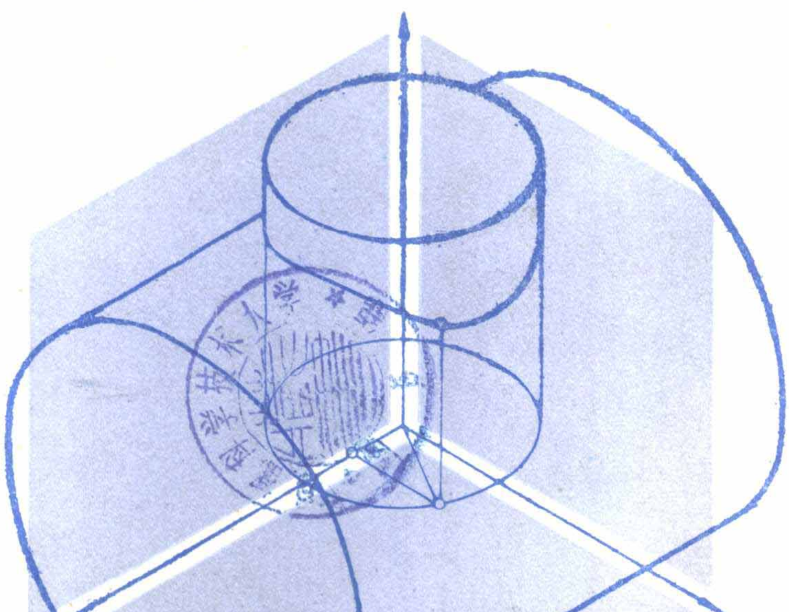
画法微分几何学

陈锦昌 编著



华南理工大学出版社

画法微分几何学

陈锦昌 编著

華南理工大學出版社

内 容 提 要

画法微分几何学是将图示图解法与分析法相结合，即应用微分几何学中的基本理论来解决画法几何学中的一些曲线、曲面的图示图解问题，使“形”与“数”有机结合的一门新的学科。本书系统地介绍了画法微分几何学的基本原理和方法。

本书分为四章，第一章绪论，复习映射和矢量代数；第二章曲线的画法微分几何；第三章曲面的画法微分几何；第四章可展曲面的画法微分几何。

本书可作为工程图学研究生开设“画法微分几何学”这一专业理论课程的教科书，也可作为工科院校高年级学生、研究生及数学系学生的“微分几何”课程参考书；同时也为制图教师、数学教师及工程技术人员从事这方面研究时提供参考。

画法微分几何学
陈锦昌　编著
责任编辑　张树元

华南理工大学出版社出版发行
（广州　五山）
各地新华书店经销
广东韶关新华印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 15.25　字数 338千
1990年6月第1版　1990年6月第1次印刷
印数 1—3 000
ISBN 7—5623—0145—X/O·13(课)
定价：3.05元

序

画法几何是以投影的方法，研究几何形体及其组合的投影表示及空间几何问题的投影图解表示，着眼于整体的投影性质；微分几何则以微分的方法研究曲线、曲面在一点邻近的几何性质，着眼于局部的微分性质，各有其特点。虽然两者的研究对象都是几何形体，但研究画法几何的都往往只关心几何形体的宏观表示，缺乏定量的分析和数式的表达，不利于计算机绘图；而研究微分几何的，则往往偏重微分性质的数式推导，不擅长于直观和准确的形状表达。画法微分几何作为这两门几何学科的边缘学科，扬长避短，把几何研究中的“形”和“数”结合起来，使得几何问题的解既有直观的投影表达，也有精确的数量分析，它的理论和实践给计算机辅助几何设计提供了强有力的工具，形成了几何学科的一个分支。

在奥地利、德国等不少国家，画法微分几何已被定为数学专业和画法几何专业硕士研究生的一门专业必修课，系统的专著有克鲁伯(E・Kruppa)著的《解析微分几何 和画法微分几何学》，不少画法几何书籍也有专门的章节介绍这方面的理论和应用。1984年 8月，奥地利维也纳工业大学几何教研室主任斯德高(H・Stachel)教授应邀来华南工学院(现华南理工大学)作了为期两周的“画法微分几何学”讲学，主持了我国画法几何方面一百多名学者的研讨班，把这门学科系统地介绍到我国来，促进了我国理论图学工作者对这个学科的学习与研究。

本书的编者当年曾参加上述研讨班的工作，其后用了近四年的时间，搜集了大量的资料，并对其中的一些问题作了较为深入的研究，写出本书，系统地介绍了画法微分几何这一学科的理论及其应用。我们希望，本书的出版对这门学科在我国的进一步普及将起到促进作用，对有志于此道者提供一本资料比较齐全的参考书。

叶秉钧

1988年5月于华南理工大学

前 言

几何学是一门古老的学科，它主要是从空间关系出发，研究物体的形状、大小以及它们相互之间的位置关系。几何学有许多的分支，它们形成各种各样的几何学，它们之间有一些是研究的对象不同，有一些是研究的工具不同。

微分几何学是应用微积分作工具研究三维空间的曲线和曲面在一点邻近的性质．即以无穷小分析的方法研究几何图形的性质。

画法几何学是应用图示的方法研究空间几何元素及其相对位置的表示，以及用几何作图法解决空间的几何问题。

科学技术的发展，各学科间的相互渗透，给每门学科以新的活力，促进了它们的发展。将画法几何与微分几何相结合，即将图示图解的方法与分析的方法相结合，也即使“形”和“数”的有机结合，给画法几何提供了一个发展的方向。画法微分几何学正是这样一个发展方向的产物。一方面它是应用微分几何的方法处理画法几何中的曲线、曲面问题，使画法几何问题得到更精确的定量分析，从而为画法几何的计算机求解和计算机绘图提供了条件；另一方面，它又给微分几何提供了准确的投影作图方法，使抽象的微分几何问题得到直观的表示。画法微分几何学兼有微分几何对曲线、曲面固有特性的分析、推导的特长和画法几何对曲线、曲面图示图解的特长，弥补了各自的不足。所以它是画法几何和微分几何研究和学习的有力工具。

目前，这个新学科的权威著作是克鲁伯(E·Kruppa)著的《解析微分几何和画法微分几何学》(1957年施普林格出版社德文版)。此外，国外关于本学科的系统论著还比较少。1984年8月奥地利维也纳工业大学几何教研室主任斯德高(H·Stachel)教授应邀在华南工学院(现华南理工大学)作了为时两周的“画法微分几何学”讲学，系统地介绍了该学科的理论和实例，对国内开展这方面的研究和开设这一工程图学研究生的专业理论课程起到很大的促进作用。目前，不少院校已开设了工程图学研究生的这一专业理论课．但国内缺乏系统地介绍画法微分几何学基本原理和方法的教材。为此特编写本书。

在本书的编写过程中，曾参考了斯德高教授来华讲学的讲义，大量的画法几何教科书、微分几何教科书，有关的译著和著作以及近年来许多学者在这方面的研究成果。对本书所参考的大量教材、文献和资料的编著者和作者在此一并致谢。

本书介绍了画法微分几何学的基本原理和方法，自成一个系统，并附有大量的图例。在叙述方法上力求深入浅出，书中大部分的章节都附有一定量的习题，用以复习巩固该章节的内容，书中打有＊号的节次可以不讲。

本书可作为工程图学研究生在开设“画法微分几何学”这门专业理论课程时的教科书，也可以作为工科院校高年级学生、研究生及数学系学生的“微分几何”课程参考书。同时，也为制图教师、数学教师及工程技术人员从事这方面研究提供参考。

本书对于具有空间解析几何及高等数学知识的读者都可顺利地阅读。

在本书编写过程中曾得到中国工程图学学会图学发展专业委员会委员、广东省工程图学学会副理事长叶秉钧教授的鼓励和支持，由区煦燊副教授审校全书，在此谨表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中谬误和不当之处，恳请读者指正。

编者

1988年2月

目　录

第一章 绪 论

§1.1 映 射

映射又叫做函数，它是一种特定类型的关系。现代数学中的许多重要概念都和映射密切相关。

1.1.1 映 射

设X和Y是任意的两个非空集合。如果有一个规则f，对集合X的每一个元素x都有集合Y的某一个唯一确定的元素$y=f(x)$与之对应，则这个对应规则f称为从集合X到集合Y的**映射**或叫做X到Y的**函数**。并记作

$$\begin{cases} f\colon X\to Y, \\ x\mapsto f(x) \end{cases} \qquad \text{或} \quad X\xrightarrow{f}Y$$

X称为f的**定义域**，Y称为f的**值域**，元素$y=f(x)$称为元素x的**象**，x称为**原象**。

如果f：$X\to Y$是一个映射，对于$x\in X$，x的象$f(x)\in Y$，一切这样的象作成Y的一个子集，用$f(X)$表示

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

称为映射f的象。

在映射f：$X\to Y$中，记映射f的定义域为D_f，象为R_f。由映射定义知：$D_f=X$，$R_f\subseteq Y$。两个映射f：$X\to Y$和g：$X\to Y$，如果它们的定义域相同，并且对定义域内的任何元素x均有$f(x)=g(x)$，则称这两个映射相等，记为：$f=g$。

例1.1.1 设R为实数的集合，$X=Y=R$，并设

f：$R\to R$，$f(x)=\{y\mid y=x^2\}$

g：$R\to R$，$g(x)=\{y\mid y^2=x\}$

则f是从X到Y的映射，但g不是一个映射，因为它不满足映射定义中的唯一性条件。

例1.1.2 设R是实数的集合，R^+是正实数的集合，Z是整数的集合，并设

f：$R\to R$，$f(x)=x^2$

g：$Z\to R$，$g(x)=x^2$

h：$R\to R^+$，$h(x)=x^2$

则映射f不等于g，因为它们有不同的定义域；映射f不等于h，因为它们有不同的值域。

1.1.2 满 射

如果映射f的象$R_f=Y$，则称f为**满射**或称f：$X\to Y$是集合X到集合Y上的映射。即f：$X\to Y$为满射，如果对每个$y\in Y$，必有一个$x\in X$，使$f(x)=y$。

例1.1.3 证明f：$R\to R$，$f(x)=x^3-1$为满射；g：$R\to R$，$g(x)=x^2-1$不是满射。

证明：设任意$y\in R_f=R$，有

$$y=x^3-1\text{。}$$

因为每个实数必有立方根，对每个y值，方程必有解$x=\sqrt[3]{y+1}$，所以f为满射。

在映射g中，设任意的$y\in R_f=R$，有

$$y=x^2-1,$$

但方程无解。因为若$y=-2$，则有$x^2=-1$而没有实数解。所以g不是满射。

证明一个映射是否满射可以利用方程解的存在性决定。

1.1.3 单　射

如果当$x_1\neq x_2$时，有$f(x_1)\neq f(x_2)$，或当$f(x_1)=f(x_2)$时，有$x_1=x_2$，则映射f称为**单射**。

例1.1.4 证明f：$R-\{0\}\to R-\{3\}$，$f(x)=3-\dfrac{1}{2x}$是单射。

证明：设$f(x_1)=f(x_2)$，则有方程

$$3-\frac{1}{2x_1}=3-\frac{1}{2x_2},$$

于是有$x_1=x_2$，由定义知，f为单射。

证明一个映射是否单射可以利用方程解的唯一性决定。

1.1.4 双　射

如果一个映射f同时为满射和单射时，则称为**双射**。它建立了集合X和Y元素之间的一一对应。

例1.1.3中的映射f和例1.1.4中的映射f都是双射。

如果$X=Y$，存在一个从X的任一元素x到它自身的映射，即$f(x)=x$，则f称为**恒等映射**。恒等映射是一个双射。

1.1.5 逆映射

若映射f：$X\to Y$是双射，则g：$Y\to X$为f的**逆映射**。即$g(y)=x$，其中x为X中的唯一元素且使得$f(x)=y$。f的逆映射记为f^{-1}。

例1.1.5 求例1.1.4中映射f的逆映射f^{-1}：$R-\{3\}\to R-\{0\}$。

解：已知f为双射，设$y\in R-\{3\}$，由$f(x)=3-\dfrac{1}{2x}$有

$$y=3-\frac{1}{2x},$$

解得

$$x=\frac{1}{2(3-y)},$$

所以有逆映射f^{-1}：$R-\{3\}\to R-\{0\}$，$f^{-1}(y)=\dfrac{1}{2(3-y)}$。

逆映射f^{-1}也是双射，它的定义域、值域恰与映射f的**定义域、值域颠倒**。f和f^{-1}互为逆映射。

1.1.6 复合映射

如果f：$X\to Y$和g：$Y\to Z$是映射，$R_f\subset Y$，则映射

$$\begin{cases} g\circ f: & X\to Z \\ & x\to g(f(x)) \end{cases}$$

称为映射f和g的**复合映射**。记为$h=g\circ f$。

例1.1.6 设f：$R\to R-\{0\}$，$f(x)=2+\sin(x)$，g：$R-\{0\}\to R$，$g(y)=\dfrac{1}{y}$，求$g\circ f$，$f\circ g$。

解： $g\circ f$：$R\to R$，定义为

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=\frac{1}{f(x)}\\&=\frac{1}{2+\sin(x)},\end{aligned}$$

$f\circ g$：$R-\{0\}\to R-\{0\}$，定义为

$$\begin{aligned}(f\circ g)(y)&=f(g(y))\\&=2+\sin(g(y))\\&=2+\sin\left(\frac{1}{y}\right)。\end{aligned}$$

由此可见，映射$g\circ f$不等于$f\circ g$。复合映射有下面性质：

1. 若f：$X\to Y$和g：$Y\to Z$两者均为满射，则$g\circ f$也为满射。
2. 若f：$X\to Y$和g：$Y\to Z$两者均为单射，则$g\circ f$也为单射。
3. 若f：$X\to Y$和g：$Y\to Z$两者均为双射，则$g\circ f$也为双射。且有$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$。

下面只证明性质1，其余留作习题。

证明： 设$z\in Z$，要证明有$x\in X$，使$(g\circ f)(x)=z$。因为g为满射，必有$y\in Y$，使$g(y)=z$；又因为f为满射，必有$x\in X$，使$f(x)=y$。现在

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z,$$

所以$g\circ f$为满射。

习 题

1．下面小题中哪一个是映射？

(1) f：$Z\to Z$，$f(x)=\{y|x+y<10\}$

(2) f：$R\to Z$，$f(x)=x^2+2$

(3) f：$R\to R$，$f(x)=x^3-6x$

2．试找一个全体实数集到全体正实数集上的双射。

3．f：$x\mapsto\dfrac{1}{x}$是不是全体实数集到自身的映射。

4．证明下面映射为满射：

(1) f: $R-\{0\}\to R-\{1\}$, $f(x)=1+\frac{1}{x}$

(2) f: $R^2\to R$, $f(x, y)=xy$

5. 证明下面映射为单射：

(1) f: $R\to R$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$

(2) f: $R^+\to R^2$, $f(x)=(x, \ln x)$

6. 第4、5题中各小题是否双射？若是，则求出逆映射f^{-1}。

7. 试证明性质2、性质3。

8. 设f: $R\to R$, $f(x)=x^2-3$; g: $R\to R$, $g(x)=x+2$, 试求$g\circ f$, $f\circ g$; 并说明所求映射是否满射，单射，双射？

§1.2 矢量代数

在这节里我们对矢量代数进行复习。

1.2.1 矢 量

三维欧几里得空间R^3中的点与三个实数的有序列$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$的一个双射，给出了$R^3$中点集与三个实数的有序列集合之间的一个映射。这三个实数的有序列称为**矢量**。点集中每一点映射的象是R^3中的一个矢量$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，其中三个实数$a_1$, a_2, a_3分别称为矢量$\boldsymbol{a}$的**分量**。矢量可分别记为$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$…等或$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$…等。

矢量$\boldsymbol{a}$的逆矢量是矢量$-\boldsymbol{a}$，定义

$$-\boldsymbol{a}=(-a_1, -a_2, -a_3)。$$

矢量是一个既有大小，又有方向的量。矢量$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$的长度(大小)是实数$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$。显然，$|\boldsymbol{a}|\geqslant 0$。**零矢**是矢量$0=(0, 0, 0)$，它是长度为零的矢量，其方向是不确定的。$|\boldsymbol{a}|=0$的必充条件是$\boldsymbol{a}=0$。

两矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$相等，则它们大小相等，方向相同，反之亦然，记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。如果$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$大小相等，方向相反，则$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$。

1.2.2 矢量的加、减法

设$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$是$R^3$中的两个矢量，它们的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$定义为矢量

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)。$$

矢量的加法满足下面的性质：

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （交换律）
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （结合律）
3. $0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 对一切$\boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$ 对一切$\boldsymbol{a}$

下面只证明性质1，其余的同理可证。

证明： 设$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)\\&=(b_1+a_1,\ b_2+a_2,\ b_3+a_3)\\&=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的差是矢量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，所以减法可化为加法来处理。

若$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$为R^3中的两个矢量，它们的差$\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}$记为$\boldsymbol{PQ}$，表示从$\boldsymbol{P}$到$\boldsymbol{Q}$的矢量(图1-1)，$\boldsymbol{P}$到$\boldsymbol{Q}$的距离是长度$|\boldsymbol{PQ}|$。有关系：$\boldsymbol{PQ}=-\boldsymbol{QP}$，$|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{QP}|$；当且仅当$\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}-\boldsymbol{R}$时，有矢量$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{RS}$。对一切矢量$\boldsymbol{P}$，有$\boldsymbol{PP}=0$。

图1-1

1.2.3 矢量的数乘

设k为实数(数量)，矢量为$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，定义积$k\cdot\boldsymbol{a}$为一个矢量

$$k\boldsymbol{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3),$$

称为**数乘矢量**，且它的模是$|\boldsymbol{a}|$的$|k|$倍，即：

$$\begin{aligned}|k\boldsymbol{a}|&=\sqrt{(ka_1)^2+(ka_2)^2+(ka_3)^2}\\&=\sqrt{k^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\\&=|k||\boldsymbol{a}|,\end{aligned}$$

它的方向，当$k>0$时与$\boldsymbol{a}$相同；当$k<0$时与$\boldsymbol{a}$相反；当$k=0$时，$k\boldsymbol{a}$为零矢，方向不定。

显然，对一切的k和$\boldsymbol{a}$，有$0\boldsymbol{a}=k0=0$。

数乘矢量满足下面性质：

1．$k_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1k_2)\boldsymbol{a}=k_1k_2\boldsymbol{a}$

2．$(k_1+k_2)\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}$

$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$　(分配律)

3．$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

各性质利用分量可证。设$k\geqslant 0$，$\boldsymbol{b}$为非零矢量。若有$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，则矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$有相同方向；若$k<0$，则矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$有相反方向；若$k=1$，则矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$有相同的方向和长度。如果对某一实数$k$有：$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，则不论$\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{b}=0$或$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$有相同或相反方向，称矢量$\boldsymbol{a}$平行于矢量$\boldsymbol{b}$。

若$\boldsymbol{a}\neq 0$，则矢量$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是同$\boldsymbol{a}$有相同方向的单位矢。

1.2.4 线性组合

矢量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\cdots\boldsymbol{a}_n$称为**线性相关**，如果存在不全为零的数k_1，k_2，$\cdots k_n$使

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=0 \tag{1-1}$$

如果矢量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\cdots\boldsymbol{a}_n$不是线性相关，则称它们为**线性无关**，即式(1-1)仅当$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$时才成立。此时$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots\boldsymbol{a}_n$线性无关。

含有零矢的矢量集合总是线性相关的。

定理1.1　如果一个矢量由一些线性无关的矢量线性表示，则它的表达式是唯一的。

证明：设$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_n$是线性无关的矢量，若有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n \\ &= k_1'\boldsymbol{a}_1 + k_2'\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_n'\boldsymbol{a}_n\end{aligned}$$

时，则必有$k_i = k_i'$，$i=1,2,\cdots n$。否之，假设$k_j \neq k_j'$，则由上式

$$(k_1 - k_1')\boldsymbol{a}_1 + (k_2 - k_2')\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (k_j - k_j')\boldsymbol{a}_j + \cdots + (k_n - k_n')\boldsymbol{a}_n = 0$$

但其中$k_j - k_j' \neq 0$，即$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots\boldsymbol{a}_n$线性相关，这与所设矛盾。

在R^3中任意三个线性无关的矢量集合称为R^3的一个基，即每一个矢量可表示为组成基的矢量集合的线性表示。特别地，可以取$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$为R^3的一个基。由定理1.1知道，每一个矢量相对所选基的表达式是唯一的，即矢量的分量唯一。但基改变时，分量也随之改变。零矢是一个例外，其分量永远是零。

例 1.2.1 设$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$为一组基，且$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_3$，试证明$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$线性无关。

证明： 设k_1、k_2、$k_3 \in R$，有

$$\begin{aligned}k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c} &= (k_1+k_3)\boldsymbol{u}_1+(k_1-k_2)\boldsymbol{u}_2+(k_2-k_3)\boldsymbol{u}_3 \\ &= 0,\end{aligned}$$

因为$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$线性无关，所以有

$$k_1+k_3=0,\ k_1-k_2=0,\ k_2-k_3=0,$$

这是一个关于k_1、k_2、k_3的齐次线性方程组，其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = 2,$$

所以有唯一解 $k_1=k_2=k_3=0$，从而$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$线性无关。

1.2.5 数量积

两矢量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$和$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$的**数量积**或**点积**定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

特别地$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$时，有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$。

数量积满足下面性质：

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）
2. $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$（$k$为实数）
3. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律）
4. 数量积是正定的，即：

   ① 对任意矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geqslant 0$。

   ② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$的必充条件是$\boldsymbol{a}=0$。

下面证明性质1，其余的同理可证。

证明： 设$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$，

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\&=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3\\&=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

由定义同样有：对任意的$\boldsymbol{a}$，有$\boldsymbol{a}\cdot 0=0$；同样对任意$\boldsymbol{a}$，有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=0$，有$\boldsymbol{b}=0$。

由于$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$是与$\boldsymbol{c}$线性相关的一个矢量，而$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$是与$\boldsymbol{a}$线性相关的一个矢量，所以一般地说，

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})。$$

设$\theta=\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$为两矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，两矢量的数量积又可以表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta \qquad (1\text{-}2)$$

例1.2.2 在三角形ABC中(图1-2)，设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，且$\theta=\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，试求$|\boldsymbol{c}|^2$。

解：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

于是得到余弦定理：

$$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2$$

利用式(1-2)马上可证。

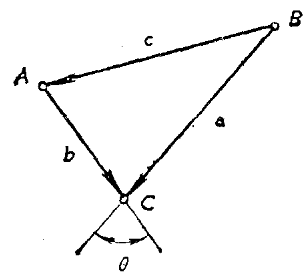


图1-2

定理1.2 两矢量正交的必充条件是它们的数量积等于零。

两矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$正交的必充条件也可以表示为

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

或$\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{b}=0$或$\theta=\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{2}$。

可以证明$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$是R^3的三个互相正交的单位矢量，它们构成的基称为**标准正交基**，且有

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad (i、j=1, 2, 3),$$

$\boldsymbol{a}$在R^3中的三个分量a_1、a_2、a_3可视为在标准正交基下矢量$\boldsymbol{a}$的三个坐标。

若矢量$\boldsymbol{a}\neq 0$，$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，设$\theta_i=\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i)$，$(i=1, 2, 3)$。如图1-3，则$\cos\theta_i(i=1, 2, 3)$称为$\boldsymbol{a}$的方向余弦。因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta_i=a_i$，有

$$\cos\theta_i=\frac{a_i}{|\boldsymbol{a}|},$$

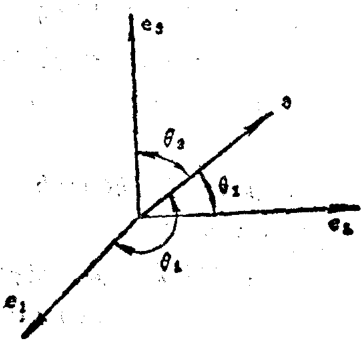


图1-3

于是单位矢为