136

2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书

概率论与数理统计

复习指导与典型例题分析

姚孟臣　编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计：复习指导与典型例题分析/姚孟臣编著. －北京：机械工业出版社，2002.4
(2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书)
ISBN 7-111-10055-7

Ⅰ.概… Ⅱ.姚… Ⅲ.①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料 ②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第013480号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037）
责任编辑：马海宽
北京忠信诚印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002年4月第1版·2002年5月第2次印刷
787mm×1092mm 1/16·15.5印张
定价：25.00元

出版前言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“本科生题库”、“考研复习指导与典型例题分析”等共 16 本将陆序面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士研究生的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在“考研题库”中，包括《高等数学习题集（提高篇）》、《微积分习题集（提高篇）》、《线性代数习题集（提高篇）》、《概率论与数理统计习题集（提高篇）》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

“复习指导与典型例题分析”同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

“本科生题库”包括《高等数学习题集（基础篇）》、《微积分习题集（基础篇）》、《线性代数习题集（基础篇）》、《概率论与数理统计习题集（基础篇）》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，便掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士研究生的考生开

拓思路,更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法,培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力,并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心,以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们,感谢他们付出的辛勤劳动。同时,欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002 年 3 月

目录

复 习 导 论

“概率论与数理统计”是全国硕士研究生入学数学考试的一个重要组成部分.从研究必然问题到处理随机问题,不仅大多数初学者感到比较困难,对于曾经学过概率论与数理统计的广大考生来说也觉得问题不少,特别是在做习题以及解决实际应用方面遇到的困难会更多一些.从近几年硕士研究生入学的数学考试阅卷结果也可以看出这部分试题得分率普遍较低,有些考生甚至完全放弃这部分试题.特别是2001年理工类考生在概率论与数理统计的两个大题上的得分率远远低于经济类考生.出现这种情况有两方面的原因:一是由于他们根据前几年的试题分析,错误的认为理工类的概率论与数理统计的要求低于经济类考生,而忽略了近两、三年以来大纲的变化;二是没有结合概率论与数理统计自身的特点,进行有针对性的复习.

“概率论与数理统计”的复习不同于“微积分”与“线性代数”.在概率论中,对于基本概念的深入理解是十分重要的,而解题的方法与技巧并不多.因此,首先应根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关“概率论与数理统计”的要求进行再学习,对于每一部分的“基本内容与重要结论”要重点掌握,而不要急忙做一些较难的题目.第二,学会题目的分析.对于每一部分的“典型例题”中的每个题目(在没有看解答之前)按以下的四步进行分析:

(1) 阅读题目,正确理解题意(即题设是什么,要求是什么);

(2) 分析题目,确定其主要考核知识点(即考的是哪些内容);

(3) 选择适当的方法与技巧;

(4) 考虑解答题的解题格式及关键步骤.

然后和“典型例题”解答作比较,找出自己的不足之处.第三,完成一定量的习题.我们认为完成的方法有两种:一看,二做.所谓“看”是按照上边的四步去“看”那些比较简单、“会做”的题目,这样我们可以用较少的时间复习较多的题目;所谓“做”则是选择“自测练习题”中那些比较难、“不会做”的题目认真地完成.

在“概率论与数理统计”复习之前,我们还需要掌握“二值集合”、“组合分析中的几个定理”、“微积分”和“随机现象及其统计规律”等内容,下面将有关内容作一简单介绍:

一、二值集合

集合是一个不能给出数学定义的概念,尽管如此,我们仍然可以给它一个定性描述.所谓集合就是按照某些规定能够识别的一些具体对象或事物的全体.构成集合的每一个对象或事物叫做集合的元素.

通常集合用大写字母 A,B,C 表示,其元素用小写字母 a,b,c 表示.

设 A 是一个集合,如果 a 是 A 的元素,记作 $a\in A$,用"1"表示这一隶属关系;如果 a 不是 A 的元素,记作 $a\overline{\in}A$(或 $a\notin A$),用"0"表示这一隶属关系.

因此,我们称这种集合为"二值集合",在初等概率论中,我们只研究这样的集合.

有关二值集合的表示方法、基本性质在初等数学中已作过详细讨论,这里不再重复.下面仅就集合的"相等"与"等价"概念以及集合分类情况作一简单介绍.

例 1 设 $A=\{2,4,8\}$,则集合 A 的所有子集是$\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{2,4\}$, $\{2,8\}$, $\{4,8\}$, $\{2,4,8\}$.注意,在考虑集合 A 的所有子集时,不要把空集$\varnothing$和它本身忘掉.

设 A,B 是两个集合.如果 $A\subset B$, $B\subset A$,那么称集合 A 与 B **相等**,记作

$$A=B.$$

很明显,含有相同元素的两个集合相等.

例 2 设 $A=\{0,2,3\}$, $B=\{x\mid x$ 为方程 $x^3-5x^2+6x=0$ 的解$\}$,则 $A=B$.

设 A,B 是两个集合.如果 B 的每一个元素对应于 A 的惟一的元素,反之 A 的每一个元素对应于 B 的惟一的元素,那么就说在 A 和 B 的元素之间建立了一一对应关系,并称 A 与 B **等价**,记作

$$A\sim B.$$

与自然数集 $\mathbf{N}$ 等价的任何集合,称为**可列集**.显然,一切可列集彼此都是等价的.今后我们常称这类集合中元素的个数为可列个(或可数个),并把有限个或可列个统称为**至多可列个**(或**至多可数个**).

例 3 设 $A=\{a\mid a=2n, n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{b\mid b=n^2+1, n\in\mathbf{N}\}$,则 $A\sim B$.

由上面的讨论可以看出,集合**分类**如下:

$$\text{集合}\begin{cases}\text{有限集}\\ \text{无限集}\begin{cases}\text{可列集}\\ \text{不可列集}\end{cases}\end{cases}$$

二、组合分析中的几个定理

1. 加法原理

定理 1 设完成一件事有 n 类方法,只要选择任何一类中的一种方法,这件事就可以完成.若第一类方法有 m_1 种,第二类方法有 m_2 种,……,第 n 类方法有 m_n 种,并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法里,任何两种方法都不相同,则完成这件事就有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.

2. 乘法原理

定理 2 设完成一件事有 n 个步骤,第一步有 m_1 种方法,第二步有 m_2 种方法,……第 n 步有 m_n 种方法,并且完成这件事必须经过每一步,则完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法.

3. 排列

定义 从 n 个不同元素中,每次取出 m 个元素,按照一定顺序排成一列,称为从 n 个元素中每次取出 m 个元素的排列.

定理 3 从 n 个不同元素中,有放回地逐一取出 m 个元素进行排列(简称为可重复排列),共有 n^m 种不同的排列.

例 1 从 10 件产品(其中 2 件次品,8 件正品)中每次取 1 件观测后放回,共取 3 次(以后简称为有放回地取 3 件).求这 3 件产品中

(1) 恰有 2 件次品的排列数;

(2) 至多有 1 件次品的排列数.

解 (1) 这是一个可重复的排列问题.由定理 1 及定理 2,可知其排列数为 $3\times2^2\times8=96$;

(2) “至多有 1 件次品”可分为“恰有 1 件次品”与“没有次品”两种情况,由定理 1 及定理 3,可以得到其排列数为 $3\times2\times8^2+8^3=896$.

定理 4 从 n 个不同元素中,无放回地取出 m 个($m\leqslant n$)元素进行排列(简称为选排列)共有

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

种不同的排列.选排列的种数用 A_n^m(或 P_n^m)表示,即

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!},$$

特别地,当 $m=n$ 时的排列(简称为全排列)共有

$$n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

种不同排列.全排列的种数用 P_n(或 A_n^n)表示,即

$$P_n = n!,$$

并规定 $0! = 1$.

4. 组合

定义 从 n 个不同元素中,每次取出 m 个元素不考虑其先后顺序作为一组,称为从 n 个元素中每次取出 m 个元素的组合.

定理 5 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合(简称为一般组合)共有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

种不同的组合.一般组合的组合种数用 C_n^m(或$\binom{n}{m}$)表示,即

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

并且规定 $C_n^0 = 1$.不难看出

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

定理 6 从不同的 k 类元素中,取出 m 个元素.从第 1 类 n_1 个不同元素中取出 m_1 个,从第 2 类 n_2 个不同的元素中取出 m_2 个,……,第 k 类 n_k 个不同的元素中取出 m_k 个,并且 $n_i \geqslant m_i > 0(i = 1,2,\cdots,k)$(简称为不同类元素的组合),共有

$$C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \cdots C_{n_k}^{m_k} = \prod_{i=1}^{k} C_{n_i}^{m_i}$$

种不同取法.

例 2 从 10 件产品(其中 2 件次品,8 件正品)之中任取 3 件,求这 3 件产品中

(1) 恰有 2 件次品的组合数;

(2) 至多有 1 件次品的组合数.

解 (1) 这是一个不同类元素组合问题.由定理 6 可知,其组合数为 $C_2^2 C_8^1 = 8$;

(2)“至多有 1 件次品”可分为“恰有 1 件次品”与“没有次品”两种情况,由定理 1 及定理 6 可以得到其组合数为 $C_2^1 C_8^2 + C_2^0 C_8^3 = 112$.

三、微积分

概率论可以分为“高等概率论”与“初等概率论”.初等概率论是建立在排列组合和微积分

等数学方法的基础上的.全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中的“概率论”就是初等概率论.

微积分作为初等概率论的基础知识,除了我们已经比较了解的“函数、极限、连续、可导、可积”等概念之外,还应了解下面的有关概念.

1. 可求积与不可求积

在微积分中,求不定积分与求导数有很大不同,我们知道任何初等函数的导数仍为初等函数,而许多初等函数的不定积分,例如

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{1}{\ln x}dx,$$

$$\int \sin x^2 dx,\quad \int \sqrt{1+x^3}dx$$

等,虽然它们的被积函数的表达式都很简单,但在初等函数的范围内却积不出来.这不是因为积分方法不够,而是由于被积函数的原函数不是初等函数的缘故.我们称这种函数是“**不可求积**”的.因此我们可以将函数划分为:

函数
- 可积
  - 可求积
  - 不可求积
- 不可积

在初等概率论中,正态分布密度函数就是属于可积而不可求积的一类函数.

2. 绝对收敛

1) 任意项级数的绝对收敛

所谓任意项级数是指级数的各项可以随意地取正数、负数或零.下面给出绝对收敛与条件收敛两个概念.

定义 若任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的各项取绝对值所成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**绝对收敛的**;若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**条件收敛的**.

例如,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 是收敛的,但各项取绝对值所成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的,因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 是条件收敛.又如,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ 各项取绝对值所成级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right| = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

是收敛的,因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ 是绝对收敛的.

定理 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛.

证明 令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) = \begin{cases} u_n & (u_n \geqslant 0), \\ 0 & (u_n < 0) \end{cases} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

于是

$$|u_n| \geqslant v_n \geqslant 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,根据正项级数的比较判别法,可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是收敛的.

考虑到

$$u_n = 2v_n - |u_n|,$$

根据级数的基本性质,可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也是收敛的.

根据上面的定理,判断任意一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性,可以先判断它是否绝对收敛.如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.这样一来,我们可以借助于正项级数的判别法来判断任意项级数的敛散性了.但是,当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散时,不能由此推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

在初等概率论中,我们将用绝对收敛这一概念来给出离散型随机变量均值的定义.

2) 无穷积分的绝对收敛

定义 如果函数 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a,b](b>a)$ 上可积,并且积分

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛,那么,我们称积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

是绝对收敛的.此时,我们也称函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上**绝对可积**.

定理 若积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.

上面的定理的逆定理并不成立,也就是说,从 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性,不能推出 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 也收敛,例如,积分

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

是收敛的，但是积分

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d}x$$

却发散. 这一点与定积分不同，对于定积分，从$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 的存在性，必能推出$\int_{a}^{b} |f(x)|\mathrm{d}x$ 存在.

定积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而积分$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散时，则称积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为**条件收敛**的. 例如积分$\int_{a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是条件收敛的.

在初等概率论中，我们将用绝对可积这一概念来给出连续型随机变量均值的定义.

四、随机现象及其统计规律

在客观世界中存在着两类不同的现象：确定性现象和随机现象.

在一定条件下，某种结果必定发生或必定不发生的现象称为确定性现象. 这类现象的一个共同点是：事先可以断定其结果.

在一定条件下，具有多种可能发生的结果的现象称为随机现象. 这类现象的一个共同点是：事先不能预言多种可能结果中究竟出现哪一种.

一般来说，随机现象具有两重性：表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性. 随机现象的偶然性又称为它的随机性. 在一次实验或观察中，结果的不确定性就是随机现象随机性的一面；在相同的条件下进行大量重复实验或观察时呈现出来的规律性是随机现象必然性的一面，称随机现象的必然性为**统计规律性**.

第一章　随机事件和概率

一、考试大纲要求

1) 理解随机试验,样本空间和随机事件的概念,掌握随机事件间的关系及运算.

2) 理解概率的定义,掌握概率的基本性质,能使用古典概型和几何概型计算有关事件的概率,能利用概率基本性质计算随机事件的概率.

3) 理解条件概率的概念,掌握概率的乘法公式.

4) 掌握全概率公式和贝叶斯公式,能计算较复杂随机事件的概率.

5) 理解随机事件独立性的概念,能应用事件独立性进行概率计算.

6) 理解随机试验独立性的概念,掌握 n 重伯努利试验中有关随机事件的概率计算.

二、基本内容与重要结论

1.1　样本空间与随机事件

具有下列三个特征的试验称为**随机试验 E**:

(1) 在相同的条件下,试验可以重复地进行;

(2) 试验的结果不止一种,而且事先可以确知试验的所有结果;

(3) 在进行试验前不能确定出现哪一个结果.

称试验的结果为**基本事件**或样本点,用 ω 表示;由全体基本事件构成的集合为**基本事件空间**或样本空间,记为 Ω.

在随机试验中,把一次试验中可能出现也可能不出现,而在重复独立试验中具有某种统计规律性的样本空间的一个子集称为**随机事件**(简称**事件**).所谓一个随机事件 A 发生当且仅当 A 的一个样本点 ω 发生.

通常把**必然事件**(记为 Ω)和**不可能事件**(记为$\varnothing$)看作特殊的随机事件.

1.2　事件的关系与运算

1．随机事件之间的关系及运算：

(1) 包含关系　如果事件 A 发生则事件 B 一定发生，即属于事件 A 的每一样本点都属于事件 B，称事件 B **包含**事件 A，记为：$B \supset A$.

(2) 相等关系　如果事件 A 和事件 B 满足 $A \supset B$ 和 $B \supset A$，即事件 A 和事件 B 同时发生和不发生，称事件 A, B **相等**，记为 $A = B$.

(3) 互不相容　如果事件 A 和 B 不能同时发生，即它们的积事件是不可能事件，称事件 A 与 B **互不相容**(或**互斥**)，记为 $AB = \varnothing$.

(4) 互逆　如果事件 A 发生必然导致事件 B 不发生，反之亦然，称事件 A 和 B **互逆**(或**互余**)，此时称 B 是 A 的**逆事件**，记为 $B = \overline{A}$.

(5) 事件的和　"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与 B 的**和事件**(或**并事件**)，记为 $A \cup B$(或 $A + B$)．它可推广到 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(6) 事件的积　"事件 A 和 B 同时发生"的事件称为事件 A 与 B 的**积事件**(或**交事件**)，记为 $A \cap B$(或 AB)．它可推广到 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(7) 事件的差　"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A - B$(或 $A\overline{B}$).

2．事件运算的满足规则：

(1) $A + B = B + A$(交换律)；

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$(结合律)；

(3) $A + A = A$；　　(4) $A + \overline{A} = \Omega$；

(5) $AB = BA$(交换律)；　　(6) $(AB)C = A(BC)$(结合律)；

(7) $AA = A$；　　(8) $A\overline{A} = \varnothing$；

(9) $A(B + C) = AB + AC$(分配律)；

(10) $A + BC = (A + B)(A + C)$(分配律)；

(11) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$　(德·摩根律一)；

(12) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$　(德·摩根律二).

1.3 概率和条件概率的定义

1. 概率的古典定义

我们把具有:(1) 试验的结果总数是有限的;(2) 每个试验结果出现的可能性是相同的这两个特点的随机试验称为**古典型试验**.

定义 在古典型试验中,随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

其中 n 为 Ω 中包含的基本事件总数,m 为事件 A 中包含的基本事件数.由关系式(1-1)计算事件概率的数学模型称为**古典概型**.

2. 概率的几何定义

我们把具有:(1) 试验的结果是无限且不可数的;(2) 每个试验结果出现的可能性是均匀的,这两个特点的随机试验称为**几何型试验**.

定义 在几何概型随机试验中,如果 Ω 中的所有基本事件可以用一个有界闭区域来描述,而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件,那么随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)} \tag{1-2}$$

其中,$L(\Omega)$和 $L(A)$分别为 Ω 和 A 的几何测度,由关系式(1-2)计算事件概率的数学模型称为**几何概型**.

3. 概率的统计定义

独立地重复进行 n 次随机试验,设随机事件 A 发生的次数为 m,称 $f_n=\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

定义 在 n 次重复独立试验中,事件 A 发生的频率具有稳定性,即它在某一数 p 附近摆动,而且,一般来说当 n 越大时,摆动幅度越小,则定义数值 p 为事件 A 发生的概率,即 $P(A)=p$.

4. 概率的公理化定义

定义 设 E 是一个随机试验,Ω 为它的样本空间,以 E 中所有随机事件组成的集合 $\mathscr{F}$ 为定义域,对于任一随机事件 A,规定一个实值函数 $P(A)$,$A\in\mathscr{F}$ 如果 $P(A)$满足下列三个公理:

(1) (非负性)$P(A)\geqslant 0$;

(2) (规范性)$P(\Omega)=1$;

(3) (可列可加性)如果事件 $A_1,A_2,\cdots$互不相容,那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$是事件 A 的概率.

5. 条件概率的定义

设 A 与B 是两个随机事件,其中 $P(B)>0$,规定

$$P(A \mid B) = P(AB)/P(B)$$

为在事件 B 发生的条件下事件A 发生的**条件概率**.

在同一条件下,条件概率具有概率的一切性质.

1.4　概率的计算公式

利用概率的公理化定义可推出下列概率计算公式:

1. 加法公式

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

一般地

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1 \cdots A_n)$$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (\text{有限可加性})$$

2. 乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$$

当 A, B, C 相互独立时,$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

3. 求逆公式

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

4. 求差公式

$$P(A-B) = P(A) - P(AB)$$

特别,当 $B \subset A$ 时,有 $P(A-B) = P(A) - P(B)$.