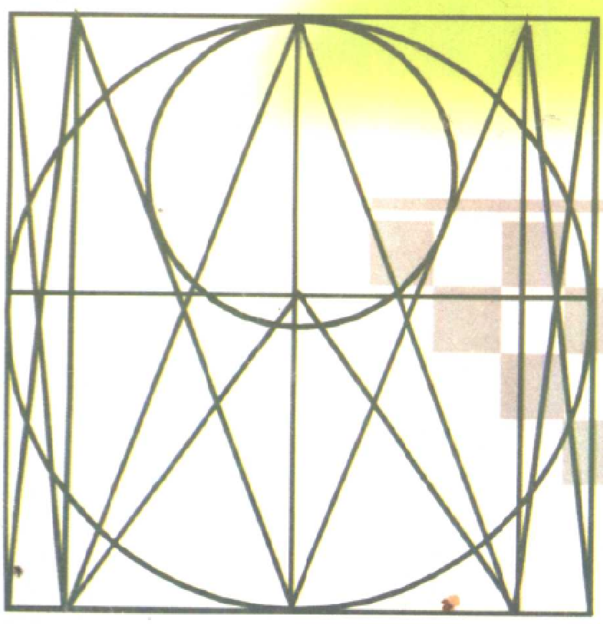
自学辅导下的情境教学法实验用书

高三数学

中国科学院心理研究所 王兴华 主编



中央广播电视大学出版社

自学辅导下的情境教学法实验用书

高　三　数　学

中国科学院心理研究所　王兴华　主编

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高三数学/王兴华主编.—北京:中央广播电视大学出版社,1998.6

自学辅导下的情境教学法实验用书

ISBN 7-304-01592-6

Ⅰ.高… Ⅱ.王 Ⅲ.数学课-高中-教材 Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 17586 号

自学辅导下的情境教学法实验用书

高 三 数 学

中国科学院心理研究所 王兴华 主编

出版·发行/中央广播电视大学出版社

印刷/北京银祥福利印刷厂

开本/787×1092 1/16 **印张**/20 **字数**/496 千字

版本/1998 年 5 月第 1 版 1998 年 6 月第 1 次印刷

印数/0001 5000

社址/北京市复兴门内大街 160 号 **邮编**/100031

电话/68519502 66069791 **(本书如有缺页或倒装,本社负责退换)**

书号:ISBN 7-304-01592-6/G·388

定价:17.00 元

《自学辅导下的情境教学法实验用书》编委会

前　言

《高中数学自学辅导实验教材》，是依据现行全日制普通高级中学数学教学大纲，参照九年制义务教育的教学大纲，遵循心理学关于学习的理论和程序教学的原理及哈伯德提出学习的三个障碍，结合我国目前数学教学要改革的精神而编写的。

在编写教材时，我们把心理学关于学习的理论和程序教学的原理及哈伯德提出学习的三个障碍具体化为以下几条原则，并在整个教材的编写过程中作了认真的贯彻。这些原则是：1. 小步子原则；2. 即时强化或即时反馈的原则；3. 积极反应的原则；4. 及时评定的原则；5. 目标值的测定原则；6. 变式原则；7. 例一规式和规一例式相结合的原则。由于教材的编写贯彻了上述原则，使本教材适于学生进行自学；能引发学生的学习兴趣和加深学生的记忆；在学生和教材的相互作用过程中提高学生的学习主动性；为及时了解学生的进步和学习进度提供了有效的手段；同时，有利于学生灵活地掌握知识和应用所学的知识。因此，本教材适用于各类具体情况不同的学生，经过一段时间的学习，可逐步提高学生的学习兴趣和学习积极性，提高学生的自学能力，提高教学效果。

使用本教材时，必须使用与本教材配套的教学方法，即自学辅导教学法。

自学辅导教学法所采用的心理学原则是：1. 自定步调和群定步调相结合；2. 刺激、反应和强化相结合；3. 知道结果与不知道结果相结合；4. 外显反应、内隐反应和暗含反应相结合；5. 自然强化和人工强化相结合；6. 自学与讲授相结合。这种教学方法的精神实质在于，学生在教师的指导、辅导、点拨下进行以自学为主的学习，充分发挥课堂教学中教师与学生的两个积极性。

自学辅导教学法的课堂教学的具体模式是："回忆、自学、辅导、讲解"，共八个字。回忆，是指教师在课堂上提问，学生回忆已学过的知识，重新唤回意识，集中学生的注意力，引入新课，时间可用几分钟；自学，是指学生在课堂上积极主动地去读书看例题，做练习，对答案（这三个过程是交替地进行的，学生可根据自己的具体情况，调整它们的进程），自学时间可占课堂教学时间的三分之二左右；辅导，是指教师在学生自学的时候，主动积极地去辅导差生，指导优生，启发中等生，使学生及时地得到老师恰当的帮助；讲解，是指教师针对学生自学时没有解决的难点，重点、关键处，用适当的时间在课堂上讲述，进行分析和归纳，也可与学生一起总结本节课的内容，共同完成本节课的教学任务，每节课均应使"学"、"导"、"记"贯彻始终。

心理学研究和多年的教学实践已经证明，这种"自学辅导教学"方法及其八字课堂教学模式，能更好地调动学生学习的主动性和积极性，能培养学生独立思考创造思维、分析归纳、总结概括的能力，能使教师发挥恰到好处的主导作用，而且，能够有效地实施因材施教的原则，从而能明显地、普遍地提高教学效果，提高各类学生的学习成绩。

自学辅导教学实验的效果，可从以下几个方面来加以评估：1. 学生学习成绩与相同班级的非实验班作比较；2. 学生参加实验班前后个人的学习品质的比较（用自制量表测查）；3. 学习能力（记忆、思维、理解力）与相同班级的非实验班作比较；4. 相关学科教师与家长的反映（可自制问卷）。

本教材是在中科院心理研究所研究人员王兴华同志主持下，由北京、吉林、河北、山西、内蒙古等省市中学教学研究部门和第一线有多年教学实践和实验经验的同志一起参加编写的。本套教材吸收了国内现有的几种版本的中学数学教材的长处，并确立和体现了自己的特色。本教材内容程度适中，语言通俗易懂，易于自学，经几年的教学试验，反映良好。

此高中实验教材共分五套：代数上、立体几何（高一用）、代数下、平面解析几何（供高二用书）。本套书是供高三学生用书，为高考学生准备的一套高考指导书。此书结合高考内容和形式编排，反映三方面，一复习学生已学过的高一、二的基本知识及重点难点；二增加了难题拓宽了知识；三为让学生适应高考，编排了一组模拟试题。

在本教材的编写过程中，曾得到有关领导和许多同志的指导和帮助；北京十中的王玉琨老师参加了本教材的审订工作；谨借此代表编者们表示衷心的感谢。用学生的一句话说这本书像一位不出声的老师在教讲。

尽管编者们为本教材的编写付出了大量的心血，然而限于时间和水平，错误或不当之处在所难免，衷心希望实验学校的师生和广大热心的读者提出批评和指正，以便今后改进。

王兴华

目　　录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

1.1 集 合

一、知识回顾

1. 集合的基本概念

(1) 集合:集合是没有给出严格定义的数学概念,它是某些__________,把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合.集合里的各个对象叫做集合的元素.

(2) 元素与集合之间的关系:有__________两种.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作__________;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A,记作__________.

(3) 集合的特征:对于一个给定的集合,集合中的元素是__________、__________、__________.

(4) 集合的类型:含有限个元素的集合叫__________;含无限个元素的集合叫做__________;不含有任何元素的集合叫做__________,记作__________.

(5) 集合的表示方法:①列举法:__________,写在大括号内表示集合的方法.②描述法:__________.写在大括号内表示集合的方法.

(6) 常用集合的记法:$\varnothing$(空集),**I**(全集),**N**(自然数集),**Z**(整数集),**Q**(有理数集),**R**(实数集),**C**(复数集),$\mathbf{R}^+$(正实数集)等等.

2. 子集、交集、并集、补集

(1) 子集:对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的__________,那么 A 叫做 B 的子集.记作:__________,读作:"__________"(或"B 包含 A").真子集:如果 A 是 B 的子集,并且__________,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作:__________集合相等:如果对于两个集合 A 与 B,有__________,同时__________,则 $A=B$.

(2) 交集:____________所组成的集合,叫做 A、B 的交集,记作"______",读作"A 交 B".即 $A\cap B=$__________.

(3) 并集:______________所组成的集合,叫做 A、B 的并集,记作"______",读作"A 并 B",即 $A\cup B=$________________.

(4) 补集:已知全集 **I**,$A\subseteq \mathbf{I}$,由 **I** 中所有__________元素组成的集合,叫做集合 A 在集合 **I** 中的补集,记作:__________,读作"A 补".即:$\overline{A}=$__________.

二、要点点拨

1. 注意包含关系的性质

(1) 任何一个集合是它本身的子集,即 $A\subseteq A$.

(2) 空集是任何集合的子集,即 $\varnothing\subseteq A$,$\varnothing\subseteq\varnothing$,特别地,空集是任何非空集合的真子集,即:设 $A\neq\varnothing$,则有 $\varnothing\subset A$.

(3) 对于集合 A,B,C,如果 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,那么 $A\subseteq C$.

(4) 对于集合 A,B,C,如果 $A\subset B,B\subset C$,那么 $A\subset C$.

2. 注意只有确定全集 $\mathbf{I}$ 后,才能研究一个集合 A 的补集,因此有 $A\cup\overline{A}=\mathbf{I},\overline{\overline{A}}=A$. $A\cap\overline{A}=\varnothing$

3. 掌握如下一些公式和性质

(1) $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$,　　　　$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$;

(2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,　　　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(3) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4) 设 $n(M)$ 表示有限集合 M 的元素个数,则有

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

4. 注意掌握数学中常用的集合的符号表示

集合	空集	自然数集	整数集	有理数集	无理数集	实数集	复数集
符号	$\varnothing$	**N**	**Z**	**Q**	$\mathbf{Q}^-$	**R**	**C**

三、双基自测

1. 设 S、T 是两个非空集合,且 $S\not\subseteq T,T\not\subseteq S$,

令 $S\cap T=X$,那么 $S\cup X$ 等于

(A) X　　(B) T　　(C) $\varnothing$　　(D) S

2. 集合 M 满足条件 $\{3,4\}\subset M\subseteq\{0,1,2,3,4\}$,这样的集合 M 的数目是

(A) 1　　(B) 2　　(C) 7　　(D) 8

3. 全集为 $\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x^2\leqslant 9\}$,集合 $S=\{x|x^2-3x+2\geqslant 0\}$ 则 $\overline{M}\cap S$ 是

(A) $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$,　　　　(B) $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

(C) $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$,　　　　(D) $[-3,1]\cup[2,3]$

4. 设 $M=\{(x,y)|y=\sqrt{9-x^2}\},N=\{(x,y)|y=x+b\}$,且 $M\cap N=\varnothing$,则实数 b 的取值范围是__________.

四、范例精析

例 1　已知集合 $M=\{y|y=x-1,x\geqslant 0\},N=\{y|y=\log_{\frac{1}{2}}x,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\}$ 则(　　).

(A) $M\cap N=\varnothing$　(B) $M\cap N=M$　(C) $M\cup N=R$　(D) $N\subset M$

解　$\because M=\{y|y=x-1,x\geqslant 0\}=\{y|y\geqslant -1\}$,

$N=\{y|y=\log_{\frac{1}{2}}x,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\}=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$.

淘汰(A)、(B)、(C) 应选(D).

注意　集合 M 与 N 分别是函数 $y=x-1,(x\geqslant 0)$ 及函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1)$ 的值域.

例 2　已知集合 $A=\{x|x^2-ax\leqslant x-a\},B=\{x|1\leqslant\log_2(x+1)\leqslant 2\}$,

$C=\{x|x^2+bx+c>0\}$

(1) 若 $A\cap B=A$,求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $B\cap C=\varnothing$ 且 $B\cup C=\mathbf{R}=\mathbf{I}$,求 b,c 的值.

解　(1)由 $A\cap B=A$ 知 $A\subseteq B$,若 $a\geqslant 1$,则 $A=\{x|x^2-ax\leqslant x-a\}=\{x|1\leqslant x\leqslant a\}$.

$B=\{x|1\leqslant\log_2(x+1)\leqslant 2\}=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，由 $A\subseteq B$ 得 $1\leqslant a\leqslant 3$. 若 $a<1$，则 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant 1\}$，$A\nsubseteq B$.

(2) 由 $B\cap C=\varnothing$ 且 $B\cup C=\mathbf{R}=\mathbf{I}$，可知 $C=\overline{B}$.

$\because B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，　　$C=\overline{B}=\{x|x<1$ 或 $x>3\}$.

$\therefore b=-(1+3)=-4, c=1\times 3=3$.

例 3 设含有 8 个元素的集合 A 的全部子集数为 S，其中含 5 个元素的子集数为 T，求 T/S 的值.

分析 集合 A 的全部子集数 $S=C_8^0+C_8^1+C_8^2+\cdots+C_8^8=2^8$，其中含 5 个元素的子集数 $T=C_8^5$.

$$\therefore \quad \frac{T}{S}=\frac{C_8^5}{2^8}=\frac{C_8^3}{2^8}=\frac{7}{32}$$

说明 一般地，若集合 M 中含有 n 个元素，那么集合 M 的全部子集数为：

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n \text{ 个}$$

五、强化训练(45 分钟)

1. 选择题

(1) 集合 $M=\{x|\mathrm{tg}^2x=1\}$，$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$，则(　　).

(A)$M=N$　(B)$M\supset N$　(C)$M\subset N$　(D)$M\cap N=\varnothing$

(2) 若集合 $M=\{y|y=2^x, x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=x^2, x\in\mathbf{R}\}$则(　　).

(A)$M\cap N=\{2,4\}$　(B)$M\cap N=\{4,16\}$　(C)$M\supset N$　(D)$N\supset M$

(3) 若全集 $\mathbf{I}=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)|\frac{y-1}{x-1}=2, x,y\in\mathbf{R}\}$$B=\{(x,y)|2x-y-1=0, x,y\in\mathbf{R}\}$，则 $\overline{A}\cap B$ 是(　　).

(A)$\overline{A}$　(B)B　(C)$\varnothing$　(D)$\{(1,1)\}$

(4) 设全集为 $\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，那么集合$\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}$等于(　　).

(A)$\overline{M}\cap\overline{N}$　(B)$\overline{M}\cup N$　(C)$M\cup\overline{N}$　(D)$\overline{M}\cup\overline{N}$

(5) 集合 $M=\{x|x>2\}$，$N=\{x|x<3\}$，那么"$x\in M$ 或 $x\in N$"是"$x\in M\cap N$"的(　　).

(A)充分但不必要条件　(B)必要但不充分条件

(C)充要条件　(D)既不充分也不必要条件

2. 填空题

(1) 若全集 $\mathbf{I}=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|\sqrt{x+1}\leqslant 0\}$，$B=\{x|\lg(x^2-x)=\lg x\}$，则 $A\cap\overline{B}=$________.

(2) 已知全集 $I=\{x|x^2-5x+6\leqslant 0\}$，$M=\{x|\lg(x-2)\leqslant 0\}$，$N=\{x|\frac{x-2}{3-x}\geqslant 0\}$，则 $\overline{M}\cup\overline{N}$ $=$________.

(3) 设含有 4 个元素的集合 A 的全部真子集数为 S，其中含有 2 个元素的子集数为 T，则 $T/S=$________.

(4) 已知集合 $M=\{(x,y)|y=\sqrt{16-x^2}, y\neq 0\}$，$N=\{(x,y)|x-y-a=0\}$，如果 $M\cap N\neq\varnothing$，则实数 a 满足的条件是________.

3. 解答题

(1) 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$且 $A=B$，求 x 与 y 的值．

(2) 若全集为 k，集合 $A=\{x|(\frac{1}{2})^{x^2-x-6}>1\}$，$B=\{x|\log_3(x-a)<2\}$，若 $A\subseteq B$ 时，求 a 的取值范围．

(3) 已知集合 A、B 各有 10 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，集合 C 中含有 3 个元素，且满足 $C\subset A\cup B$ 及 $C\cap B=\varnothing$，求集合 C 的个数．

1.2 映射与函数

一、知识回顾

1. 映射　设有 A、B 两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中__________元素在集合 B 中都有__________的元素和它对应，那么这样的对应(包括集合 A、B 以及从 A 到 B 的对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\rightarrow B$.

下面给出的四个对应都是从 A 到 B 的映射吗?

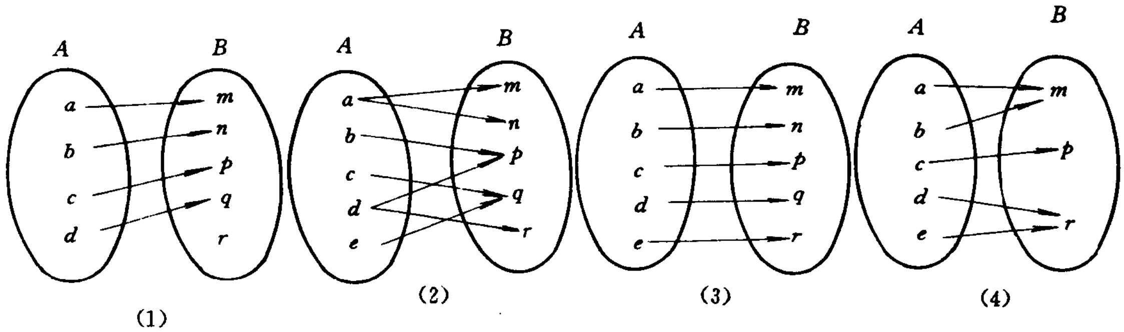


图 1-1

从映射的定义我们知道：

(1) 映射是两个集合间的一种特殊的对应关系，它的特殊点在于：集合 A 中的每一个元素在集合 B 中都有__________的像．

(2) 映射允许有的像没有原像(如图 1-1 中的__________)．

(3) 映射允许不同的元素有相同的像(如图 1-1 中的__________)．

(4) 映射 $f_1:A\rightarrow B$ 和映射 $f_2:B\rightarrow A$ 是不同的两个映射．因此，可以知道，图 1-1 中只有__________不能构成映射，__________都是从 A 到 B 的映射．

2. 一一映射和逆映射

设有 A、B 两个集合，$f:A\rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中都有__________的像，而且集合 B 中的每一个元素在集合

A 中都有__________，那么这个映射就叫做一一映射．

由这个定义我们知道，图 1-1 中的__________都不是一一映射，只有__________构成一一映射．如果 $f_1:A\to B$ 是一一映射，那么 $f_2:B\to A$ 也一定是一一映射．

又，设 $f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射，那么如果对于集合 B 中的每一个元素，都使它在集合 A 的原像和它对应，这样得到的映射叫做映射 $f:A\to B$ 的**逆映射**，记作：$f^{-1}:B\to A$．由这个定义我们知道：

(1) 一一映射 $f_1:A\to B$ 与 $f_2:B\to A$ 互为__________；

(2) 一个映射存在逆映射的充要条件是这个映射是__________．

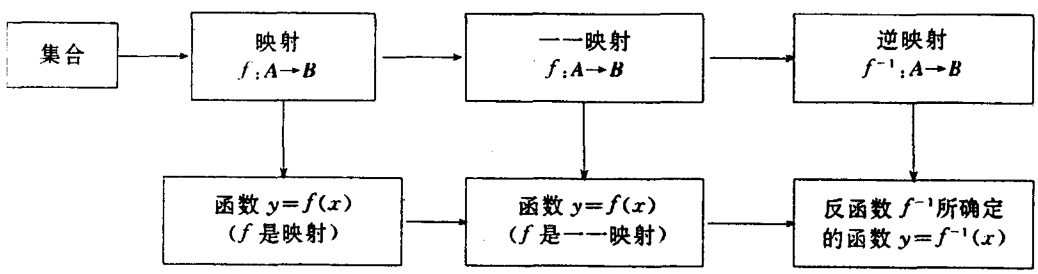
3．函数的概念

(1) 函数的定义：设 A、B 都是__________，如果 f 是 A 到 B 的一个映射，那么映射 $f:A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A$，$y\in B$，原像集合 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的__________；像的集合 $C(C\subseteq B)$ 叫做 $y=f(x)$ 的__________．

(2) 函数的表示法：______________________________．

(3) 函数的图像：把函数的每一组对应值 $(a,f(a))$ 作为平面直角坐标系上点的坐标，这种点的轨迹就是这个函数的图像，根据函数图像的分布、走向和特征，可以直观地反映函数的性质，所以函数图像是研究函数的一个重要工具．

函数概念的主线是集合——映射——函数，在复习中一定要真正理解教材的知识结构：



二、要点点拨

1．对映射应注意加深理解的是：

(1) 映射 $f:A\to B$ 包括集合 A、集合 B 以及从 A 到 B 的对应法则 f，而不能仅仅理解为对应法则 f，三者缺一不可；

(2) $f:A\to B$ 是从 A 到 B 的映射，具有方向性，它与 $g:B\to A$ 是两个不同的映射；

(3) A 中的任意元素在 B 中有唯一的像，但 B 中可以有不是 A 中元素的像的元素。

2．对逆映射注意加深理解的是：

(1) 给定一个集合 A 到集合 B 的一一映射 $f:A\to B$，就一定存在逆映射 $f^{-1}:B\to A$，它是从 B 到 A 上的一一映射；

(2) 只有一一映射，才能研究它的逆映射．

三、双基自测

1．指出下列各对应，哪些是映射？为什么？

(1) $X=\{x|x\geqslant 2,x\in\mathbf{N}\}$，$Y=\{y|y\geqslant 0,y\in\mathbf{Z}\}$，

$f:x\to y=x^2-2x+2$ （　　）

(2) $X=$\{矩形\}，$Y=\{y|y>0,y\in\mathbf{R}\}$，$f:x\to y=x$ 的面积； （　　）

(3) $X=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$Y=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$，$f:x\to y=(x-2)^2$； （　　）

(4) $X=\{\theta|0°\leqslant\theta\leqslant 180°\}$，$Y=\{y|-1\leqslant y\leqslant 1\}$，$f:x\to y=\cos\theta$； （　　）

(5) $X=$\{正三角形\}，$Y=$\{圆\}，对应法则 f："作正三角形的外接圆". （　　）

2．设集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，写出从集合 A 到集合 B 的映射的个数及一一映射．

3．下列函数是否为同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$；　　(2) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x},g(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$；

(3) $f(x)=x^2,g(x)=(x-1)^2$；　　(4) $f(x)=e^{\ln x},g(x)=\dfrac{x^2}{(\sqrt{x})^2}$.

4．已知 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\ \pi & x=0\\ 0 & x<0\end{cases}$，求 $f\{f[f(-\frac{1}{2})]\}$的值．

四、范例精析

例 1　已知 $A=B=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，从 A 到 B 的映射 $f:(x,y)\to(kx,y+b)$，已知 B 中元素(6,2)在此映射下的原像是(3,1)，求 k,b 的值．

解　依题意，$x=3$ 时，$kx=6$，$\therefore k=2$，$y=1$ 时，$y+2=b$，$\therefore b=1$.

例 2　设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3\}$，

(1) 从 A 到 B 可建立多少个不同的映射？

(2) 其中满足 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=9$ 的映射共有多少个？

解　(1)依映射定义，A 中每个元素在 B 中有唯一的像即可(A 中不同元素可以有相同的像，B 中元素可以无原像)，所以 A 中每个元素的像可以有 3 种选择，依乘法原理得 $3^4=81$.

(2) 由于从 1,2,3 中取出 4 个之和(可重复)为 9，只能是 1,2,3,3 或 3,2,2,2 两种情况，故满足条件的映射共有：$C_4^2\cdot P_2^2+C_4^1=16$.

例 3　(1) 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$、$f(x+1)$与 $f(x^2)$.

(2) 已知 $f(\ln x)=x+\sin x$，求 $f(x)$.

解　(1) 设 $u=\sqrt{x}+1\geqslant 1$，则 $\sqrt{x}=u-1$，$x=(u-1)^2$，于是 $f(u)=(u-1)^2+2(u-1)$
$=u^2-1(u\geqslant 1)$，

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$，$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x(x\geqslant 0)$；

$f(x^2)=(x^2)^2-1=x^4-1$. ($x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$).

(2) 令 $t=\ln x$，$\therefore x=e^t$，$\therefore f(t)=e^t+\sin e^t$，

$\therefore f(x)=e^x+\sin e^x$.

注意　求函数的解析式实际是解函数方程，常用的方法有换元法、消去法、特值法、待定系数法等，其中换元法和待定系数法是两种最基本的方法，应熟练掌握。

五、强化训练

1. 选择题

(1) 与函数 $y=x$ 有相同图像的一个函数是(　　).

(A) $y=\sqrt{x^2}$　　(B) $y=\frac{x^2}{x}$

(C) $y=a^{\log_a x}$(其中 $a>0,a\neq1$)　　(D) $y=\log_a a^x$(其中 $a>0,a\neq1$)

(2) 在给定的映射 $f:(x,y)\to(2x+y,xy)(x,y\in\mathbf{R})$的条件下,点$(\frac{1}{6},-\frac{1}{6})$的原像是(　　).

(A) $(\frac{1}{6},-\frac{1}{36})$　　(B) $(\frac{1}{3},-\frac{1}{2})$或$(-\frac{1}{4},\frac{2}{3})$

(C) $(\frac{1}{36},-\frac{1}{6})$　　(D) $(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$或$(-\frac{2}{3},\frac{1}{4})$

(3) 已知 $f(\frac{1-x}{1+x})=x$,则 $f(x)$的表达式为(　　).

(A) $\frac{1+x}{1-x}$　(B) $\frac{x+1}{x-1}$　(C) $\frac{1-x}{1+x}$　(D) $\frac{2x}{1+x}$

(4) 已知函数 $f(x)$满足 $f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$,则 $f(x+1)$的表达式是

(A) $(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}$　　(B) $(x-\frac{1}{x})^2+\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2}$

(C) $(x+1)^2+2$　　(D) $(x+1)^2+1$

(5) 已知 $f(n)=\begin{cases}n-3 & (n\geqslant10)\quad(n\in\mathbf{N})\\ f[f(n+5)] & (n<10)\end{cases}$

则 $f(5)$的值是(　　).

(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10

2. 填空题

(1) ①已知(a,b)在映射 f 下的像是$(a-b,ab)$,则$(2,3)$的原像是__________.

②已知 $f:x\to y=|x|+1$ 是从集合 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的一个映射,则元素 4 在 $\mathbf{R}$ 中的原像是__________.

(2) 已知集合 $A=\mathbf{Z},B=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\},C=\mathbf{R}$,且从 A 到 B 的映射是 $x\to2x-1$,从 B 到 C 的映射是 $y\to\frac{1}{3y+1}$,则从 A 到 C 的映射是__________.

(3) 若一次函数 $f(x)$满足 $f[f(x)]=1+2x$,则 $f(x)=$__________.

(4) 已知镭经过 100 年后剩下原来质量的 95.76%,若质量为 1 克的镭经过 x 年后的剩下量为 y 克,则 y 与 x 之间的解析式是__________.

3. 解答题

(1) 若 $f:y=3x+1$ 是从集合 $A=\{1,2,3,k\}$到集合 $B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$的一个映射,求自然数 a,k 的值及集合 A,B.

(2) 将进货单价为40元的商品按每件50元售出时，每月能卖出500个，已知这批商品在单价的基础上每涨价1元，其月销售数就减少10个，为了每月赚取最大利润，销售单价应定为多少？

1.3 反 函 数

一、知识回顾

1. 反函数的概念：如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ 是 $f(x)$ 的定义域 $\boldsymbol{A}$ 到值域 $\boldsymbol{B}$ 上的__________，那么这个映射的逆映射 $f^{-1}:\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{A}$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是函数 $x=f^{-1}(y)$ 的__________.

习惯上，函数 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数.

2. 确定反函数的步骤：

确定一个函数是否有反函数，并求出它的反函数的步骤如下：

(1) 确定函数 $y=f(x)$ 的映射是不是一一映射，只有是一一映射，才可以求它的反函数.

(2) 把函数 $y=f(x)$ 的解析式看作以 x 为未知数的方程，解出用 y 表示 x 的式子，即得__________，这时，函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别为 $x=f^{-1}(y)$ 的__________；

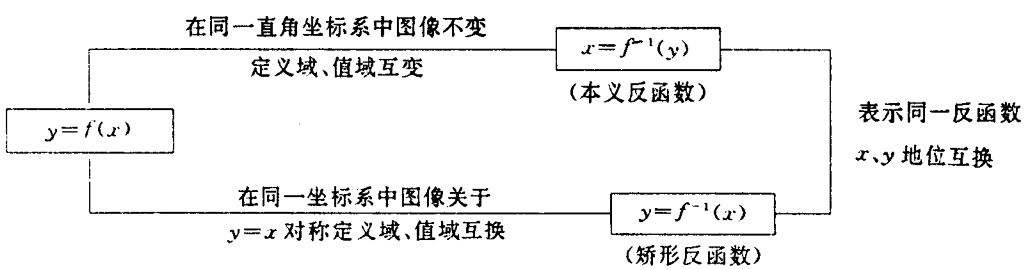
(3) 将 x、y 互换，写为 $y=f^{-1}(x)$ 的形式，(并标出反函数的定义域).

3. 互为反函数的函数图像间的关系

函数 $y=f(x)$ 的图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于__________.

二、要点点拨

1. 应注意分辨对函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的区别和联系，其关系分辨如下所示：



2. 理解并应用函数与其反函数的关系解题

(1) 对应关系的可逆性($f[f^{-1}(x)]=x$)；(2) 定义域与值域的互换性；(3) 图像关于 $y=x$ 的对称性；(4) 在各自定义域的“相应”区间内单调性的一致性.