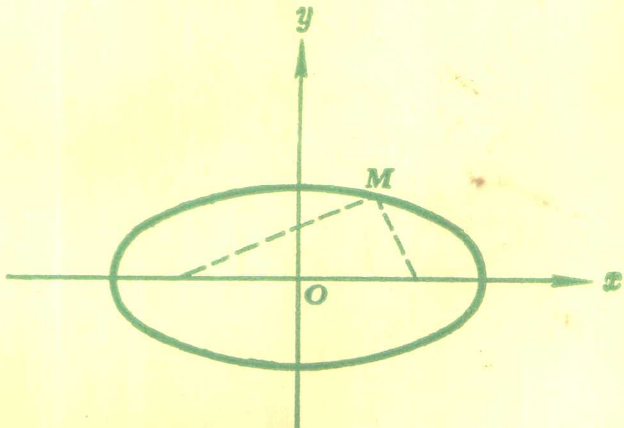
六年制重点中学高中数学课本

代数与几何

DAISHU YU JIHE

第二册



人民教育出版社

六年制重点中学高中数学课本
（试 用 本）
代 数 与 几 何
第 二 册
人民教育出版社数学室编

人民教育出版社出版
北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京印刷三厂印刷

1983年12月第1版　1985年6月第2次印刷
书号 K7012·0551　　定价 0.36元

说明

一、本书是根据教育部颁发的《全日制六年制重点中学教学计划试行草案》编写的，供六年制重点中学高中三年级第二类型使用，每周三课时.

二、本书内容包括：圆锥曲线(续)、复数、排列、组合、二项式定理、概率.

三、本书的习题共[redacted]习、习题和复习参考题.

1. 练习　主要供[redacted]

2. 习题　主要供[redacted]

3. 复习参考题　[redacted]识时使用.

为了因材施教，使教[redacted]性和灵活性，本书配备的练、习题和复习参考题数量多于通常学生所需的习题量，以便教学时根据实际情况选用.

四、本书由人民教育出版社数学室编写．参加编写工作的有曾宪源、李慧君、蔡上鹤、方明一、饶汉昌等．全书由吕学礼、孙福元校订.

目　录

第六章 圆锥曲线(续)

一 椭 圆

6.1 椭圆及其标准方程

椭圆是一种常见的曲线，如汽车油罐横截面的轮廓，天体中一些行星和卫星运行的轨道．在立体几何中画直观图时，圆的一种直观图也是椭圆．

取一条一定长的细绳，把它的两端固定在画图板上的 F_1 和 F_2 两点(图 6-1)，当绳长大于 F_1 和 F_2 的距离时，用铅笔尖把绳子拉紧，使笔尖在图板上慢慢移动，就可以画出一个椭圆．

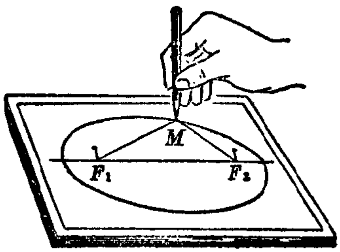


图 6-1

从上面的画图过程，我们可以看出，椭圆是由与点 F_1 和 F_2 的距离的和等于这条绳长的点组成的．

我们把平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做**椭圆**．这两个定点叫做椭圆的**焦点**，两焦点的距离叫做**焦距**．

根据椭圆的定义，我们来求椭圆的方程．

取过焦点 F_1、F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系(图 6-2)．

设 $M(x, y)$ 是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，

M与F_1和F_2的距离的和等于正常数$2a$，则F_1、F_2的坐标分别是$(-c, 0)$、$(c, 0)$.

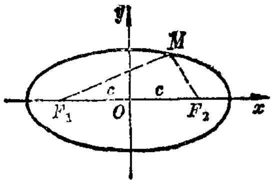


图 6-2

椭圆就是到两个定点F_1和F_2的距离的和等于$2a$的点M的集合

$$P=\{M \mid |MF_1|+|MF_2|=2a\}.$$

因为$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，所以点$M$所适合的条件可表示为

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

将这个方程移项，两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边再平方，得

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

整理得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

由椭圆定义可知，$2a>2c$，即$a>c$，所以$a^2-c^2>0$.

设$a^2-c^2=b^2(b>0)$，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

两边除以a^2b^2，得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).} \qquad (1)$$

这个方程叫做**椭圆的标准方程**．它所表示的椭圆的焦点

在 x 轴上，焦点是 $F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$，这里 $c^2=a^2-b^2$.

如果椭圆的焦点在 y 轴上，焦点是 $F_1(0, -c)$、$F_2(0, c)$(图 6-3)，只要将方程(1)的 x、y 互换，就可以得到它的方程. 这时方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0).$$

这个方程也是椭圆的标准方程.

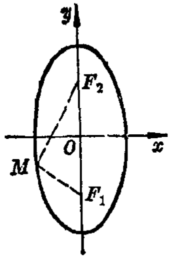


图 6-3

例 平面内两个定点的距离是 8，写出到这两个定点的距离的和是 10 的点的轨迹的方程.

解: 这个轨迹是一个椭圆，两个定点是焦点，用 F_1、F_2 表示. 取过点 F_1 和 F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴.

$\because \quad 2a=10, \ 2c=8,$

$\therefore \quad a=5, \ c=4.$

$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9, \ b=3.$

因此，这个椭圆的标准方程是

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1, \quad 即 \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

如果取过 F_1 和 F_2 的直线为 y 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴，则这个椭圆的标准方程是

$$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1.$$

练 习

1. 写出适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) $a=4, b=1$，焦点在 x 轴上；

(2) $a=4, c=\sqrt{15}$，焦点在 y 轴上；

(3) 两个焦点的坐标是 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$，并且经过点 $P\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

2. 已知 $\triangle ABC$ 的一边 BC 长为 6，周长为 16。求顶点 A 的轨迹方程。

6.2 椭圆的几何性质

我们根据椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0),$$

来研究椭圆的几何性质.

1. 范围

由标准方程可知，椭圆上点的坐标 (x, y) 都适合不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1, \qquad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

即 $$x^2\leqslant a^2, \qquad y^2\leqslant b^2,$$

$$\therefore\ |x|\leqslant a, \qquad |y|\leqslant b.$$

这说明椭圆位于直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形里(图 6-4).

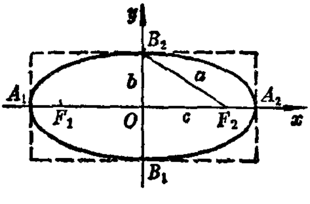


图 6-4

2. 对称性

在标准方程中，把 x 换成 $-x$；或把 y 换成 $-y$；或把 x、y

同时换成$-x$、$-y$时，方程都不变．所以图形关于y轴、x轴和原点都是对称的．这时，坐标轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心．椭圆的对称中心叫做椭圆的**中心**．

3．顶点

在标准方程中，令$x=0$，得$y=\pm b$．这说明$B_1(0,-b)$、$B_2(0,b)$是椭圆和y轴的两个交点．同理，令$y=0$时，得$x=\pm a$，$A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$是椭圆和x轴的两个交点．因为x轴、y轴是椭圆的对称轴，所以椭圆和它的对称轴有四个交点，这四个交点，叫做椭圆的**顶点**．

线段A_1A_2、B_1B_2分别叫做椭圆的**长轴**和**短轴**．它们的长分别等于$2a$和$2b$，a和b分别叫做椭圆的长半轴长和短半轴长．（注意：长轴总是在两个焦点所在的直线上．）

4．离心率

椭圆的焦距与长轴长的比$e=\frac{c}{a}$，叫做椭圆的**离心率**．

因为$a>c>0$，所以$0<e<1$．e越接近1，则c越接近a，从而$b=\sqrt{a^2-c^2}$越小，因此椭圆越扁；反之，e越接近于0，c越接近于0，从而b越接近于a，这时椭圆就接近于圆．

如果$a=b$，则$c=0$，两个焦点重合，这时椭圆的标准方程成为

$$x^2+y^2=a^2,$$

图形就是圆了．

例1　求椭圆$16x^2+25y^2=400$的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标，并用描点法画出它的图形．

解：把已知方程化成标准方程

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$$

这里，$a=5,\ b=4,\ c=\sqrt{25-16}=3$.

因此，椭圆的长轴和短轴的长分别是 $2a=10$ 和 $2b=8$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0.6$，椭圆的两个焦点分别是 $F_1(-3,0)$ 和 $F_2(3,0)$，四个顶点是 $A_1(-5,0)$、$A_2(5,0)$、$B_1(0,-4)$和 $B_2(0,4)$.

将已知方程变形为 $y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$. 在第一象限 $x\leqslant 5$ 的范围内根据

$$y=+\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2},$$

算出几个点的坐标(x,y)：

x	0	1	2	3	4	5
y	4	3.9	3.7	3.2	2.4	0

先描点画出椭圆在第一象限内的图形，再利用椭圆的对称性就画出整个椭圆(图 6-5)。

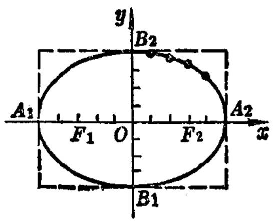


图 6-5

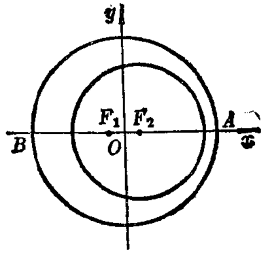


图 6-6

例 2 我国发射的第一颗人造地球卫星的运行轨道，是以地球的中心为一个焦点的椭圆，近地点 A 距地面 439 公里，远地点 B 距地面 2384 公里，地球半径约为 6371 公里．求卫星的轨道方程．

解：选取坐标系如图 6-6，点 F_2 为地球中心，于是

$$a-c=|OA|-|OF_2|=|F_2A|=6371+439=6810,$$

$$a+c=|OB|+|OF_2|=|F_2B|=6371+2384=8755.$$

解得

$$a=7782.5,\quad c=972.5.$$

$$\therefore\quad b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a+c)(a-c)}=\sqrt{8755\times 6810}$$
$$=7721.5.$$

因此，卫星的轨道方程(近似)是

$$\frac{x^2}{7783^2}+\frac{y^2}{7722^2}=1.$$

例 3 点 $M(x,y)$ 与定点 $F(c,0)$ 的距离和它到定直线 l：$x=\frac{a^2}{c}$ 的距离的比是常数 $\frac{c}{a}$ $(a>c>0)$．求点 M 的轨迹（图 6-7）．

解：设 d 是点 M 到直线 l 的距离．根据题意，所求轨迹就是集合

$$P=\left\{M\left|\frac{|MF|}{d}=\frac{c}{a}\right.\right\},$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|\frac{a^2}{c}-x\right|}=\frac{c}{a}.$$

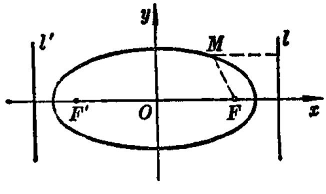


图 6-7

将上式化简，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

设 $a^2-c^2=b^2$，就可化成

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这是椭圆的标准方程，所以点M的轨迹是椭圆.

由上面的例子可知，点M与一个定点的距离和它到一条定直线的距离的比是常数 $e=\frac{c}{a}(e<1)$时，这个点的轨迹是椭圆. 定点是椭圆的焦点，定直线叫做椭圆的**准线**，常数e是椭圆的离心率.

对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，相应于焦点$F(c, 0)$的准线方程是$x=\frac{a^2}{c}$. 根据椭圆的对称性，相应于焦点$F'(-c, 0)$的准线方程是 $x=-\frac{a^2}{c}$，所以椭圆有两条准线.

练　习

1. 说出椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 的焦点和顶点的坐标。

2. 求下列各椭圆的长轴和短轴的长、离心率、焦点坐标、顶点坐标和准线方程，并画出草图：

(1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$;　　　　(2) $9x^2+y^2=81$;

(3) $x^2+4y^2=16$;　　　　(4) $2x^2=1-y^2$.

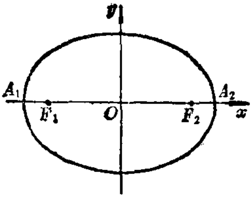
3. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) $a=6, e=\frac{1}{3}$, 焦点在 x 轴上;

(2) $c=3, e=\frac{3}{5}$, 焦点在 y 轴上。

习题十三

1. 如图，椭圆上的点中，A_1 与焦点 F_1 的距离最小，$|A_1F_1|=2$，A_2 与 F_1 的距离最大，$|A_2F_1|=14$，求椭圆的标准方程。



(第 1 题)

2. 已知椭圆的面积公式是 $S=\pi ab$，其中 a、b 分别是椭圆长半轴和短半轴的长。利用这个公式，求下列椭圆的面积:

   (1) $9x^2+y^2=8$;　　　(2) $9x^2+25y^2=100$.

3. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 上一点 $M_1(2.4, 4)$ 与焦点的距离。

4. 求适合下列条件的椭圆的标准方程:

   (1) 椭圆经过两点 $P(-2\sqrt{2}, 0)$、$Q(0, \sqrt{5})$;

   (2) 长轴是短轴的 3 倍，椭圆经过点 $P(3, 0)$;

   (3) 焦点坐标是 $(-2\sqrt{3}, 0)$ 和 $(2\sqrt{3}, 0)$，并且经过点 $P(\sqrt{5}, -\sqrt{6})$;

   (4) 离心率等于 0.8，焦距是 8.

5. 讨论下列椭圆的范围，并描点画出图形:

   (1) $4x^2+y^2=16$;　　　(2) $5x^2+9y^2=100$;

   (3) $2y^2=1-x^2$.

6. 我国发射的科学实验人造地球卫星的运行轨道是以地球的中心为一个焦点的椭圆，近地点距地面 266 公里，远地点距地面 1826 公里．求这颗卫星的轨道方程。

7. 彗星“紫金山一号”是南京天文台发现的．它的运行轨道是以太阳为一个焦点的椭圆．测得轨道的近日点距太阳中心 1.486 天文单位，远日点距太阳中心 5.563 天文单位（1 天文单位是太阳到地球的平均距离，约 1.5 亿公里），求椭圆的方程．

8. 已知地球运行的轨道是长半轴长 $a=1.50\times10^{8}\text{km}$，离心率 $e=0.0192$ 的椭圆．太阳在这个椭圆的一个焦点上．求地球到太阳最大和最小的距离。

9. 求下列椭圆的离心率：

(1) 从焦点看短轴两端点的视角为 $60°$；

(2) 从短轴的一个端点看两焦点的视角为直角．

10. 点 P 与一定点 $F(2,0)$ 的距离和它到一定直线 $x=8$ 的距离的比是 $1:2$．求点 P 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形。

11. 点 M 与椭圆 $\dfrac{x^2}{13^2}+\dfrac{y^2}{12^2}=1$ 的左焦点和右焦点的距离的比为 $2:3$．求点 M 的轨迹方程，并画出图形．

12. 已知直线和椭圆的方程如下，求它们的交点坐标：

(1) $3x+10y-25=0$, $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

(2) $3x-y+2=0$, $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

13. 求证两椭圆 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$, $a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2=0$ 的交点在以原点为中心的圆周上，并求这个圆的方程。

二 双曲线

6.3 双曲线及其标准方程

我们知道，与两定点的距离的和为常数的点的轨迹是椭圆，那么与两定点的距离的差为常数的点的轨迹又是怎样的曲线？这就是我们下面要讨论的问题.

平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离的差的绝对值是常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做**双曲线**. 这两个定点叫做双曲线的**焦点**，两焦点的距离叫做**焦距**.

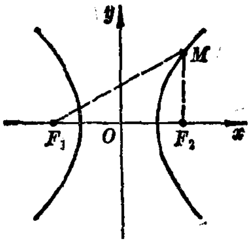


图 6-8

取过焦点 F_1、F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴(图 6-8).

设 $M(x, y)$ 是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距是 $2c$ $(c>0)$，那么，F_1、F_2 的坐标分别是 $(-c, 0)$、$(c, 0)$. 又设点 M 与 F_1 和 F_2 的距离的差的绝对值等于常数 $2a$.

由定义可知，双曲线就是集合

$$P=\{M \mid |MF_1|-|MF_2|=\pm 2a\},$$

$$\because \quad |MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

得方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

化简，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

由双曲线的定义，$2c>2a$，即 $c>a$，所以 $c^2-a^2>0$，设 $c^2-a^2=b^2(b>0)$，代入上式得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

也就是

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.} \tag{1}$$

这个方程叫做**双曲线的标准方程**，它所表示的双曲线的焦点在 x 轴上，焦点是 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，这里 $c^2=a^2+b^2$.

如果双曲线的焦点在 y 轴上(图 6-9)，焦点是 $F_1(0、-c)$、$F_2(0,c)$，只要将方程(1)的 x、y 互换，就可以得到它的方程．这时方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

这个方程也是双曲线的标准方程.

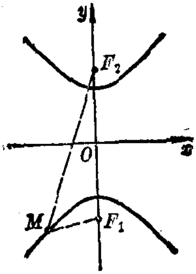


图 6-9

例 已知两点 $F_1(-5,0)$、$F_2(5,0)$，求与它们的距离的差的绝对值是 6 的点的轨迹方程.

解：按定义，所求点的轨迹是双曲线，因 $c=5$，$a=3$，所以

$$b^2=c^2-a^2=5^2-3^2=4^2,$$

因此所求方程是

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1,\quad 即\quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

练　习

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) $a=4, b=3$，焦点在 x 轴上；

(2) $a=2\sqrt{5}$，经过点 $A(2,-5)$，焦点在 y 轴上。

2. 求证：椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $x^2-15y^2=15$ 的焦点相同。

6.4　双曲线的几何性质

我们根据双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

来研究它的几何性质。

1. 范围

由标准方程可知，双曲线上点的坐标 (x,y)，都适合不等式 $\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$，即 $x^2\geqslant a^2$。

$$\therefore \qquad x\geqslant a \quad 或 \quad x\leqslant -a.$$

这说明双曲线在两条直线 $x=a, x=-a$ 的外侧。

2. 对称性

双曲线关于每个坐标轴和原点都是对称的。这时，坐标轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心。双曲线的对称中心叫做双曲线的**中心**。

3. 顶点

在标准方程中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，因此双曲线和 x 轴有两个交点 $A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$。令 $x=0$，得 $y^2=-b^2$，这个