

SHUXUE ZHONG DE TUILI HE LUNZHENG

数学中的推理 和论证

李俊秀 编

魏庚人 校

陕西科学技术出版社



数学中的推理和论证

李俊秀 编

魏庚人 校

陕西科学技术出版社

数学中的推理和论证

李俊秀 编

魏庚人 校

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街131号)

陕西省新华书店发行 汉中地区印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张3.875 字数78,000

1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷

印数1—10,500

统一书号: 7202·92 定价: 0.63元

序

本书系统地阐述了数学中常见的几种逻辑推证方法。它具有如下四个特点：

第一、分类阐述。本书把常见的推证方法分为归纳法和演绎法，类比法，分析法和综合法，反证法和同一法等四个方面介绍。便于指出其联系，比较其异同，阐明其结合使用的优越性。数学归纳法作为一个变态的演绎法列入“归纳法和演绎法”部分，极易看出引入数学归纳法的必要性，又不至于将它与归纳法混同起来。

第二、取材广泛。本书以中学数学内容为主，选例涉及几何（平面、立体、解析）、代数、三角和分析等各个方面。为了说明一些数学思想的发展，本书还吸取了不少的数学史资料。

第三、立意新颖。书中给出了一些逻辑推证方法的数理逻辑公式。编者还首次阐述了在数学中非常重要的关系推理及其应用。

第四、正反对比。本书除正面阐述各个逻辑推证方法的特点、应用步骤外，还结合教学实践，指出数学推证中常见的一些逻辑错误，分析其根源，使读者从正反两方面的对照中学会正确地进行思考和论证。

本书是讲推理论证的，而推理论证属于逻辑学的内容。本书以逻辑学的理论为指导，通过数学中的实例加以阐述，

不仅使读者更加透彻理解逻辑推证的理论，而且更加明了它在数学上的广泛应用。理论与实际相结合，使二者相辅相成，相得益彰，这是本书的一大优点。阅读本书，可以帮助读者理解和分析数学教材，严谨地推证数学定理；并在学习和运用数学知识的过程中，逐步掌握科学的方法，培养逻辑思维能力和探索创造能力。因此，本书是数学教育工作者的教学参考书，是中学数学教学法的辅助读物。本书也可供具有初中以上程度的数学爱好者阅读。

魏 庚 人

1982年3月 于陕西师范大学

前 言

培养数学能力是数学教学的目的之一。数学能力包括运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力；而逻辑推理和论证能力是逻辑思维能力的重要组成部分。作为数学教育工作者应首先具备一定的逻辑知识和思维素养，并通过数学教学使学生在掌握数学基础知识和基本技能的同时，熟悉数学中常见的归纳、演绎、类比、分析、综合、反证、同一等逻辑方法，增强抽象思维能力和逻辑推证等能力，以便为学习数学和其它科学打好坚实的基础。

本书以中学的数学内容为主，举例涉及代数、几何、三角、分析等各个方面。为了便于读者理解，第一章先概述有关逻辑推证的一般知识。每章后附有思考题，供读者练习时选用。

本书在编写过程中，魏庚人教授作了一系列指导，并亲自审阅了原稿。兰纪正老师对本书初稿也提出了宝贵意见，在此谨致谢意。

由于编者水平所限，用数理逻辑知识说明一些形式逻辑问题只是初步的尝试，一定有不少的缺点和错误，敬希读者批评指正。

编 者

1982年3月

主要逻辑符号简介

(一) 连接词

1. 合取 ($\wedge$) “ $p \wedge q$ ”读作“ p 与 q ”或“ p 且 q ”。
当且仅当 p 和 q 都真时, 它为真。

2. 析取 ($\vee$) “ $p \vee q$ ”读作“ p 或 q ”。当且仅当 p 和 q 中有一个为真时, 它为真。

3. 否定 ($\neg$) “ $\overline{p}$ ”读作“非 p ”。 $\overline{p}$ 表示 p 真时它假; p 假时它真。

4. 蕴涵 ($\Rightarrow$) “ $p \Rightarrow q$ ”读作“如果 p , 那么 q ”。
当且仅当 p 和 q 都真时, 它为真。

5. 等价 ($\Leftrightarrow$) “ $p \Leftrightarrow q$ ”读作“ p 当且仅当 q ”。
等价式 $p \Leftrightarrow q$ 当 p 和 q 同真或同假时, 它为真。

(二) 量词

1. 全称量词 ($\forall$) 读作“所有”

2. 特称量词 ($\exists$) 读作“存在”

(三) 集论的一些符号

1. 属于 ($\in$) $a \in A$ 表示元素 a 属于集合 A 。

2. 包含 ($\subseteq$) $A \subseteq B$ 表示集 A 的元素都是集 B 的元素, 并称 A 是 B 的子集。

若 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$ 。

3. 交 ($\cap$) $A \cap B$ 表示同时属于集 A 和 B 的一切元素

的集合。

4. 并 ($\cup$) $A \cup B$ 表示属于 A 或属于 B 的一切元素构成的集合。

5. 空集 (ϕ)

6. 关系 (R) aRb 表示 a 、 b 间的二元对应。

目 录

序

前 言

主要逻辑符号简介

第一章 逻辑推证的一般知识浅释 (1)

§1.1 推理概述 (1)

(一) 什么是推理? (1)

(二) 推理的种类 (2)

§1.2 逻辑规律概述 (3)

(一) 同一律 (3)

(二) 矛盾律 (3)

(三) 排中律 (3)

(四) 充足理由律 (3)

§1.3 论证概述 (4)

(一) 什么叫论证? (4)

(二) 论证的种类 (4)

(三) 论证的规则 (4)

第二章 数学中的归纳法和演绎法 (7)

§2.1 数学中的归纳法 (7)

(一) 什么是归纳法? (7)

(二) 归纳法的种类 (8)

(三) 归纳法的作用 (12)

§2.2 数学中的演绎法 (18)

(一) 什么是演绎法?	(18)
(二) 三段论	(18)
(三) 关系推理	(26)
(四) 联言推理、选言推理和假言推理	(33)
§2.3 归纳法和演绎法之间的关系	(37)
(一) 归纳是演绎的基础, 演绎是归纳的前导	(38)
(二) 相互渗透	(39)
§2.4 数学归纳法	(41)
(一) 为什么要研究数学归纳法?	(41)
(二) 数学归纳法的依据和步骤	(42)
(三) 什么时候应用数学归纳法?	(42)
(四) 怎样应用数学归纳法?	(44)
(五) 数学归纳法的其它形式	(54)
第三章 数学中的类比法	(67)
§3.1 类比法及其在科学发展中的作用	(67)
(一) 什么是类比法?	(67)
(二) 类比法在科学发展中的作用	(68)
§3.2 怎样应用类比法?	(72)
(一) 一般与特殊类比	(72)
(二) 原命题与逆命题类比	(74)
(三) 新问题与已知命题类比	(74)
(四) 无限与有限类比	(75)
§3.3 错误地使用类比法举例	(76)
第四章 数学中的分析法与综合法	(81)
§4.1 数学中的分析法及其应用	(81)
§4.2 数学中的综合法及其应用	(85)
§4.3 分析法与综合法的联合使用	(89)

第五章 数学中的反证法和同一法	(94)
§5.1 数学中的反证法	(94)
(一) 反证法及其逻辑依据	(94)
(二) 怎样否定结论?	(95)
(三) 导致什么样的矛盾	(98)
(四) 什么时候应用反证法?	(102)
§5.2 数学中的同一法	(108)
(一) 同一法及其逻辑依据	(108)
(二) 同一法与反证法的关系	(109)
(三) 同一法的一题多解	(110)

第一章 逻辑推证的一般知识浅释

§ 1.1 推理概述

(一) 什么是推理?

推理是从一个或几个判断得出一个新判断的思维形式。

例如:

(1) 所有的有理数都是实数,

所以, 有些实数是有理数。

(2) 所有的矩形都是平行四边形,

所有的正方形都是矩形,

所以, 所有的正方形都是平行四边形。

(3) 三角函数在它们的定义域内是连续的,

反三角函数在它们的定义域内是连续的,

指数函数 a^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的,

对数函数 $\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续,

三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数都是初等函数,

所以, 一切初等函数在其定义域内都是连续的。

从这些例子可以看出任何推理都有两个组成部分: 一个是推理所依据的判断, 叫做前提; 另一个是推出的新判断, 叫做结论。

(二) 推理的种类

推理可以如下分类：

1. 根据推理的前提和结论之间是否有蕴涵关系，把推理分为必然性推理和或然性推理。蕴涵关系是指前提真，结论必真。前提和结论之间有蕴涵关系的推理，叫做必然性推理，如例（1）和例（2）；前提和结论之间没有蕴涵关系的推理，叫做或然性推理，如例（3）。

2. 根据推理所表现的思维进程的方向性，即根据思维进程中从一般到特殊，从特殊到一般，从特殊到特殊的区别，把推理分为演绎推理、归纳推理和类比推理。例（2）是演绎推理，例（3）是归纳推理。类比推理是从特殊到特殊的推理，例如：

地球上空气、有水、有生命，

火星上也有空气、有水，

所以，火星上也可能有生命。

3. 根据推理中前提的数目是一个还是两个或两个以上，把推理分为直接推理和间接推理。以一个判断作为前提的推理为直接推理，如例（1）以两个或两个以上的判断作为前提的推理为间接推理，如例（2）、例（3）。

4. 根据推理的简繁形式的不同，推理又可分为简单（判断）推理和复合（判断）推理。复合推理是由两个或两个以上的简单推理组成的推理。

如：

所有的有理数都是实数，

分数是有理数，

所以，分数是实数；

而虚数不是实数，

所以，分数不是虚数。

本书首先把推理分为演绎推理、归纳推理和类比推理。其次，在演绎推理中，又着重介绍三段论、关系推理、联言推理、选言推理和假言推理。

§ 1.2 逻辑规律概述

(一) 同一律

同一律是指在同一思维过程中，每一思想的自身都具有同一性。它的公式是： A 是 A ，或 $A \Rightarrow A$ 。它可以保证思维的确定性。

(二) 矛盾律

矛盾律是指在同一思维过程中，两个互相矛盾的思想不能同时是真的。它的公式是： A 不是非 A ，或 $\overline{A \wedge A}$ 。其作用是避免自相矛盾。

(三) 排中律

排中律是指在同一思维过程中，两个互相矛盾的思想必有一个是真的。它的公式是：或者 A 真，或者非 A 真，即 $A \vee \overline{A}$ 。它可保持思维的明确性。

(四) 充足理由律

充足理由律的基本内容是：在论证过程中，一个判断被确定为真，总是有充足理由的。其公式是： A 真，因为 B 真，并且 B 能推出 A 。它的主要作用在于保证思维的论证性。

§ 1.3 论证概述

(一) 什么叫论证?

论证就是用一些真实判断确定另一判断真实性的思维过程。论证都是由论题、论据和论证方式三个因素构成的。要被确定其真实性的判断，称为论题。被引用来作为论题真实性的根据的判断，称为论据。论证方式是把论题、论据联系起来的形式。

任何论证都要运用推理，但因推理只是断定前提与结论的逻辑关系，而不必然断定前提与结论的真实性，并非任何推理都是论证，这是论证与推理的根本区别。

(二) 论证的种类

1. 直接论证和间接论证。直接论证是从论据的真实性中直接推出论题真实性的论证。间接论证是通过确定另一判断的虚假来确定论题真实性的论证。

2. 演绎论证和归纳论证。演绎论证是运用演绎推理的形式进行的论证。归纳论证是运用归纳推理的形式进行的论证。

(三) 论证的规则

1. 论题必须明确，不能转移或偷换论题。违反这一规则所犯的逻辑错误，叫“论题不清”。“证明过多”或“证明过少”是常犯的“偷换论题”的错误。

2. 论据应当是真实判断，否则，以虚假的判断作为论据，就会犯“虚假论据”的错误。

3. 论据的真实性不应依赖论题的真实性来论证。违反

这一规则而发生的逻辑错误，叫“循环论证”。

4. 从论据应能推出论题。违反这条规则就会犯“推不出”的逻辑错误。

思考题

1. 什么是推理？什么是论证？推理和论证有何不同？

2. 指出下列论断或证明中的错误：

(1) 数是可以比较大小的。

虚数是数，

所以虚数是可以比较大小的。

(2) a 是无理数，也是有理数。

(3) 已知： $AB = DE$ ， $AC = DF$ ， $FB = CE$

(图1.1)。

求证： $\angle C = \angle F$ 。

证： $\because AC \parallel DF$ ，

$\therefore \angle C = \angle F$ (两平行线被第三条直线所截，内错角相等)。

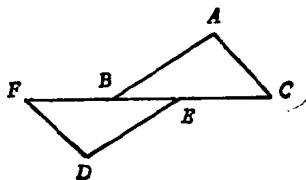


图1.1

(4) 在 $\triangle ABC$ 中， BC 、 AC 边上的中线 AD 、 BE 交于 M 。求证： AB 边上的中线必过点 M 。

证： $\because$ 三角形的三中线交于一点，而两条直线相交时只有一个交点，

所以点 M 就是 $\triangle ABC$ 的重心，因此 AB 边上的中线

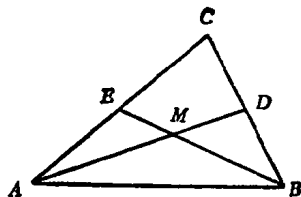


图1.2

必过点 M 。

(5) 证明对数换底公式:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

(a, b, n 都是正数, $a \neq 1, b \neq 1$)

$$\text{证: } \because \log_a b \cdot \log_b a = 1 \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b},$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\log_a N}{\log_a b} &= \log_a N \cdot \log_b a = \log_b a \cdot \log_a N \\ &= \log_b N. \end{aligned}$$