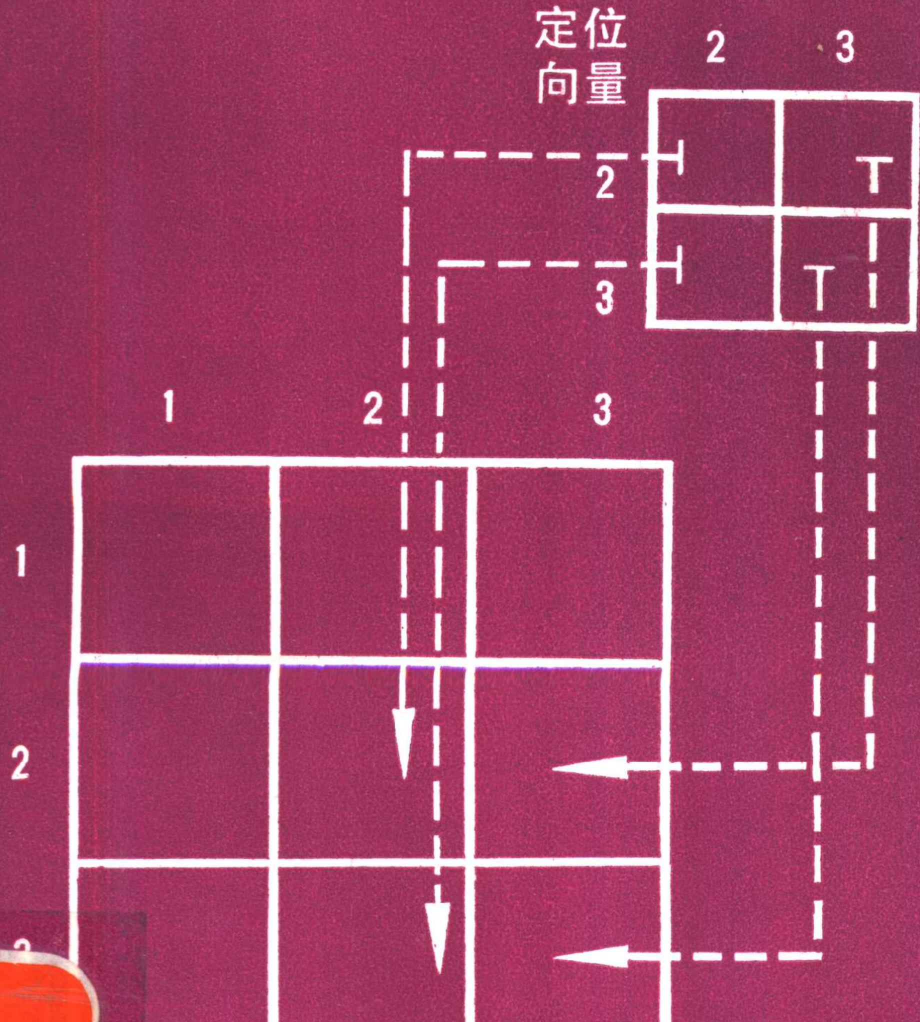
结构力学教学参考丛书

结构矩阵分析原理

赵超燮 编



高等教育出版社

结构力学教学参考丛书

结构矩阵分析原理

赵超燮 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书以矩阵方法阐明结构的静力分析、振动分析和稳定分析。全书可分为四部分：第一部分按照静力分析的求解过程讲述坐标变换、单元刚度矩阵、结构刚度矩阵、荷载向量、消元分解法等并提出了定位向量的概念；第二部分讲述如何应用 FORTRAN 语言编制结构静力分析程序及各种有关问题；第三部分讲述振动分析的各种方法；第四部分讲述弹性结构稳定分析的基本概念。本书可以作为土建类高等院校高年级学生的教学用书，也可供研究生、大学教师、工程技术和科研人员参考。

本书责任编辑余美茵。

本书原由人民教育出版社出版。1983 年 3 月 9 日，上级同意恢复"高等教育出版社"。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

结构力学教学参考丛书

结构矩阵分析原理

赵超燮 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 17.25 字数 390,000

1982年9月第1版 1985年 4月第2次印刷

印数 7,101—10,200

书号 15010·0434 定价 2.90 元

序　言

本书是1979年在重庆建筑工程学院举办的结构力学讲习会所用讲义的基础上补充、修订而成的，也是笔者为研究生开设有限元法课程的部分内容。

结构矩阵分析的内容十分丰富，不可能在这本篇幅有限的书中全面涉及，只能介绍目前通用的矩阵位移法。在选材上既考虑到理论的系统性和科学性，同时也注意到编制程序的方法和技巧。本书内容一部分取自国内外有关文献和专著，一部分是笔者在工作和学习中的体会。凡在已出版书籍中阐述的内容则少选甚至不选，而在一般书中介绍较少的内容则多讲。由于对结构矩阵分析的叙述方法和内容安排上做了一些改进的尝试，经1981年石油部管道局设计院短训班试用后，得到老师和同学的鼓励。全书可分为四部分：

（一）有关结构的静力矩阵分析，利用单元定位向量，按照求解的过程较详细地讨论了坐标变换（第三章）、单元刚度矩阵（第四章）、结构刚度矩阵和荷载列阵的形成（第五章）和方程组求解中的消元分解法（第六章）、结构内力和反力的计算（第七章）。

值得注意的是在阅读第四章时应按需要来阅读，除§4-1必须先读外，可按下列问题分类选读：

1. 直线杆系结构：§4-2～§4-4；
2. 曲线杆系结构：§4-5；
3. 平面应力问题：§4-7；
4. 薄板弯曲问题：§4-8。

（二）有关结构静力分析程序编制的方法和各种有关问题（第八、九章），是为缩短理论与实践的距离而编写的，很适合于初学者的需要。考虑到目前FORTRAN的程序日渐增多，故而介绍如何用FORTRAN语言来编制程序。

（三）有关结构的振动分析（第十章），主要讨论了特征值计算的各种方法：逆迭代法、滤频法、原点平移法、广义雅柯比法和子空间迭代法，以及用振型叠加法分析强迫振动。

（四）有关结构弹性稳定的矩阵分析（第十一章），在书中只作了一些初步的介绍，给出了杆和板单元的几何刚度矩阵。

本书要求读者具备结构力学、算法语言（FORTRAN）、矩阵代数等方面的知识。通过教学实践，本书可作为土建类高等院校高年级学生的教学用书，也可以作为研究生、大学教师以及工程技术和科研人员的参考书。

本书的出版，首先是得到我校党委和领导及许多老师、同学等的鼓励和支持。本书承天津大学杨天祥同志审阅了第一～第三章、华东水利学院杨仲侯同志审阅了全书、清华大学包世华同志审阅了第一～二章，并提出许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

我校陶振宗同志参加了制定本书的编写提纲，通读全稿及校订第三、四、七章等工作。

本书虽经几次修改，但限于编者水平，难免有错误和不妥之处，望给予批评指正。

北京工业大学　赵超燮

一九八二年三月

目　录

第一章 绪 论

§1-1 概 述

在设计各种类型的房屋、桥梁、飞机和船舶以及无线电望远镜、雷达天线等结构物时，不仅要了解结构物在使用阶段的受力状态而且必须了解施工、安装等阶段的受力状态。因此结构分析的任务是研究一个结构在正常使用条件下：

1）荷载的传递路线和内力的分布情况，同时确定各截面的应力。

2）根据截面上的应变确定结构几何形状的变化。

各种结构的受力状态可用微分方程来描述。在一般情况下，对于杆系结构是没有必要写出微分方程的。人们把常见的刚架和连续梁等杆系结构，看成是由许多单独杆件(或构件)所组成的，彼此在节点处连接（图 1-1)。描述这些杆件的常微分方程的精确解或近似解均为已知，这些解最后可用杆端位移或杆端力来表示。

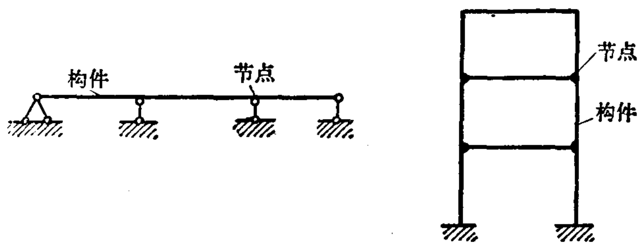


图 1-1

人们在分析杆系结构时，首先取出各个杆件，建立杆端位移与杆端力之间的关系，然后根据所采用的不同方法，利用节点的平衡或变形协调条件得到一组描述整个结构受力状态的代数方程组，从而求得节点位移或节点力。由于过去求解大型方程组的困难，所以许多研究致力于简化计算，以尽量避免解线性方程组。但随着数字电子计算机的发展，克服了求解大型线性方程组的困难，因此现在又采用基本方法来分析结构——列方程、解方程，求得节点未知量。

除了杆系结构以外，还有许多工程结构物，例如板壳和块体结构是平面和空间的连续体。对于这些结构物采用微分方程来求精确解是很困难的，尤其对于不规则的几何形状和荷载情况，更无法求解，而采用有限元法就可以得到实用的数值解。

有限元法并不仅仅是一种数学上或者是一种计算方法上的简化，而是一开始就从计算简图上入手，用有限个单元组成的理想化结构来代替实际结构，对杆系结构来讲，一根杆件通常划分为一个单元，有时也可能划分为几个单元。并假定这些单元彼此仅在有限个节点处连接。单元内任一点的位移(力)，都可以用单元的节点位移(力)或者说杆端位移来表示。然后根据虚功原理或节点平衡条件(或变形协调条件)，列出以节点位移(力)为未知量的代数方程组，解出未知量(位移或力)。整个求解过程类似于上述杆系结构分析方法，因此，可以认为这是杆系结构分析方法在连续体中的推广，反过来也可以说杆系是一维的有限元。

由于有限元法解决问题是从一个一个单元着手，进而研究由各种单元组成的离散化结构，不

同的单元可以是不同的材料。这样，有限元法可以解决多种材料所组成的结构问题；同时对结构通过仔细的划分，就能解决复杂的边界条件和荷载分布问题，以致于可以达到不同精度的要求。因此，有限元法问世以来，很快地就在各种工程领域中得到应用和发展。

应用有限元法对杆系结构或连续体进行分析时，都要用到矩阵。这是由于矩阵为我们提供了最有效的组织手段，使得在计算机上能自动地形成和求解大型代数方程组。本书就是专门讲述如何应用矩阵方法进行结构分析的，故命名为结构矩阵分析原理。

本书利用矩阵理论讲述了杆系结构和板结构的静力、动力以及稳定的计算。在静力计算部分是按照求解过程分章详细讲述的，目的在于更好地了解求解过程。为了节省篇幅，在动力和稳定部分就只讲述计算特点。

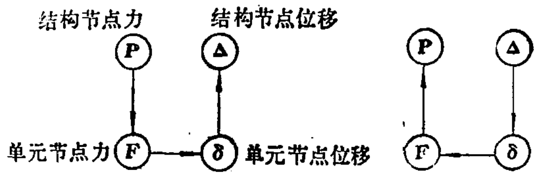
根据节点未知量区分，矩阵分析方法又可以分为：

位移法即刚度法——以节点位移为基本未知量。

力法即柔度法——以节点力为基本未知量。

混合法——部分以节点位移和部分以节点力为基本未知量。

柔度法与刚度法不同主要在于基本未知量，因此列方程的次序也就不同(图 1-2)。



(a) 柔度法 (b) 刚度法

图 1-2

采用柔度法计算超静定结构时，首先要放松多余约束，变为静定的基本体系。基本体系在外荷载与多余约束力的共同作用下使各个多余约束处达到变形连续，满足变形协调条件，从而求出多余约束力。由于柔度法需要选择基本体系与多余约束，所以要较多地结合结构物的具体情况，不易实现计算自动化；但其优点是计算出来的结果就是力。刚度法是首先求出位移，然后变换成力。因此，在过去手算的情况下，力法用得较普遍；但在目前电算的条件下，因为刚度法的计算自动化和通用性较强，所以使用刚度法比柔度法更为方便。目前广泛采用的是刚度法，因此本书的重点是刚度法。

采用矩阵方法来分析结构，在理论上并没有什么变化，仍然采用结构力学中所采用的基本假设和基本理论：小变形假设、线性假设、叠加原理、平衡原理、变形协调原理以及功能原理。

§ 1-2 结构理想化

为了进行结构分析，实际结构必须进行理想化，因为按实际情况进行分析是不大可能的，而只能对几何形状和材料性能、边界条件等进行抓主略次的简化，取接近于实际的近似结构进行分析。这个近似结构就是常说的**理想化结构**。

杆件都有宽度、厚度和长度，通常理想化为一条直线，即线单元。这时把线单元认为是等截面的；但在变截面杆件情况下，则可以根据不同截面段划分成若干单元或作为一个变截面单元(§ 9-1)。其实在许多杆件中，几乎可以说没有一根杆件会有绝对均匀的截面特性的。对于薄板则理想化为面单元，并且认为在一个单元内的厚度 t 是相等的。

材料特性在一般情况下，可用

弹性模量 E

泊松比 μ

剪切模量 G

来表示。在约定右手坐标系下，以杆轴线为 x 轴，截面主轴为 y、z 轴，这时需要知道

横截面面积 A

受剪面积 A_y 和 A_z

抗扭惯性矩 I_x

抗弯惯性矩 I_y 和 I_z

现以矩形截面和工字形截面为例计算如下(图 1-3)：

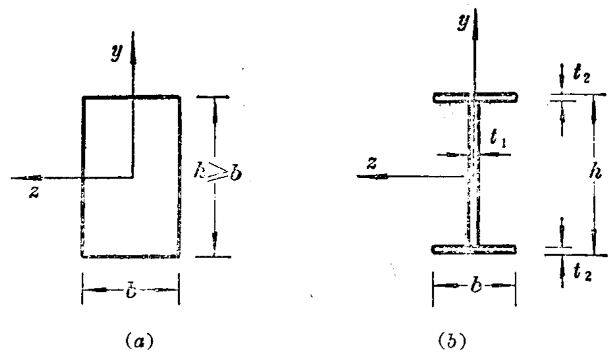


图 1-3

(1) 矩形截面(图 1-3a)

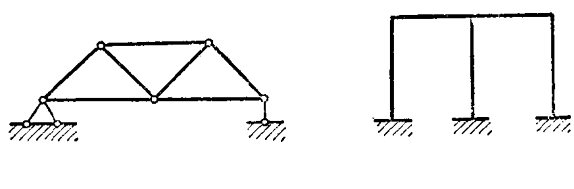
$$\left.\begin{aligned}&\text{横截面面积：}\ A=A_x=bh\\&\text{沿 } y \text{ 轴的受剪面积：}\ A_y=bh\\&\text{沿 } z \text{ 轴的受剪面积：}\ A_z=bh\\&\text{抗扭惯性矩：}\ I_x=\beta b^3h,\ \beta \text{ 见下表}\\&\text{对 } y \text{ 轴抗弯惯性矩：}\ I_y=\frac{1}{12}b^3h\\&\text{对 } z \text{ 轴抗弯惯性矩：}\ I_z=\frac{1}{12}bh^3\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

β 系 数 表

h/b	1	1.5	2	2.5	3	5	10	∞
β 值	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.291	0.312	0.333

(2) 组合工字形截面(图 1-3b)

$$\left.\begin{aligned}&A_x=ht_1+2bt_2\\&A_y=ht_1\\&A_z=2bt_2\\&I_x\approx\frac{1}{3}(ht_1^3+2bt_2^3)\\&I_y=\frac{1}{6}b^3t_2\\&I_z=\frac{1}{12}h^3t_1+2bt_2\left(\frac{h-t_2}{2}\right)^2\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$



(a) (b)

图 1-4

根据单元互相连接处的构造，节点的受力状态可以是铰接的(如桁架，图 1-4a)，或者是刚接

的(如刚架,图 1-4b),或者是刚铰混合的(图 1-10d)。

由于在连续体中不存在杆系结构中的自然划分,而需要人工进行划分。这时把连续体划分成许多小的单元,这些单元在平面应力(应变)问题的情况下,可以是三角形的或四边形的(图 1-5b);在板弯曲的情况下,可以是三角形的(图 1-5c)也可以是四边形或矩形的;在空间连续体的情况下,可以是正方形的(图 1-5d);在壳体的情况下,可以是三角形平板(图 1-5b 的三角形和图 1-5c 的组合)或曲面形的(图 1-5e)。

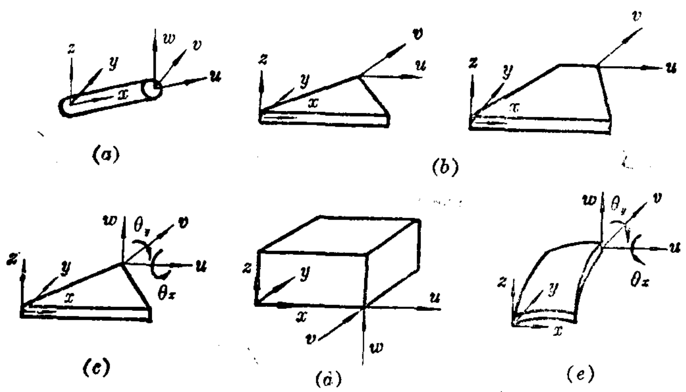


图 1-5

实际上各单元不只是在节点处互相连接,而在公共边上也互相连接。为了能够应用杆系结构矩阵分析的原理,假设单元仅在节点处互相连接。这就意味着只要求在节点处满足变形协调条件。很明显这样就放松了沿单元公共边的变形协调条件,使得理想化后的结构比实际结构柔一些,就会发生图 1-6 的现象。因此,在选择单元的位移函数时,就应当注意使位移函数能保证沿公共边的变形协调条件。

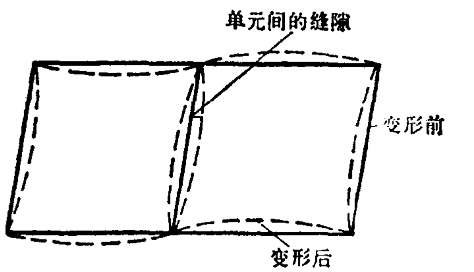


图 1-6

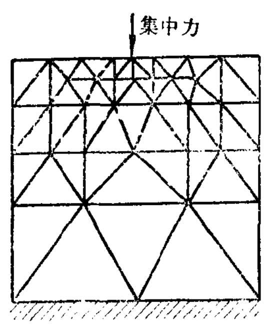


图 1-7

采用有限元法分析结构所得结果的精度随网格加密、单元数目的增加而增高,然而这样就会增加计算机内存的存贮量,并增加运算时间和费用。

在有些情况下可以采用分级划分,在平面应力问题中应力高度集中的地方,网格密一些,如集中力附近(图 1-7)。这样处理既不失精度的要求,又能节省计算时间,比较经济。对于一个新的问题在选择网格时,事先不容易肯定应该划分为多少个单元,才能够得到满意的解答,这时可以参考已有的类似问题的网格,如无参考资料则必须采用不同的网格,进行计算比较。

由上可知，在连续体分析中不仅用到平衡条件，而且必须用到变形协调条件。因此，从某种意义上来讲连续体分析问题都是超静定问题。

§1-3 未 知 量

由于结构理想化后，各个单元仅在节点处连接，因此只有节点的量（节点位移或节点力）可以作为基本未知量。本书主要采用位移法（即刚度法）进行结构分析，所以节点位移为基本未知量。这时与结构节点位移 $\boldsymbol{\Delta}$ 相应的为节点力 $\boldsymbol{P}$，彼此一一对应。例如图 1-8a 的桁架可能发生的节点位移向量为

$$\boldsymbol{\Delta}=\{\Delta_1\ \ \Delta_2\ \ \Delta_3\ \ \Delta_4\ \ \Delta_5\} \tag{1-3}$$

相应地有节点力向量

$$\boldsymbol{P}=\{P_1\ \ P_2\ \ P_3\ \ P_4\ \ P_5\} \tag{1-4}$$

彼此均为 5 个分量，各个分量彼此互相对应。在进行节点未知量编号之前，首先应该编好节点号。节点编号的好坏直接影响计算精度，应尽量使每个单元的两端节点号差值最小，详见第五章。对于同一结构，由于不同的理想化，未知量总数也会不相同。下面为了介绍常见结构在一般情况下如何进行节点位移未知量编号，首先要搞清楚每个节点可能发生什么位移？这些位移将如何排列。

1. 桁架（图 1-8a）

在外力作用下，桁架各单元不是受压就是受拉。对于平面桁架每个节点可能发生沿两个坐标轴方向的线位移，其排列顺序为先水平位移后竖向位移：

$$\boldsymbol{\delta}_i=\{u_i\ \ v_i\} \tag{1-5}$$

式中 δ_i——第 i 节点的位移未知量，

u_i 和 v_i 分别表示沿 x 和 y 方向的线位移。

对于空间桁架单元情况下（图 1-5a），每个节点沿 x、y、z 坐标轴可能有三个线位移：

$$\boldsymbol{\delta}_i=\{u_i\ \ v_i\ \ w_i\} \tag{1-6}$$

2. 连续梁（图 1-8b）

通常对于连续梁不考虑轴向变形。由于节点可以在支座处也可以在集中荷载作用处或变截面处，所以每个节点只有竖向线位移 v 和转角 θ_z。

因此连续梁的节点位移为：

$$\boldsymbol{\delta}_i=\{v_i\ \ \theta_{iz}\} \tag{1-7}$$

这里 θ_{iz} 的第一个下标表示节点号，第二个下标表示转角所绕的轴。

如果连续梁的节点均在支座上，则节点只有一个位移未知量 θ_z。

3. 平面刚架（图 1-8c）

由于平面刚架各个单元在节点处刚性连接，所以在一般情况下，任一节点除了线位移 u_i 和 v_i 外，还有转角 θ_{iz}。因此，平面刚架的节点位移未知量顺序为：

$$\boldsymbol{\delta}_i=\{u_i\ \ v_i\ \ \theta_{iz}\} \tag{1-8}$$

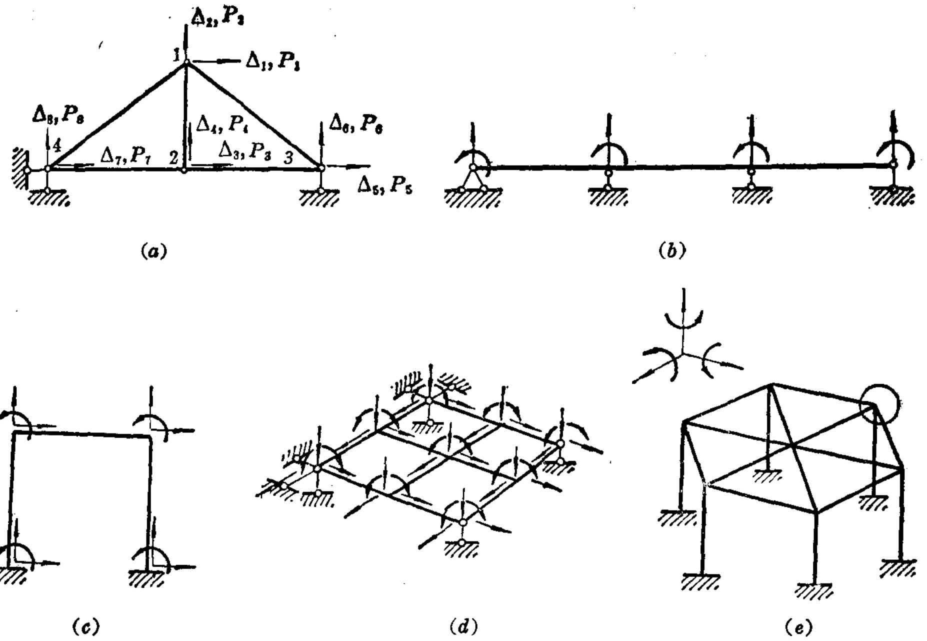


图 1-8

4. 交叉梁(图 1-8*d*)

交叉梁与平面刚架的差别主要在于荷载作用的方向。在平面刚架的情况下，荷载作用在刚架平面内。如果荷载作用在垂直于刚架所在的平面，这就成为交叉梁。因此，两种情况下的节点受力状态是不相同的。在交叉梁的情况下，在节点上汇交着各个方位的梁，因此要考虑可能沿 x 和 y 两个坐标轴方向的转角 θ_{ix} 和 θ_{iy}，以及在荷载作用方向上可能产生的位移 w，所以节点位移未知量的顺序为：

$$\delta_i=\{w_i\ \ \theta_{ix}\ \ \theta_{iy}\} \tag{1-9}$$

5. 空间刚架(图 1-8*e*)

空间刚架每个节点可能有三个线位移 u_i、v_i 和 w_i 及三个转角 θ_{ix}、θ_{iy} 和 θ_{iz}。

通常按下列顺序来排列节点 i 的位移未知量，这就叫做**广义节点位移向量**，其分量为线位移和转角。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_i&=\{u_i\ \ v_i\ \ w_i\ \ \theta_{ix}\ \ \theta_{iy}\ \ \theta_{iz}\} \qquad (1\text{-}10)\\&=\{\delta_1\ \ \delta_2\ \ \delta_3\ \ \delta_4\ \ \delta_5\ \ \delta_6\}\end{aligned}$$

相应的节点力向量 F_i 也是**广义节点力向量**，其分量为力和力矩：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_i&=\{F_{ix}\ \ F_{iy}\ \ F_{iz}\ \ M_{ix}\ \ M_{iy}\ \ M_{iz}\} \qquad (1\text{-}11)\\&=\{F_1\ \ F_2\ \ F_3\ \ F_4\ \ F_5\ \ F_6\}\end{aligned}$$

6. 平面问题和空间问题

假设平面问题或空间问题的单元各边在节点处铰接，因此对于平面问题，每个节点的可能位移为 u_i 和 v_i(图 1-5*b*)，其排列顺序同式(1-5)。

在空间问题(图 1-5*d*)时，每个节点的可能位移为 u_i、v_i 和 w_i，其排列顺序同式(1-6)。

7. 板弯曲问题(图 1-5c)

板弯曲问题与平面问题的区别，主要在于荷载的作用方向。当荷载作用在板平面内时称为**平面应力问题**，而当荷载垂直作用于板平面时就成为**板弯曲问题**。这时每个节点的可能位移与交叉梁相同，其排列顺序见式(1-9)。

一般说来，节点位移未知量的排列顺序按照坐标轴 x、y、z 的顺序，先排线位移后排转角。

对于连续梁或平面刚架都不考虑轴向变形的影响，只有在轴向力的效应非常重要的情况下才必须考虑。

已知一般节点的基本未知量后，最后来研究支座节点的未知量编号。考虑支座节点的约束情况而进行未知量编号，实质上就是对结构进行支座约束的处理。这是结构分析中非常重要的一环。

通常约定在支座节点的某一位移未知量方向有约束，则认为该未知量的**约束特征数**以 1 表示，如无约束则以 0 表示该未知量的约束特征数。显然，有约束时则无未知量，无约束时则有未知量。对于常见的平面刚架的支座未知量约束特征数见图 1-9。例如滚动铰支座，因 $u\neq0$(无约束)、$v=0$(有约束)、$\theta_z\neq0$(无约束)，故约束特征数为 0 1 0。

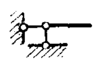
支座名称	形　　状	约束特征数
固定端支座		1 1 1
滑动支座		0 1 1
固定铰支座		1 1 0
滑动支座		1 0 1
滚动铰支座		0 1 0

图 1-9

有关弹性支承的处理见第九章。

例题 1-1 试对图 1-10 的结构进行节点未知量编号

解 (1) 图 1-10a 为一连续梁，先编好节点号和单元号。这时每个节点仅有一个未知量 θ_z。

本例题中，为了醒目起见，将节点未知量编号列表，在以后的例题中就不再列表，可直接写在节点号旁边的方框内。

节点号	*1*	*2*	*3*
未知量编号	1	2	3

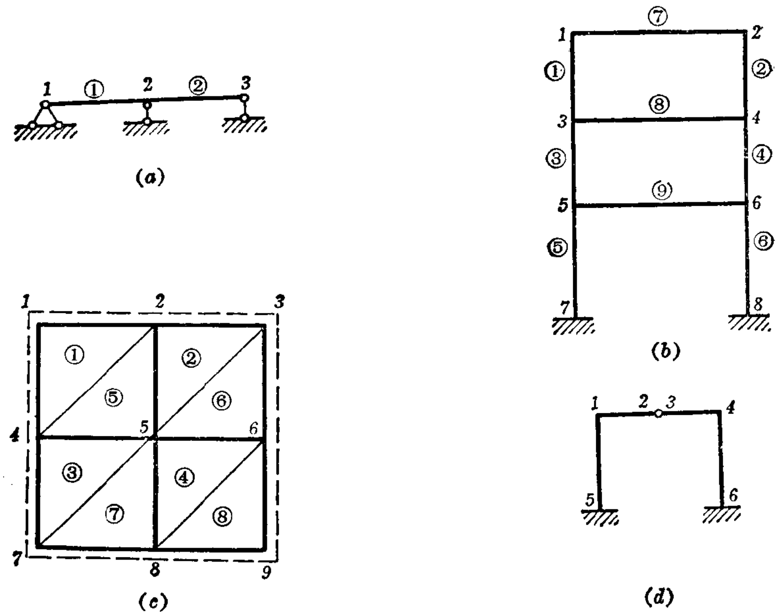


图 1-10

(2) 图 1-10b 为一三层刚架，在图上已编好节点号和单元号。这时每个节点的三个未知量按式(1-8)的顺序排列。

节点号	1	2	3	4
未知量编号	1 2 3	4 5 6	7 8 9	10 11 12
节点号	5	6	7	8
未知量编号	13 14 15	16 17 18	0 0 0	0 0 0

(3) 图 1-10c 为四周简支板，划分成 8 个三角形单元。这时未知量按式(1-9)顺序排列。

节点号	1	2	3	4
未知量编号	0 0 0	0 1 0	0 0 0	0 0 2
节点号	5	6	7	8
未知量编号	3 4 5	0 0 6	0 0 0	0 7 0
节点号	9			
未知量编号	0 0 0			

讨论 1. 如果在平面刚架的单元中间出现一个铰（图 1-10d），这时在铰接处应是两个转角未知量。因此，对铰节点应多编一个节点号，相邻两个节点号的线位移相同仅转角不同。在一般情况下，图 1-10d 的未知量编号如下(注意节点 2 和 3 的未知量编号)：

节点号	1	2	3	4	5	6
未知量编号	1 2 3	4 5 6	4 5 7	8 9 10	0 0 0	0 0 0

上述处理铰接点的方法比较灵活，程序简单，但增加了未知量(多一个转角)。

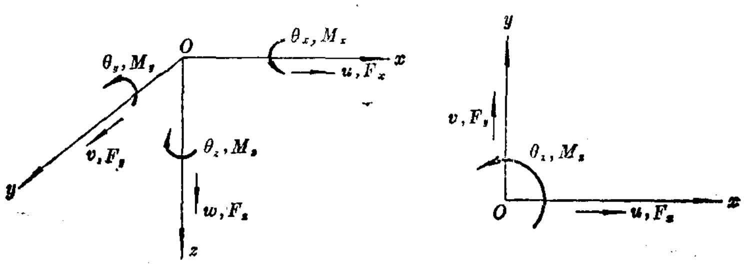
2. 如果图 1-10b 不考虑轴向变形，则每一层只有一个水平位移未知量，这时在同一层的水平位移只编一个号。这样就可以处理不考虑轴向变形的情况。于是图 1-10b 的刚架节点未知量编号就改变为

节点号	1	2	3	4
未知量编号	1 0 2	1 0 3	4 0 5	4 0 6

节点号	5	6	7	8
未知量编号	7 0 8	7 0 9	0 0 0	0 0 0

§1-4 坐标系与单元定位向量

在进行推导力和位移之间关系式时，首先应确定节点的位置。这时应注意区别整体坐标系与局部坐标系。本书约定采用**右手旋转**直角坐标系作为**整体坐标系**(图 1-11)。



(a)
空间坐标系

(b)
平面坐标系

图 1-11

图 1-11a 适用于交叉梁系、板壳等空间问题，图 1-11b 适用于平面刚架等平面问题。

凡位移、作用力的方向与图示坐标轴正方向一致者，规定为正。

凡转角和力矩的旋转方向使右手拇指指向坐标轴的正方向者，规定为正值。

图 1-11 上的力和位移均为正值。

在推导单元刚度矩阵时最适合采用**局部坐标系**，这时加“′”来表示。通常，局部坐标系的原点设置在单元连接节点的始节点。以单元轴线作为局部坐标系的 x' 轴，即沿始节点到终节点的方向作为 x' 轴的正方向。这样确定了单元的局部坐标系就确定了单元连接节点，即每个单元的

始终节点号。为了便于区别，对单元还要进行编号，用圆圈内的数字来表示单元的顺序号，比如③表示第 3 号单元。由于单元编号不影响计算结果，所以可以任意编排。

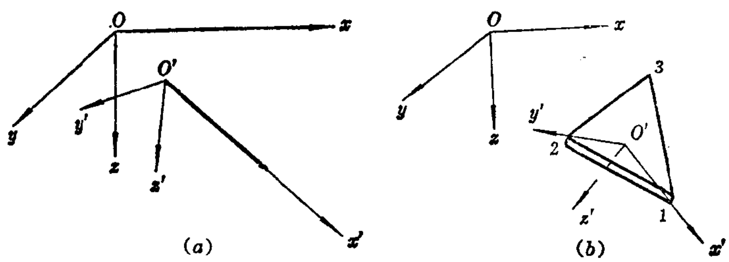


图 1-12

在图 1-12*a* 上画出空间桁架的局部坐标系，其它杆系结构的局部坐标系将在第三章中详细讨论。

对于空间板单元，往往选取单元的形心 O' 作为坐标原点，当然也可以选择任意节点作为坐标原点。例如图 1-12*b* 为一三角形板单元的局部坐标系，为了简化计算，选择 $O'x'$ 轴平行于 xOy 平面，可以使 $O'x'$ 的一个方向余弦为零。单元的连接节点由 Ox 轴到 Oy 轴，按右手旋转方向编排，这样使得计算时的三角形板单元的面积为正值。

现在以平面刚架为例，知道了节点编号 i、节点未知量编号 $\boxed{\times\times\times}$ 以及单元编号ⓜ和单元连接节点编号之后，就可以确定每个单元的定位向量。

定位向量是按单元连接节点编号由各节点未知量编号所组成，它不但用来确定单元刚度矩阵元素在结构刚度矩阵中的位置，以及单元节点位移向量 δ 在整个结构节点位移向量 Δ 中的位置，而且用以确定单元节点力向量 $\boldsymbol{F}$ 的各分量在结构节点力向量 $\boldsymbol{P}$ 中的位置。因此，借助定位向量可以很方便地解决计算机自动化计算中所需的信息。

例题 1-2 试编出例题 1-1 各单元的定位向量。

解 （1）图 1-10*a* 的连续梁

单元号	连接节点	单元定位向量
①	1 2	1 2
②	2 3	2 3

（2）图 1-10*b* 的刚架

单元号	连接节点	单元定位向量
①	3 1	7 8 9 1 2 3
②	4 2	10 11 12 4 5 6
③	5 3	13 14 15 7 8 9
④	6 4	16 17 18 10 11 12
⑤	7 5	0 0 0 13 14 15
⑥	8 6	0 0 0 16 17 18
⑦	1 2	1 2 3 4 5 6
⑧	3 4	7 8 9 10 11 12
⑨	5 6	13 14 15 16 17 18