经济应用数学 下册

《经济应用数学》编写组编

中国人民大学出版社

经 济 应 用 数 学

下 册

《经济应用数学》编写组 编

中 国 人 民 大 学 出 版 社

经 济 应 用 数 学（下册）

《经济应用数学》编写组　编

中国人民大学出版社出版发行
（北京西郊海淀路39号）
中国人民大学出版社印刷厂印刷
（北京鼓楼西大石桥胡同61号）
新 华 书 店 经 销

开本：787×1092毫米32开　印张：14.5插页6
1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷
字数：304 000　册数：1-21 000

ISBN7-300-00654-X

F·199　定价：4.95元

前　言

本书是参照我院本科《经济应用数学教学大纲》的要求，并根据函授教学的特点，为财经类大专函授生编写而成的教材。

全书分上、下两册。上册内容为函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学与二重积分。下册内容为无穷级数、常微分方程、线性代数、概率论与数理统计。每章书后均配有适当的习题。

本书为便于自学，力求通俗易懂。对基本概念与基本理论的叙述较为详细，且例题较多，并配有一定的经济实例。

参加上册编写工作的（以章节为序）有王新民、叶林、邓远能、徐致政、李仲莲、赵炯之等同志。

参加下册编写工作的有李博纳、郝家骁、李群、李仲莲等同志。

李博纳同志仔细审阅了本书的全稿，并提出了宝贵的意见，最后由郝家骁教授总纂、定稿。

由于编写时间仓促，且限于编者水平，教材内容肯定会有不妥之处，恳请广大读者提出批评与指正。

编者

1988年10月

目　　录

第九章　微分方程

§1　微分方程的概念

在不定积分中，给出了一个函数的导函数$y'=f(x)$，可以通过积分找到原函数$y=\int f(x)dx$。在实际问题中往往没有直接给出的导函数，而建立起来的是未知函数、自变量与未知函数的导数混在一起的关系式。下面来看两个实际问题。

例 1　某种商品的需求量D随价格P变化的变化率与需求量D成正比，与价格加上一个常数$P+b$成反比，求需求函数$D(P)$。

由题意，需求量D对价格P的变化率即D对P的导数，所以有

$$\frac{dD}{dP}=k\cdot\frac{D}{P+b}$$

其中，k为比例系数，k、b均为常数。

于是得到一个包含D'、D、P的方程式。要找$D(P)$，当然就不能简单地对方程右边进行积分了。

例 2　设t时刻的人口数为$P(t)$，出生率为m，死亡率为n，试确定人口数P与时间t的函数关系。

因为dt时间内人口的变化量dP应该为dt时间内出生人数

与死亡人数的代数和。所以有

$$dP=(mP-nP)dt=(m-n)Pdt$$

或

$$\frac{dP}{dt}=(m-n)P$$

于是得到一个包含P'、P的方程。

如何从这类方程中找到未知函数，就是这一章要介绍的主要内容。

我们先来介绍一些常用的名词和概念。

定义 1　含有自变量、未知函数以及未知函数的导数或微分的方程 $f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$，称为微分方程。

下列方程，都是微分方程。

（1）　$\frac{dy}{dx}=2x$

其中 x 是自变量，$\frac{dy}{dx}$是未知函数 y对 x 的导数。

（2）　$x+y+\frac{dy}{dx}=0$

其中 x 是自变量，$y=y(x)$ 是未知函数，$\frac{dy}{dx}$是未知函数对 x 的导数。

（3）　$\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{du}{dr}-6u=0$

其中r是自变量，$u(r)$是未知函数等等。

（4）　$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z$

其中x、y是自变量，$z=z(x, y)$是未知函数，$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$分别是未知函数$z$对$x$、$y$的一阶偏导数。

（5） $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0$

其中x、y是自变量，$\phi(x, y)$是未知函数，$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$分别是未知函数对$x$、$y$的二阶偏导数。

如果微分方程的未知函数为一元函数，则该方程称为常微分方程。未知函数为多元函数，从而出现多元函数的偏导数的方程，称为偏微分方程。上例方程中(1)、(2)、(3)为常微分方程，(4)、(5)则为偏微分方程。这一章，我们仅就常微分方程作简要介绍。

微分方程中出现的各阶导数的最高阶数，称为微分方程的阶。上列方程中（1）、（2）、（4）是一阶微分方程，（3）、（5）为二阶微分方程。

正如研究其它方程一样，关键是研究微分方程的解存在的规律及如何找微分方程的解。那么，首先应该明确什么是微分方程的解。

定义 2 如果一个不含导数或微分的函数代入微分方程后，能使方程两端恒等，则称此函数为该微分方程的解。

例如微分方程

$$x+y+\frac{dy}{dx}=0 \tag{9.1}$$

我们考虑函数$y=ce^{-x}-x+1$（c为任意常数），因为

$$y'=-ce^{-x}-1$$

代入（9.1）中，有

$$x+ce^{-x}-x+1-ce^{-x}-1=0$$

因此，$y=ce^{-x}-x+1$是微分方程（9.1）的解。

再如，$y=x^2+3$ 与 $y=x^2+c$（c 为任意常数）都是微分方程

$$\frac{dy}{dx}=2x \tag{9.2}$$

的解。

函数$u=c_1e^{3r}+c_2e^{-2r}$（c_1、c_2为任意常数）是微分方程

$$\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{du}{dr}-6u=0$$

的解，读者不妨自己验证。

如果微分方程的解中所含任意常数的个数等于微分方程的阶数，则此解称为微分方程的通解。在通解中给予任意常数以确定的值而得到的解，称为特解。

对于微分方程$\frac{dy}{dx}=2x$，$y=x^2+c$是通解，$y=x^2+3$则是常数$c=3$时的特解。

一般，特解都是将给定的条件代入通解，确定出任意常数的特定值而得到的。用来确定特解的条件，称为初始条件。

例 3　证明 $y=\frac{x^2}{3}+\frac{c}{x}$（$c$为任意常数）是微分方程

$$x\cdot\frac{dy}{dx}+y=x^2$$

的解，并求满足当$x=1$时，$y=1$条件下的特解。

证　由

$$y=\frac{x^2}{3}+\frac{c}{x} \tag{9.3}$$

有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}x-\frac{c}{x^2} \tag{9.4}$$

将（9.3）、（9.4）代入微分方程

$$左=x\left(\frac{2}{3}x-\frac{c}{x^2}\right)+\frac{x^2}{3}+\frac{c}{x}$$

$$=x^2$$

所以 $y=\frac{x^2}{3}+\frac{c}{x}$ 是微分方程的解。

将 $x=1$，$y=1$ 代入（9.3）式，得

$$c=\frac{2}{3}$$

所以满足初始条件的特解为

$$y=\frac{x^2}{3}+\frac{2}{3x}$$

§2　一阶可分离变量的微分方程

很多微分方程的求解，并不是都有规律可循，常常很不容易。这一章我们只介绍简单的一阶常微分方程和二阶常微分方程的求解。

一阶微分方程的通解含有一个任意常数。要确定这个任

意常数，必须给出一个初始条件。通常是给出 $x=x_0$ 时未知函数的对应值y_0，记作

$$y(x_0)=y_0 \quad 或 \quad y|_{x=x_0}=y_0$$

一、 一阶可分离变量的微分方程

在§1例 1 中给出了微分方程

$$\frac{dD}{dP}=k\cdot\frac{D}{P+b}$$

它之所以不能直接对方程右边进行积分，就因为右式中有 P 的未知函数 D。但是很容易看出，稍作变化，即可以将变量 D 与 P 分开，得到

$$\frac{dD}{D}=k\cdot\frac{dP}{P+b}$$

从而可以对方程两边分别积分得到函数 $D(P)$。

一般情况下，若一阶微分方程可写成

$$f_1(x)dx=f_2(y)dy \tag{9.5}$$

的形式，则称其为可分离变量的微分方程。

例如，下列微分方程

（1） $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

可写为

$$ydy=-xdx$$

（2） $$\frac{dy}{dx}=e^{x+y}(=e^x\cdot e^y)$$

可写为

$$\frac{dy}{e^y}=e^xdx$$

都是可分离变量的微分方程。

求已分离变量的一阶微分方程（9.5）的解，只要对方程两边同时取不定积分，得到

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + c \tag{9.6}$$

其中 c 为任意常数，只在一边加上任意常数即可。（9.6）式即为微分方程（9.5）的通解表达式。

与前边不定积分稍有区别的，是将$\int f_1(x)dx$只看作$f_1(x)$的一个原函数，而将积分常数单独写出。

例 1　解微分方程

$$\frac{dD}{D} = k \cdot \frac{dP}{P+b}$$

解　两边积分得

$$\ln D = k\ln(P+b) + c_1 \quad (c_1\text{为任意常数})$$

两边去对数，得

$$\begin{aligned} D &= e^{\ln(P+b)^k + c_1} \\ &= (P+b)^k e^{c_1} \qquad (e^{\ln x} = x) \\ &= c(P+b)^k \qquad (c = e^{c_1}) \end{aligned}$$

从而得到§1例 1 要求的需求函数$D(P)$。

注意，为了使结果形式简单，总是设法用最简便的方式写常数，有时甚至可以不改变常数的符号。

例 2　求微分方程

$$\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0$$

在满足初始条件 $y|_{x=3} = 4$ 时的特解。

解　分离变量得到

$$ydy = -xdx$$

两边分别积分为

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

整理得原方程的通解为

$$y^2 + x^2 = c$$

将初始条件$x = 3$，$y = 4$代入通解得

$$c = 25$$

所以满足初始条件$y|_{x=3} = 4$的特解为

$$y^2 + x^2 = 25$$

例 3　设连续复利的利息为i，$A = A(t)$为t时的总金额，求$A(t)$。

解　连续复利，即在瞬时间内总金额A都会有变化，且A对时间t的变化率等于利息率i与A的积。所以由题意有

$$\frac{dA}{dt} = iA$$

分离变量得到

$$\frac{dA}{A} = idt$$

两边分别积分，得

$$\ln A = it + c$$

$$A = e^{it+c} = ce^{it} \qquad (c\text{任意常数})$$

若设$t = 0$时，$A = A_0$，有

$$c = A_0$$

所以总金额对于时间的函数为$A = A_0e^{it}$。其中A_0为

$t=0$时的总金额。

例 4　我们介绍一个简化的宏观经济模型。假设存在如下经济规律：

储蓄与收入成正比，收入增加，储蓄增加；

投资与收入的变化率成正比，当收入的变化率增加，投资增加；

储蓄与投资相等；

初始年的收入为y_0。

则得下面模型：

$$\begin{cases} S(t)=\alpha y(t) & (9.7) \\ I(t)=\beta\dfrac{dy}{dt} & (9.8) \\ S(t)=I(t) \\ y|_{t=0}=y_0 \\ \alpha>0,\ \beta>0 \end{cases}$$

其中，S：储蓄，I：投资，y：收入，α，β为常数。

试根据上述模型找$S(t)$、$I(t)$、$y(t)$。

由（9.7）、（9.8）有：

$$\beta\frac{dy}{dt}=\alpha y$$

分离变量

$$\frac{dy}{y}=\frac{\alpha}{\beta}dt$$

解得

$$y=ce^{\frac{\alpha}{\beta}t}\qquad (c为任意常数)$$