

经济应用数学

下册

《经济应用数学》编写组编

中国人民大学出版社

经济应用数学

下册

《经济应用数学》编写组 编

中国人民大学出版社

经济应用数学(下册)

《经济应用数学》编写组 编

中国人民大学出版社出版发行

(北京西郊海淀路39号)

中国人民大学出版社印刷厂印刷

(北京鼓楼西大街石桥胡同61号)

新华书店经销

开本：787×1092毫米32开 印张：14.5插页6

1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷

字数：304 000 册数：1-21 000

ISBN7-300-00654-x

F·199 定价：4.95元

前 言

本书是参照我院本科《经济应用数学教学大纲》的要求，并根据函授教学的特点，为财经类大专函授生编写而成的教材。

全书分上、下两册。上册内容为函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学与二重积分。下册内容为无穷级数、常微分方程、线性代数、概率论与数理统计。每章书后均配有适当的习题。

本书为便于自学，力求通俗易懂。对基本概念与基本理论的叙述较为详细，且例题较多，并配有一定的经济实例。

参加上册编写工作的（以章节为序）有王新民、叶林、邓远能、徐致政、李仲莲、赵炯之等同志。

参加下册编写工作的有李博纳、郝家骠、李群、李仲莲等同志。

李博纳同志仔细审阅了本书的全稿，并提出了宝贵的意见，最后由郝家骠教授总纂、定稿。

由于编写时间仓促，且限于编者水平，教材内容肯定会有不妥之处，恳请广大读者提出批评与指正。

编者

1988年10月

目 录

第九章 微分方程	1
§1 微分方程的概念.....	1
§2 一阶可分离变量的微分方程.....	5
§3 一阶线性微分方程.....	18
§4 几种简单的二阶微分方程.....	29
§5 二阶常系数线性微分方程.....	33
习题九.....	41
第十章 无穷级数	45
§1 常数项级数概念.....	45
§2 无穷级数的基本性质.....	49
§3 正项级数的敛散性判别法.....	52
§4 交错级数敛散性的判别法.....	58
§5 幂级数.....	63
§6 泰勒公式与泰勒级数.....	73
§7 函数展开成幂级数.....	83
习题十.....	93
第十一章 行列式	100
§1 行列式概念.....	100
§2 行列式的性质.....	113
§3 按行(列)展开行列式.....	120

§4 克莱姆法则	127
习题十一	134
第十二章 矩阵	137
§1 矩阵概念	137
§2 矩阵的运算	142
§3 几种特殊矩阵	156
§4 分块矩阵	170
§5 逆矩阵	176
习题十二	184
第十三章 n维向量	191
§1 向量组与线性方程组	191
§2 向量的线性相关性	194
习题十三	204
第十四章 线性方程组	207
§1 矩阵的初等变换	207
§2 矩阵的秩	216
§3 线性方程组有解的判别定理	222
§4 线性方程组的解法及其解的结构	225
习题十四	249
第十五章 概率论的基本概念	256
§1 随机事件	257
§2 随机事件的概率	263
§3 条件概率、乘法公式、独立性	272
§4 全概公式与贝叶斯 (Bayes) 公式	279
习题十五	284
第十六章 随机变量及其分布	287

§1 随机变量及其分布函数	287
§2 离散型随机变量的概率分布	291
§3 连续型随机变量及概率密度函数	303
§4 随机变量函数的分布	313
习题十六	321
第十七章 多维随机变量及其分布	324
§1 二维随机变量及其概率分布	324
§2 随机变量函数的分布	337
习题十七	340
第十八章 随机变量的数字特征	343
§1 数学期望	343
§2 方差	351
§3 协方差和相关系数	357
§4 大数定律和中心极限定理	362
习题十八	368
第十九章 统计估值	370
§1 总体与样本	371
§2 概率密度(分布函数)的近似求法	374
§3 期望与方差的点估计	381
§4 期望与方差的区间估计	387
习题十九	396
第二十章 假设检验	399
§1 引言	399
§2 一个正态总体参数的假设检验	401
习题二十	411
第二十一章 回归分析简介	413

§1	一元线性回归	414
§2	一元非线性回归	430
	习题二十一	436
附表 1	标准正态分布表	
附表 2	泊松分布表	
附表 3	t 分布表	
附表 4	χ^2 分布表	
附表 5	F 分布表	
附表 6	检验相关系数的临界值表	

第九章 微分方程

§1 微分方程的概念

在不定积分中，给出了一个函数的导函数 $y' = f(x)$ ，可以通过积分找到原函数 $y = \int f(x)dx$ 。在实际问题中往往没有直接给出的导函数，而建立起来的是未知函数、自变量与未知函数的导数混在一起的关系式。下面来看两个实际问题。

例1 某种商品的需求量 D 随价格 P 变化的变化率与需求量 D 成正比，与价格加上一个常数 $P + b$ 成反比，求需求函数 $D(P)$ 。

由题意，需求量 D 对价格 P 的变化率即 D 对 P 的导数，所以有

$$\frac{dD}{dP} = k \cdot \frac{D}{P + b}$$

其中， k 为比例系数， k 、 b 均为常数。

于是得到一个包含 D' 、 D 、 P 的方程式。要找 $D(P)$ ，当然就不能简单地对方程右边进行积分了。

例2 设 t 时刻的人口数为 $P(t)$ ，出生率为 m ，死亡率为 n ，试确定人口数 P 与时间 t 的函数关系。

因为 dt 时间内人口的变化量 dP 应该为 dt 时间内出生人数

与死亡人数的代数和。所以有

$$dP = (mP - nP)dt = (m - n)Pdt$$

或

$$\frac{dP}{dt} = (m - n)P$$

于是得到一个包含 P' 、 P 的方程。

如何从这类方程中找到未知函数，就是这一章要介绍的主要内容。

我们先来介绍一些常用的名词和概念。

定义 1 含有自变量、未知函数以及未知函数的导数或微分的方程 $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ，称为微分方程。

下列方程，都是微分方程。

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

其中 x 是自变量， $\frac{dy}{dx}$ 是未知函数 y 对 x 的导数。

$$(2) \quad x + y + \frac{dy}{dx} = 0$$

其中 x 是自变量， $y = y(x)$ 是未知函数， $\frac{dy}{dx}$ 是未知函数对 x 的导数。

$$(3) \quad \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{du}{dr} - 6u = 0$$

其中 r 是自变量， $u(r)$ 是未知函数等等。

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

其中 x 、 y 是自变量， $z = z(x, y)$ 是未知函数， $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 分别是未知函数 z 对 x 、 y 的一阶偏导数。

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

其中 x 、 y 是自变量， $\phi(x, y)$ 是未知函数， $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ 分别是未知函数对 x 、 y 的二阶偏导数。

如果微分方程的未知函数为一元函数，则该方程称为常微分方程。未知函数为多元函数，从而出现多元函数的偏导数的方程，称为偏微分方程。上例方程中(1)、(2)、(3)为常微分方程，(4)、(5)则为偏微分方程。这一章，我们仅就常微分方程作简要介绍。

微分方程中出现的各阶导数的最高阶数，称为微分方程的阶。上列方程中(1)、(2)、(4)是一阶微分方程，(3)、(5)为二阶微分方程。

正如研究其它方程一样，关键是研究微分方程的解存在的规律及如何找微分方程的解。那么，首先应该明确什么是微分方程的解。

定义 2 如果一个不含导数或微分的函数代入微分方程后，能使方程两端恒等，则称此函数为该微分方程的解。

例如微分方程

$$x + y + \frac{dy}{dx} = 0 \quad (9.1)$$

我们考虑函数 $y = ce^{-x} - x + 1$ (c 为任意常数)，因为

$$y' = -ce^{-x} - 1$$

代入(9.1)中,有

$$x + ce^{-x} - x + 1 - ce^{-x} - 1 = 0$$

因此, $y = ce^{-x} - x + 1$ 是微分方程(9.1)的解。

再如, $y = x^2 + 3$ 与 $y = x^2 + c$ (c 为任意常数) 都是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (9.2)$$

的解。

函数 $u = c_1 e^{3r} + c_2 e^{-2r}$ (c_1, c_2 为任意常数) 是微分方程

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{du}{dr} - 6u = 0$$

的解, 读者不妨自己验证。

如果微分方程的解中所含任意常数的个数等于微分方程的阶数, 则此解称为微分方程的通解。在通解中给予任意常数以确定的值而得到的解, 称为特解。

对于微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$, $y = x^2 + c$ 是通解, $y = x^2 + 3$ 则

是常数 $c = 3$ 时的特解。

一般, 特解都是将给定的条件代入通解, 确定出任意常数的特定值而得到的。用来确定特解的条件, 称为初始条件。

例3 证明 $y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$ (c 为任意常数) 是微分方程

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = x^2$$

的解, 并求满足当 $x = 1$ 时, $y = 1$ 条件下的特解。

证 由

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \quad (9.3)$$

有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x - \frac{c}{x^2} \quad (9.4)$$

将 (9.3)、(9.4) 代入微分方程

$$\begin{aligned} \text{左} &= x \left(\frac{2}{3}x - \frac{c}{x^2} \right) + \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

所以 $y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$ 是微分方程的解。

将 $x = 1, y = 1$ 代入 (9.3) 式, 得

$$c = \frac{2}{3}$$

所以满足初始条件的特解为

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3x}$$

§ 2 一阶可分离变量的微分方程

很多微分方程的求解, 并不是都有规律可循, 常常很不容易。这一章我们只介绍简单的一阶常微分方程和二阶常微分方程的求解。

一阶微分方程的通解含有一个任意常数。要确定这个任

意常数，必须给出一个初始条件。通常是给出 $x = x_0$ 时未知函数的对应值 y_0 ，记作

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

一、一阶可分离变量的微分方程

在§1例1中给出了微分方程

$$\frac{dD}{dP} = k \cdot \frac{D}{P+b}$$

它之所以不能直接对方程右边进行积分，就因为右式中有 P 的未知函数 D 。但是很容易看出，稍作变化，即可以将变量 D 与 P 分开，得到

$$\frac{dD}{D} = k \cdot \frac{dP}{P+b}$$

从而可以对方程两边分别积分得到函数 $D(P)$ 。

一般情况下，若一阶微分方程可写成

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy \quad (9.5)$$

的形式，则称其为可分离变量的微分方程。

例如，下列微分方程

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

可写为

$$ydy = -x dx$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = e^{x+y} (= e^x \cdot e^y)$$

可写为

$$\frac{dy}{e^y} = e^x dx$$

都是可分离变量的微分方程。

求已分离变量的一阶微分方程 (9.5) 的解, 只要对方程两边同时取不定积分, 得到

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + c \quad (9.6)$$

其中 c 为任意常数, 只在一边加上任意常数即可。(9.6) 式即为微分方程 (9.5) 的通解表达式。

与前边不定积分稍有区别的, 是将 $\int f_1(x)dx$ 只看作 $f_1(x)$ 的一个原函数, 而将积分常数单独写出。

例 1 解微分方程

$$\frac{dD}{D} = k \cdot \frac{dP}{P+b}$$

解 两边积分得

$$\ln D = k \ln(P+b) + c_1 \quad (c_1 \text{ 为任意常数})$$

两边去对数, 得

$$\begin{aligned} D &= e^{k \ln(P+b) + c_1} \\ &= (P+b)^k e^{c_1} \quad (e^{\ln x} = x) \\ &= c(P+b)^k \quad (c = e^{c_1}) \end{aligned}$$

从而得到 §1 例 1 要求的需求函数 $D(P)$ 。

注意, 为了使结果形式简单, 总是设法用最简便的方式写常数, 有时甚至可以不改变常数的符号。

例 2 求微分方程

$$\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0$$

在满足初始条件 $y|_{x=1} = 4$ 时的特解。

解 分离变量得到

$$ydy = -x dx$$

两边分别积分为

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

整理得原方程的通解为

$$y^2 + x^2 = c$$

将初始条件 $x = 3, y = 4$ 代入通解得

$$c = 25$$

所以满足初始条件 $y|_{x=3} = 4$ 的特解为

$$y^2 + x^2 = 25$$

例3 设连续复利的利息为 i , $A = A(t)$ 为 t 时的总金额, 求 $A(t)$ 。

解 连续复利, 即在瞬时间内总金额 A 都会有变化, 且 A 对时间 t 的变化率等于利息率 i 与 A 的积。所以由题意有

$$\frac{dA}{dt} = iA$$

分离变量得到

$$\frac{dA}{A} = i dt$$

两边分别积分, 得

$$\ln A = it + c$$

$$A = e^{it+c} = ce^{it} \quad (c \text{ 任意常数})$$

若设 $t = 0$ 时, $A = A_0$, 有

$$c = A_0$$

所以总金额对于时间的函数为 $A = A_0 e^{it}$ 。其中 A_0 为

$t = 0$ 时的总金额。

例4 我们介绍一个简化的宏观经济模型。假设存在如下经济规律：

储蓄与收入成正比，收入增加，储蓄增加；

投资与收入的变化率成正比，当收入的变化率增加，投资增加；

储蓄与投资相等；

初始年的收入为 y_0 。

则得下面模型：

$$S(t) = \alpha y(t) \quad (9.7)$$

$$I(t) = \beta \frac{dy}{dt} \quad (9.8)$$

$$S(t) = I(t)$$

$$y|_{t=0} = y_0$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

其中， S ：储蓄， I ：投资， y ：收入， α ， β 为常数。

试根据上述模型找 $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $y(t)$ 。

由(9.7)、(9.8)有：

$$\beta \frac{dy}{dt} = \alpha y$$

分离变量

$$\frac{dy}{y} = \frac{\alpha}{\beta} dt$$

解得

$$y = ce^{\frac{\alpha}{\beta} t} \quad (c \text{ 为任意常数})$$