差之间的关系者，就称为误差传播定律。

现将各种函数的误差传播定律简介如下：

一、倍数

设有函数

$$z=kx \tag{1-6}$$

式中 k 为常数；x 为观测值，其中误差为 m_x；函数 z 的中误差为

$$m_z=km_x \tag{1-7}$$

即：观测值与一常数的乘积的中误差，等于观测值的中误差乘上常数。

例：在 1/500 图上，量得其两点间的距离 $s=23.4$ 毫米，其中误差 $m=\pm 0.2$ 毫米，求该两点实地距离 S 及中误差 m_S。

解：
$$S=500\ s=500\times 23.4=11700\ 毫米=11.7米$$
$$m_s=500m=\pm 500\times 0.2=\pm 100\ 毫米=\pm 0.1\ 米$$

最后写为
$$S=11.7\pm 0.1\ 米$$

二、和或差

设有函数

$$z=x_1\pm x_2\pm\cdots\cdots\pm x_n \tag{1-8}$$

已知独立观测值 x_1、$x_2\cdots\cdots x_n$ 的中误差分别为 m_1、$m_2\cdots\cdots m_n$，则可得到函数 z 的中误差为：

$$m_z^2=m_1^2+m_2^2+\cdots\cdots+m_n^2 \tag{1-9}$$

即：n 个观测值代数和的中误差平方，等于 n 个观测值中误差之平方和。

例：图 1-2 中，已知 $\angle AOB=\alpha\pm 0'.2$，$\angle BOC=\beta\pm 0'.4$ 及 $\angle COD=\gamma\pm 0'.4$。问由此推算而得的 δ 值的中误差为若干？

解：由图知　　$\delta=360°-\alpha-\beta-\gamma$

则　$m_\delta^2=m_\alpha^2+m_\beta^2+m_\gamma^2=(0.2)^2+(0.4)^2+(0.4)^2=0.36$

$$m_\delta=\pm0'.6$$

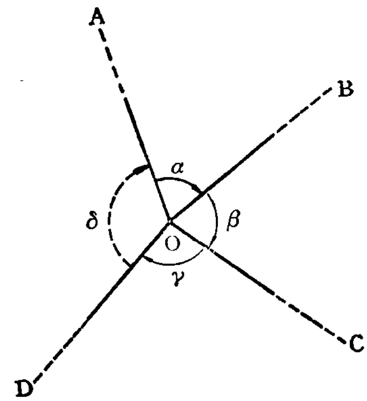

图 1-2

三、线性函数

设有函数

$$z=k_1x_1\pm k_2x_2\pm\cdots\cdots\pm k_nx_n \tag{1-10}$$

式中 k_1、k_2……为常数，而 x_1、x_2……x_n 等均为独立的观测值，它们的中误差分别为 m_1、m_2……m_n。则函数 z 的中误差为：

$$m_Z^2=k_1^2m_1^2+k_2^2m_2^2+\cdots\cdots+k_n^2m_n^2 \tag{1-11}$$

即：常数与观测值乘积的代数和的中误差平方，等于各常数与相应观测值中误差之乘积的平方和。

四、一般函数

设有函数

$$z=f(x_1,x_2\cdots\cdots x_n) \tag{1-12}$$

式中 x_1、x_2……x_n 为具有中误差 m_{x_1}、m_{x_2}……m_{x_n} 的独立观测值。当 x_1、x_2……x_n 等的真误差分别为 Δ_{x_1}, Δ_{x_2}……Δ_{x_n} 时，函数 z 必然产生真误差 Δz，此时，由(1-12)式得：

$$z+\Delta_z=f(x_1+\Delta_{x_1},x_2+\Delta_{x_2}\cdots\cdots x_n+\Delta_{x_n})$$

因为 Δ_{x_1}、Δ_{x_2}……Δ_{x_n} 很小，可将上式用台劳公式展开成级数，并取至一次项，得：

$$z+\Delta z=f(x_1,x_2\cdots\cdots x_n)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta_n$$

由此

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{1-13}$$

式中$\frac{\partial f}{\partial x}$是代表偏导数值，它是个常数。故(1-13)式可按(1-11)式得：

$$m_z^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2m_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2m_{x_2}^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2m_{x_n}^2 \tag{1-14}$$

即：一般函数之中误差的平方，等于该函数按每个观测值所求的偏导数值与相应观测值中误差之乘积的平方和。

公式(1-14)适用于任意函数。从公式(1-14)的推导过程中可以总结出应用误差传播定律时的三个步骤：

1. 写出函数式。如 $z=f(x_1,x_2\cdots\cdots x_n)$；
2. 写出真误差的关系式。此时，只要对函数 z 进行全微分，即

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

把微分 dx 等看成真误差，即可得出如(1-13)式所示的真误差关系式；

3. 换成中误差的关系式。即是将偏导数值平方，把微分换成中误差平方即得

$$m_z^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2m_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2m_{x_2}^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2m_{x_n}^2$$

五、一些独立误差的联合影响

在测量工作中，常遇到一个观测结果同时受许多独立误差的联合影响。例如照准误差、读数误差、目标偏心误差对测角的影响，这样，它们的中误差关系式为

$$m_z^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots\cdots + m_n^2 \tag{1-15}$$

即：一些独立误差引起的观测值的中误差之平方m_z^2，等于各独立误差对观测结果所产生之各中误差的平方和。

在应用上述的误差传播定律时，观测值必须是互相独立的，而且仅考虑偶然误差。

§1-6　算术平均值和带权算术平均值原理

如果我们对同一量进行了n次等精度观测，并且由这些观测值求算术平均值，则当观测次数n无限地增加时，算术平均值就趋近于该量的真值。因此在等精度直接观测平差中，取算术平均值作为该量的最或是值。这就是算术平均值原理。

设某一量的n次等精度观测的结果为l_1、l_2、$l_3\cdots\cdots l_n$，则其算术平均值L即为：

$$L = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \cdots\cdots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \tag{1-16}$$

在等精度直接观测平差时，由于取算术平均值为最或是值，故其改正数的总和应等于零，即

$$[v] = 0 \tag{1-17}$$

这就是算术平均值的特性。

若对同一量进行数组观测，而各组的观测精度不相同，这样，其各观测组之间就成了非等精度的观测。用非等精度的观测来确定某量的最或是值时，就必须考虑权的问题。带权计算出的最或是值，就称为带权平均值（或称广义算术平均值）。以下式表示之：

$$L = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + \cdots\cdots P_n l_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots P_n} = \frac{[Pl]}{[P]} \tag{1-18}$$

式中P_i为各观测组的权；l_i为各组观测之平均值；L称为带权平均值。

§1-7　权的意义及确定权的方法

对同一量作非等精度观测时，各观测值的精度不同，如果各观测值之间的精确程度能用一个比例系数表示出来，此系数即为该观测值的权。权常以P表示，而各观测值的权和中误差的关系是：权与中误差的平方成反比，以下式表示：

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} \tag{1-19}$$

由此可见，权可以表示观测值之间的相对精度。观测值的精度愈高，中误差就愈小，其权则愈大。

(1-19)式是确定权最基本的方法，可以适用于所有情况。式中i代表1、2、3……；m_i为中误差；μ仅起一个比例常数的作用，因此，它的值可以任意选定。当各观测值的中误差m_i为已知时，只要μ值一经选定，其相应的权P_i也就确定了。对于同一组P值，只能选一个μ值，否则权之间的比例关系就破坏了。

确定权的方法很多，常用的有以下几种：

一、根据中误差确定权

由权与中误差平方成反比的定义，$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$，即得各观测值的权与中误差之间的关系为：

$$P_1:P_2:\cdots\cdots:P_n=\frac{1}{m_1^2}:\frac{1}{m_2^2}:\cdots\cdots:\frac{1}{m_n^2}$$

或

$$P_1m_1^2=P_2m_2^2=\cdots\cdots=P_nm_n^2=\mu^2 \tag{1-20}$$

现举例说明根据中误差确定权的方法。

例：对某一个角作两组观测，各组所用的仪器不同，第一组进行四次观测的平均值 $l_1=38°50'40''$，每次观测的中误差为$\pm20''$；第二组进行九次观测的平均值 $l_2=38°50'20''$，每次观测的中误差为$\pm15''$，试求各组观测值的权。

解：因为两组观测的中误差不同，l_1 的中误差为 $m_1=\pm\frac{20''}{\sqrt{4}}=\pm10''$，$l_2$ 的中误差为 $m_2=\pm\frac{15''}{\sqrt{9}}=\pm5''$。其相应的权按式(1-19)算得为：

$$P_1=\frac{\mu^2}{m_1^2}=\left(\frac{\mu}{10}\right)^2$$

$$P_2=\frac{\mu^2}{m_2^2}=\left(\frac{\mu}{5}\right)^2$$

如选定 $\mu=10$，则 $P_1=1, P_2=4$。

例中选取 $\mu=m_1$，得 $P_1=1$。这就是相当于以 l_1 的权为"比重"单位。故通常称等于 1 的权为单位权，权为 1 的观测值为单位权观测，对应于权等于 1 的中误差称为单位权中误差。以后各种计算我们均用 μ 代表单位权中误差。

二、根据观测次数确定权

若对某量进行两组（或 n 组）观测，两组中每次观测的精度均相同，但各组测量的次数不同，则观测值的权与观测次数成正比。根据这一定义，可列出权与观测次数的关系式如下：

$$P_i=n_iC \tag{1-21}$$

式中 n_i 为每组观测次数；C 为可任意选择的常数。

例：对某一角度作两组观测，第一组测 4 测回，第二组测 2 测回，设每一测回的观测值中误差均相同，试求各组的权。

解：由公式(1-21)知，并令 $C=\frac{1}{2}$，得

$$P_1=n_1C=4\times\frac{1}{2}=2, \qquad P_2=n_2C=2\times\frac{1}{2}=1$$

三、根据测站数确定权

1. 在水准测量中，当各测站的观测精度大致相同时，则各条水准路线高差（或观测高程）的权与各条水准路线的测站数成反比。用公式表示为：

$$P_i=\frac{C}{N_i} \tag{1-22}$$

式中 C 为可选择的常数，C 值的选择，以计算方便为原则，一般选用 1、10、100 等；N_i 为各条水准路线的测站数。

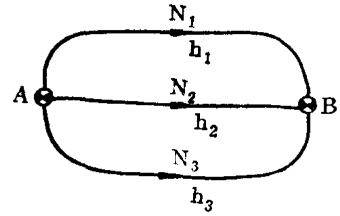

图 1-3

例：沿三条路线测定二点间的高差，如图 1-3 所示。其中

$h_1=1.356$ 米，　$N_1=40$ 个测站；

$h_2=1.362$ 米，　$N_2=25$ 个测站；

$$h_3=1.369 \text{米}, \qquad N_3=50 \text{个测站。}$$

试求其权？

解：按(1-22)式，并选定 $C=100$，则得：

$$P_1=\frac{100}{40}=2.5, \qquad P_2=\frac{100}{25}=4, \qquad P_3=\frac{100}{50}=2$$

从例中可见，选定 $C=100$，就相当于以 100 个测站的观测高差的权为单位权；因为此时 $P_{100\text{站}}=\frac{100}{100}=1$。故通常说"以$N$个站为单位权"。

2. 在导线测量中，当各转折角的观测精度相同时，某导线边方位角值的权与推算它时所经的转折角个数成反比。用公式表示：

$$P_i=\frac{C}{N_i} \tag{1-23}$$

此式在形式上与(1-22)式相同，但此式中的 N_i 为各条线路的转折角数。

四、根据距离确定权

1. 在水准测量中，当每公里的测站数大致相等时，可认为每公里观测高差的精度是相同的。所以各条水准路线观测高差的中误差与其距离的平方根成正比，而各条水准路线观测高差的权与各条水准路线的距离成反比。用公式表示为：

$$P_i=\frac{C}{S_i} \tag{1-24}$$

式中　S_i 代表各条水准路线的距离，通常以公里为单位。

例：已知三条水准路线的距离分别为 $S_1=4$ 公里，$S_2=2.5$ 公里，$S_3=5$ 公里，试求其权？

解：按(1-24)式，并选定 $C=10$，则得：

$$P_1=\frac{10}{4}=2.5 \qquad P_2=\frac{10}{2.5}=4 \qquad P_3=\frac{10}{5}=2$$

从例中可见，选定 $C=10$，就是以距离为 10 公里的观测高差的权为单位权。因为此时 $P_{10\text{公里}}=\frac{10}{10}=1$，故通常说"以$S$公里为单位权"。

至于什么情况用距离S确定权，什么情况用测站数N确定权，一般说来，在起伏不大的地区，因其每公里的测站数相差不大，故采用距离S来确定权；而在起伏大的地区，每公里的测站数相差较大，则按测站数N确定权。

2. 在导线测量中，当每公里丈量距离的精度相同时，则各条路线丈量距离的中误差与其距离的平方根成正比，故各条路线丈量距离的权应与之距离成反比。应用之公式和(1-24)式完全相同。

3. 在三角高程测量中，当各垂直角的观测精度相同时，则观测高差的权与该方向的距离的平方成反比。用公式表示为：

$$P_i=\frac{C}{S_i^2} \tag{1-25}$$

式中　C 仍为一任意选择的比例常数；S_i 为所观测方向的距离，以公里为单位。

§ 1-8　观测值的精度评定

在 § 1-4 中已谈到中误差是衡量观测精度的一种标准。由于观测种类的不同，故其中误差计算也不一样，加之未知量的真值和真误差往往不知道，所以用真误差来求得的观测值中误差的公式(1-3)在实际工作中很少应用。而是用改正数导出的公式来求观测值的中误差。下面将介绍用改正数来求中误差的各种公式。

一、等精度的直接观测平差时观测值中误差的计算公式

对某一量进行了一组直接观测，根据一组观测值就可以算出未知量的最或是值。因此，最或是值与观测值的差数（即改正数 v）是知道的。这样我们可以从真误差 Δ 与改正数的关系着手，并根据算术平均值的特性 $[v]=0$ 的原理及(1-3)公式，即能导出一个用改正数 v 计算观测值中误差的公式为

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{1-26}$$

上式称为白塞尔公式。式中 v 为改正数，n 为观测次数。

根据误差传播定律(1-11)式可推导出算术平均值的中误差公式为:

$$M=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \tag{1-27}$$

二、非等精度的直接观测平差时单位权中误差的计算公式

在等精度直接观测平差中，观测值的精度是相等的。由式(1-26)计算得的观测值中误差，也就是代表每个观测值的中误差了。而在非等精度观测平差中，每个观测值的精度不同，因此，不能用一个式子来代表所有观测值的中误差，而是先算出单位权中误差。单位权中误差的符号一般以 μ 表示。

用改正数来求非等精度直接观测平差时的单位权中误差公式为:

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[Pvv]}{n-1}} \tag{1-28}$$

式中 P 代表权；v 为改正数；n 为观测次数。

三、由三角形闭合差计算测角中误差

真误差是未知量的真值减去观测值。因此，真误差有时就成为已知数。例如平面三角形的闭合差就是真误差，以 w 表示之。依中误差的定义，三角形内角和的中误差为:

$$m_{\Sigma}=\pm\sqrt{\frac{[ww]}{n}} \tag{1-29}$$

由于内角和是三个观测角之和，所以每个角的测角中误差为:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[ww]}{3n}} \tag{1-30}$$

这就是菲列罗公式。该式仅用于测量平差前，由三角形闭合差来评定观测角度的精度。式中 $[ww]=w_1^2+w_2^2+\cdots\cdots w_n^2$ 为各三角形闭合差平方总和；n 为三角形个数。

四、等精度的间接观测平差时观测值中误差的计算公式

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-t}} \tag{1-31}$$

上式也称为白塞尔公式。式中 n 为观测值的个数，t 为未知数的个数。当 $t=1$ 时，就是直接观测平差时观测值中误差的公式(1-26)。

五、非等精度的间接观测平差时单位权中误差的计算公式

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[Pvv]}{n-t}} \tag{1-32}$$

上式中$[Pvv]$的计算一般可用下面两种方法:

1. 将求得的未知数，代入误差方程式，求出各观测值的改正数后，将各改正数自乘，然后乘以相应的权，再取总和即得$[Pvv]$。

2. 利用法方程式在高斯—杜立特表中约化来求$[Pvv]$。其约化结果得

$$[Pvv]=[Pll]-\frac{[Pal]^2}{[Paa]}-\frac{[Pbl\cdot1]^2}{[Pbb\cdot1]}-\frac{[Pcl\cdot2]^2}{[Pcc\cdot2]}-\cdots\cdots$$

等精度观测时，$[vv]$的计算亦可参照此法进行。

六、等精度的条件观测平差时观测值中误差的计算公式

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} \tag{1-33}$$

式中　r 为条件数。

七、非等精度的条件观测平差时单位权中误差的计算公式

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[Pvv]}{r}} \tag{1-34}$$

这里应该指出，当观测值的权都等于 1 时，上式就可写为

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} \tag{1-35}$$

此式与(1-33)式是通用的。故在一些书籍中常称(1-35)式为观测值中误差，或称测角中误差，或称单位权中误差等等叫法不一。本手册以后各章在应用(1-35)式时，均称 μ 为单位权中误差。

公式(1-34)中$[Pvv]$的计算可用下面几种方法:

1. 将求得的改正数自乘后，乘以相应的权，再取总和即得。

2. 将每个条件方程式的不符值乘以法方程式 k_i 系数，然后相加取负号。

$$[Pvv]=-w_ak_a-w_bk_b-w_ck_c-\cdots\cdots-w_rk_r=-[wk]$$

3. 利用法方程式在高斯—杜立特表中约化来求$[Pvv]$。其约化结果得

$$-[Pvv]=-\frac{w_a^2}{\left[\frac{aa}{P}\right]}-\frac{[w_b\cdot1]^2}{\left[\frac{bb}{P}\cdot1\right]}-\frac{[w_c\cdot2]^2}{\left[\frac{cc}{P}\cdot2\right]}-\cdots\cdots$$

等精度观测时，$[vv]$的计算亦可参照此法进行。