401

高等学校教学用书

控制不等式基础

王伯英　编著

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

控制不等式基础

（附矩阵上的应用）

王伯英 编著

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

控制不等式基础

王伯英 编著

北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国科学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：4.375 字数：89 千
1990 年 4 月第 1 版 1990 年 4 月第 1 次印刷
印数：0 001—2 000

ISBN 7-303-00868-3/O · 129
定价：1.15 元

序　言

不等式早就在各个数学领域里发挥着重要的作用，这是人所共知的。例如，数学中许多结论的证明都要用到已知的不等式，或者所要证的结论常常归结为证明某个或某些新的不等式。但不等式作为一门系统的学科则是 1934 年 G.H. Hardy, J.E. Littlewood 和 G. Pólya 出版了著名的《不等式》(Inequalities[2]) 书以后的事。该书的影响是深远的。

在这以后，不等式的理论和应用得到了深入和广泛的发展。其中有一类不等式被称之为控制不等式（majorization）的发展尤为迅速。

控制不等式(两个向量之间的一组不等式)虽然早在1903年就已被 Muirhead 等人所注意和利用，到 1923 年 Schur 等人又进行了较大的发展，但成为一门新的学科还是近些年的事，那就是 A.W. Marshall 和 I. Olkin 于 1979 年出版了著名的书“Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications”。

这书发表后引起人们对控制不等式的广泛兴趣，它已被大量文献所引用。事实上，控制不等式也几乎渗入到各个数学领域而且处处扮演着精采角色。原因是它常能深刻地描述许多数学量之间的内在关系(参看本书第一章 § 8)，从而便于推得所需的结论；它还能把许多已有的从不同方法得来的不等式用一种统一的方法简便地推导出来；它更是推广已有的

不等式、发现新的不等式的一种强有力手段。因此控制不等式的理论和应用定然有着美好的发展前景。

本书主要介绍控制不等式的基础理论。作为应用的例子则比较详细地讨论它在矩阵上的应用。

本书是在讲义的基础上写成的，希望它能成为便于教学和便于自学的书，同时也希望它能成为进一步科学研究的参考书。

最后，请读者对本书提出宝贵意见。

王伯英

1988 年 1 月于北京师范大学

目　　录

第一章　控制不等式基础

这一章是控制不等式的基础理论，主要讨论控制不等式的基本性质，以及控制不等式的各式各样的丰富多采的等价条件，以便于在各个领域中应用。与控制不等式有密切关系的随机矩阵、凸函数、广义凸函数等在这一章里也进行较详细的讨论。本章§7介绍控制不等式的初等应用，目的在于显示控制不等式这样一个特色，即能用一种统一的方法方便地推导出大量的已知的不等式，同时也顺便得到新的不等式。§8简要介绍各个数学领域存在控制关系的例子，目的是展示一下控制不等式的理论和应用的广阔前景。

下面列举几个通用的记号：

$\boldsymbol{C}$ 为复数域；$\boldsymbol{R}$ 为实数域；$\boldsymbol{R}_+$ 为非负实数；$\boldsymbol{R}_{++}$ 为正实数；$\boldsymbol{I}$ 为实数轴上的开或闭区间。

$\boldsymbol{C}^n$，$\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{R}_+^n$，$\boldsymbol{R}_{++}^n$，$\boldsymbol{I}^n$ 分别表示具有 n 个相应分量的行向量的全体。

$\boldsymbol{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{R}_+^{m\times n}$，$\boldsymbol{R}_{++}^{m\times n}$ 分别表示相应的 m 行 n 列矩阵的全体。

对于 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{C}^n$（或 $\boldsymbol{R}^n$），用 $|x|$ 表示分量取绝对值后的行向量，即 $|x|=(|x_1|,\cdots,|x_n|)\in\boldsymbol{R}_+^n$；用 x^* 表示 x 的共轭转置，即 $x^*=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^T$。

§1 控制不等式的基本性质

对于 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n$，把 x 的分量排成递减的次序后记作

$$x\downarrow=(x_{[1]},\cdots,x_{[n]}),\ \text{即}\ x_{[1]}\geqslant\cdots\geqslant x_{[n]}.$$

把 x 的分量排成递增的次序后记作

$$x\uparrow=(x_{(1)},\cdots,x_{(n)}),\ \text{即}\ x_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}.$$

显然必存在置换矩阵 G_1 和 G_2 使 $x\downarrow=xG_1$，$x\uparrow=xG_2$，也有

$$\sum_{i=1}^{k}x_{(i)}\leqslant\sum_{i=1}^{k}x_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}x_{[i]},\quad k=1,\cdots,n. \tag{1}$$

若 $x,y\in \boldsymbol{R}^n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{k}y_{[i]},k=1,\cdots,n-1$$

且

$$\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}=\sum_{i=1}^{n}y_{[i]},$$

则称 x 被 y 所(强)控制,或说 y 控制了 x，记作

$$x\prec y.$$

若 x,y 只满足

$$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{k}y_{[i]},\ k=1,\cdots,n,$$

则称 x 被 y 下(弱)控制,记作

$$x\prec_w y.$$

若 x,y 满足

$$\sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_{(i)}, \quad k=1,\cdots,n,$$

则称 x 被 y 上(弱)控制，记作

$$x \prec^{w} y.$$

又若 $x \prec y$ 但$x\downarrow \neq y\downarrow$即不存在置换矩阵$G$使 $x=yG$，则称 x 被 y 严格控制并记作

$$x \ll y.$$

注意：记号 $x \leqslant y$ 表示 $x_i \leqslant y_i, i=1,\cdots,n$。

显然 $x \prec y$ 与 x, y 的分量排列次序无关，而 $x \leqslant y$ 则与它们的分量排列次序有关。

命题 1.1 对于 $x,y,z \in \boldsymbol{R}^n$，有

(a) $x \prec y, y \prec z \Longrightarrow x \prec z$;

$x \prec_w y, y \prec_w z \Longrightarrow x \prec_w z$;

$x \prec^w y, y \prec^w z \Longrightarrow x \prec^w z$.

(b) $x \prec y, y \prec x \Longleftrightarrow x = yG$，$G$ 为置换矩阵；

$x \prec_w y, y \prec_w x \Longleftrightarrow x = yG$，$G$ 为置换矩阵；

$x \prec^w y, y \prec^w x \Longleftrightarrow x = yG$，$G$ 为置换矩阵。

(c) $x \prec y \Longleftrightarrow -x \prec -y$.

(d) $x \prec_w y \Longleftrightarrow -x \prec^w -y$.

(e) $x \prec y \Longleftrightarrow x \prec_w y$ 且 $x \prec^w y$.

(f) $x \prec_w y \Longleftrightarrow (x_{[1]},\cdots,x_{[k]}) \prec_w (y_{[1]},\cdots,y_{[k]}), k=1,\cdots,n$.

(g) $x \prec^w y \Longleftrightarrow (x_{[k]}, \cdots, x_{[n]}) \prec^w (y_{[k]}, \cdots, y_{[n]})$, $k=1,\cdots,n$.

(h) $x \prec y \Longrightarrow y_{[1]} \geqslant x_i \geqslant y_{[n]}, i=1,\cdots,n$.

证 由定义直接推得。 ‖

命题 1.2 设 $x, y \in R^n$，则 $x \prec y$ 的充要条件是存在某 $m(1 \leqslant m \leqslant n)$，使得 $(x_{[1]}, \cdots, x_{[m-1]}) \prec_w (y_{[1]}, \cdots, y_{[m-1]})$，$(x_{[m+1]}, \cdots, x_{[n]}) \prec^w (y_{[m+1]}, \cdots, y_{[n]})$ 且

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i.$$

证 必要性由命题 1.1 $(f)(g)$ 表明。

充分性：当 $1 \leqslant k \leqslant m-1$，由 $(x_{[1]}, \cdots, x_{[m-1]}) \prec_w (y_{[1]}, \cdots, y_{[m-1]})$ 可得 $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^k y_{[i]}$；当 $m \leqslant k \leqslant n$ 时，由 $(x_{[m+1]}, \cdots, x_{[n]}) \prec^w (y_{[m+1]}, \cdots, y_{[n]})$ 有

$$\sum_{i=k+1}^n x_{[i]} \geqslant \sum_{i=k+1}^n y_{[i]},$$

再由

$$\sum_{i=1}^n x_{[i]} = \sum_{i=1}^n y_{[i]}$$

也得

$$\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^k y_{[i]}. \qquad \|$$

命题 1.3 设 $x, y \in R^n$，x, y 的分量为某一种次序排列。

(a) 若 $x \prec_w y$，则 $\sum_{i=1}^k x_i \leqslant \sum_{i=1}^k y_{[i]}$， $k = 1, \cdots, n$。

(b) 若 $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^k y_i$， $k = 1, \cdots, n$，则 $x \prec_w y$。

(c) 若 $x\leqslant y$，则 $x\prec_w y$ 且 $y\prec^w x$。

证 可由(1)式证明(略)。‖

命题 1.4 设 $x,y\in \boldsymbol{R}^n$，$e=(1,\cdots,1)$，$e_i=\overbrace{(0,\cdots,0,i}^{i},0,\cdots,0)$。

(a) $x\prec e\Longleftrightarrow x=e$。

(b) $x\prec e_i\Longleftrightarrow x_j\geqslant 0$，$j=1,\cdots,n$，且 $\sum\limits_{j=1}^{n}x_j=1$。

(c) $(\bar{y},\cdots,\bar{y})\prec y$，即 $\bar{y}e\prec y$，其中 $\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$。

(d) 若 $y\in\boldsymbol{R}_+^n$ 且 $e_i\prec y$，则 $y=e_j$（某个 j）。

证 (a)与(b)由命题 1.1 (h)表明。

(c) 假定有某个 k 使 $k\bar{y}>\sum\limits_{i=1}^{k}y_{[i]}$，则 $\bar{y}>y_{[k]}\geqslant\cdots\geqslant y_{[n]}$，因而 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_{[i]}=\sum\limits_{i=1}^{k}y_{[i]}+\sum\limits_{i=k+1}^{n}y_{[i]}<k\bar{y}+(n-k)\bar{y}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_{[i]}$，矛盾。

(d) 由 $e_i\prec y$ 知 $y_{[1]}\geqslant 1$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_{[i]}=1$，再由 $y\in\boldsymbol{R}_+^n$ 即得 $y_{[1]}=1$，$y_{[i]}=0$，$i=2,\cdots,n$。‖

下面讨论由两个控制不等式组成一个控制不等式的问题。

命题 1.5 设 $x,y\in\boldsymbol{R}^n$，$u,v\in\boldsymbol{R}^m$

(a) 若 $x\prec_w y$，$u\prec_w v$，则 $(x,u)\prec_w(y,v)$。

(*b*) 若 $x\prec^{w}y, u\prec^{w}v$，则 $(x,u)\prec^{w}(y,v)$。

证 (*a*) 令 $\tilde{x}=(x,u)$，$\tilde{y}=(y,v)$，则有

$$\sum_{i=1}^{k}\tilde{x}_{[i]}=\sum_{i=1}^{r}x_{[i]}+\sum_{i=1}^{s}u_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{r}y_{[i]}+\sum_{i=1}^{s}v_{[i]},$$

其中 $r+s=k$。 注意到上式右端是 $\tilde{y}$ 的某 k 个分量之和，故由(1)式得

$$\sum_{i=1}^{r}y_{[i]}+\sum_{i=1}^{s}v_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\tilde{y}_{[i]}.$$

(*b*) 证明类似或用(*a*)与命题 1.1 (*d*)。‖

命题 1.6 设 $x,y\in \boldsymbol{R}^n$， $u,v\in\boldsymbol{R}^m$ 且 $x\prec y$，$u\prec v$，则 $(x,u)\prec(y,v)$。

证 联合命题 1.5 与命题 1.1 (*e*)。‖

命题 1.7 设 $x,y\in\boldsymbol{R}^n$，$u\in\boldsymbol{R}^m$

(*a*) 若 $(x,u)\prec_{w}(y,u)$，则 $x\prec_{w}y$。

(*b*) 若 $(x,u)\prec^{w}(y,u)$，则 $x\prec^{w}y$。

(*c*) 若 $(x,u)\prec(y,u)$，则 $x\prec y$。

证 (*a*) 令 $\tilde{x}=(x,u),\tilde{y}=(y,u)$，由 $\tilde{x}\prec_{w}\tilde{y}$ 就有

$$\sum_{i=1}^{k}\tilde{y}_{[i]}=\sum_{i=1}^{r}y_{[i]}+\sum_{i=1}^{s}u_{[i]}\geqslant\sum_{i=1}^{k}\tilde{x}_{[i]}\geqslant\sum_{i=1}^{r}x_{[i]}+\sum_{i=1}^{s}u_{[i]},$$

这表明 $\sum_{i=1}^{r}x_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{r}y_{[i]}$，显然可取不同的 k 使 $r=1,\cdots,n$。

(*b*) 与 (*c*) 的证明类似。‖

注意：由 $(x,u)\prec(y,v)$ 及 $u\prec v$ 并不能推得 $x\prec y$.

下面讨论如何由弱控制不等式经过修改或扩充而成为强控制不等式的问题.

命题 1.8 若 $x,y\in R^n$ 且 $x\prec_w y$，则存在与 y 至多只有一个不同分量的 $\tilde{y}$ 使 $x\prec\tilde{y}$.

证 假定 $y_t=y_{[n]}$，令 $\delta=\sum_{i=1}^n y_i-\sum_{i=1}^n x_i$，则 $\tilde{y}=y-\delta e_t$ 即为所求. 也可写为 $x\prec y\downarrow-\delta e_n$. ‖

命题 1.9 设 $x,y\in R^n$.

(a) 若 $x\prec_w y$，则存在 x_{n+1}，$y_{n+1}\in R$ 使 $(x,x_{n+1})\prec(y,y_{n+1})$.

(b) 若 $x\prec^w y$，则存在 $x_0,y_0\in R$ 使 $(x_0,x)\prec(y_0,y)$.

证 (a) 取 $x_{n+1}=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$，$y_{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1}x_i-\sum_{i=1}^n y_i$.

(b) 取 $x_0=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$，$y_0=\sum_{i=0}^n x_i-\sum_{i=1}^n y_i$. ‖

定理 1.10 设 $x\in R_+^n$，$y\in R^n$ 且 $x\prec_w y$，令 $\delta=\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)$，则

$$\Big(x,\overbrace{\frac{\delta}{n},\cdots,\frac{\delta}{n}}^{n}\Big)\prec(y,\overbrace{0,\cdots,0}^{n}).$$

证 记上式左边向量为 $\tilde{x}$，右边为 $\tilde{y}$，显然有

$$\sum_{i=1}^{2n} \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{2n} \tilde{y}_i.$$

现在若 $k \geqslant n$，则由 $x \in \boldsymbol{R}_+^n$ 及 $\delta \geqslant 0$ 就有

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{2n} \tilde{x}_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_{[i]}.$$

故我们只需考虑 $k < n$ 的情形。这时可写

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_{[i]} = \sum_{i=1}^{r} x_{[i]} + (k-r)\frac{\delta}{n} \tag{2}$$

注意到 $x \prec_w y$ 及 $(k-r)\sum_{i=r+1}^{n} y_{[i]} \leqslant$

$(n-r)\sum_{i=r+1}^{k} y_{[i]}$（看练习 1.1），就有

$$\frac{k-r}{n}\delta = \frac{k-r}{n-r}\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) \leqslant \frac{k-r}{n-r}\sum_{i=1}^{n}(y_{[i]} - x_{[i]}) \leqslant \frac{k-r}{n-r}\sum_{i=1}^{r}(y_{[i]} - x_{[i]}) + \frac{k-r}{n-r}\sum_{i=r+1}^{n} y_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{r}(y_{[i]} - x_{[i]}) + \sum_{i=r+1}^{k} y_{[i]} = \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} - \sum_{i=1}^{r} x_{[i]}.$$

代入(2)式即得 $\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_{[i]}$. ‖

下面是更一般的情形。

定理 1.11 设 $u \in \boldsymbol{R}^m$，$y \in \boldsymbol{R}^n$，$1 \leqslant m < n$，则存在 $v \in \boldsymbol{R}^{n-m}$ 使得 $(u, v) \prec y$ 的充要条件是 $u \prec_w (y_{[1]}, \cdots, y_{[m]})$ 且

$u \prec^w (y_{(1)}, \cdots, y_{(m)})$.

证 必要性由命题 1.1 $(f)(g)$ 表明。

充分性：令 $\delta = \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{m} u_i$，$v = \left(\frac{\delta}{n-m}, \cdots, \frac{\delta}{n-m}\right) \in R^{n-m}$ 及 $x = (u; v)$，利用

$$u \prec_w (y_{[1]}, \cdots, y_{[m]}),$$

则对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 便存在 $0 \leqslant r \leqslant k$，使得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} &= \sum_{i=1}^{r} u_{[i]} + \frac{k-r}{n-m}\delta = \left(1 - \frac{k-r}{n-m}\right)\sum_{i=1}^{r} u_{[i]} \\ &\quad + \frac{k-r}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{[i]} - \sum_{i=r+1}^{m} u_{[i]}\right) \leqslant \left(1 - \frac{k-r}{n-m}\right) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{r} y_{[i]} + \frac{k-r}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} y_{[i]} - \sum_{i=r+1}^{m} u_{[i]}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} y_{[i]} + \frac{k-r}{n-m}\left(\sum_{i=r+1}^{n} y_{[i]} - \sum_{i=r+1}^{m} u_{[i]}\right).\end{aligned}$$

又由 $u \prec^w (y_{(1)}, \cdots, y_{(m)})$，知

$$\sum_{i=r+1}^{m} u_{[i]} \geqslant \sum_{i=n-m+r+1}^{n} y_{[i]},$$

代入上式得

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{r} y_{[i]} + \frac{k-r}{n-m}\sum_{i=r+1}^{n-m+r} y_{[i]}.$$

但是$(k-r)\sum_{i=r+1}^{n-m+r} y_{[i]} \leqslant (n-m)\sum_{i=r+1}^{k} y_{[i]}$（练习1.1）

故有

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{r} y_{[i]} + \sum_{i=r+1}^{k} y_{[i]} = \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}.$$

最后注意到

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} u_i + \delta = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

即得 $(u,v)=x\prec y$. ‖

推论 1.12 设 $y\in \boldsymbol{R}^n, y_{[1]}\geqslant \alpha \geqslant y_{[n]}$，$\beta=\sum_{i=1}^{n} y_i$，则

$$\left(\alpha, \frac{\beta-\alpha}{n-1}, \cdots, \frac{\beta-\alpha}{n-1}\right)\prec y.$$

证 这是定理 1.11 中 $m=1$ 的特殊情形. ‖

关于向量和与重排向量和有如下的控制关系.

定理 1.13 设 $x, y, u, v\in \boldsymbol{R}^n$

(a) 若 $x\prec_w y, u\prec_w v$，则 $x+u\prec_w y\downarrow+v\downarrow$.

(b) 若 $x\prec^w y, u\prec^w v$，则 $x+u\prec^w y\downarrow+v\downarrow$.

(c) 若 $x\prec y, u\prec v$，则 $x+u\prec y\downarrow+v\downarrow$.

证 (a) 因为

$$\sum_{i=1}^{k}(x+u)_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} + \sum_{i=1}^{k} u_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$$

$$+\sum_{i=1}^{k} v_{[i]} = \sum_{i=1}^{k}(y\downarrow+v\downarrow)_{[i]}.$$

(b)与(c)同理。‖

定理 1.14 设 $x,y\in \boldsymbol{R}^n$，则

$$x\downarrow + y\uparrow \prec x + y \prec x\downarrow + y\downarrow.$$

证 右边控制关系由命题 1.13 (c) 表明。下面证明左边控制关系。

显然可假定 $x = x\downarrow$。我们先看 $n = 2$ 的情形。

这时若 $y_1 \geqslant y_2$，则 $x + y = x\downarrow + y\downarrow$，由命题 1.13$(c)$ 知 $x\downarrow + y\uparrow \prec x + y$；若 $y_1 < y_2$，则 $x\downarrow + y\uparrow = x + y$，故 $n = 2$ 时结论成立。当 $n > 2$ 时，若 $y = y\uparrow$ 结论显然成立。今假定存在 $j < k$ 使得 $y_j > y_k$。在 y 中交换分量 y_j，y_k 后得到的向量记作 $\tilde{y}$，则 $x + \tilde{y}$ 与 $x + y$ 只有两个分量不同。利用刚证明的 $n = 2$ 的情形及命题 1.6 即得 $x + \tilde{y} \prec x + y$。若 $\tilde{y} = y\uparrow$ 则已证完，不然的话用同样的方法做下去经过有限步后便得 $x\downarrow + y\uparrow \prec \cdots \prec x + \tilde{y} \prec x + y$。‖

定理 1.15 设 $x^{(j)} \prec y \in \boldsymbol{R}^n$，$j = 1,\cdots, m$，$a_j \geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{m} a_j = 1$，则 $\sum_{j=1}^{m} a_j x^{(j)} \prec y$。

证 因为
$$\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x^{(j)}\right)_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} a_j x^{(j)}_{[i]}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} = \sum_{i=1}^{k} y_{[i]},$$
而
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x^{(j)}\right)_i = \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} x_i^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} y_i.‖$$

关于重排乘积则有如下的结论。