# 矿山实用有限单元法

吕家立　谢之康　编著

Applied FEM for Mine

中国矿业大学出版社

# 前言

井巷、采场、边坡、硐室等矿山工程均属地质工程。地质工程是以岩体为工程的主要结构和建筑材料，以岩体环境为工程建筑环境的一类特殊工程。井巷、采场、边坡、硐室等的开挖，使岩体的原始平衡状态受到破坏，原岩应力场发生变化，在井巷、采场、硐室等周围附近的岩体里产生高应力区，围岩向井巷、采场、硐室空间移动。一些强度较底的岩石，特别是对节理、裂隙等软弱结构面发育的岩体，由于新的应力达到其强度极限而发生破坏，甚至大量塌落。为了保证井巷、采场、硐室等周围岩体的稳定，保证矿山工程的安全使用，常常需要对井巷、采场、硐室等周围的岩体用人工营建的结构进行支护，或对岩体进行加固。研究井巷、采场、边坡、硐室等开挖后周围岩体中的应力场和位移场，判断岩体是否稳定；研究人工营建的结构与岩体的相互作用，确定合理支护方式；研究岩体加固及加固效果等都是矿山工程技术工作者必须加以研究的课题。

有限单元法是研究上述问题的有效方法。有限单元法是用有限个单元将连续体离散化，通过对有限个单元作分片插值，求解各种力学、物理问题的一种数值方法。有限单元法十分有效，通用性强，应用范围广泛。有限单元法在解矿山工程力学问题时更有很多优点，主要是：能成功地反映岩体的不均匀性、各向异性、非线性，这是其它数值计算方法难以做到的；能很好地适应各种复杂的几何形状；问题的边界条件能很容易地得到满足；便于编写计算机程序，充分发挥高速电子数字计算机的计算优势；易于学习、掌握、应用。

作者基于多年从事矿山工程力学问题数值解法的研究和研究生教学的实践，编著了“矿山实用有限单元法”一书。本书的最大特点是实用性强：着重从概念、原理和技巧上说明有限单元法，将数学推导减到最低程度，把必要的基础知识以附录的形式附于书后；介绍多种单元、材料本构模式和非线性问题的解法，为使用大型通用有限单元法程序提供必要的先决知识；用实例论述矿山工程力学问题的有限单元解法，其中有些实例是获省、部级科技进步奖的数值模拟研究内容，特别提出围岩等强支护的思想和煤柱设计的 ADINA 法则；这是重要的成果；结合有限单元法程序应用，简明扼要地介绍了 MS—FORTRAN V77 编译系统、有限单元法 FORTRAN 源程序的建立和运行、数据文件建立，从而将有限单元法的理论学习和实际应用融为一体。相信人们借助本书将会有效地理解、掌握、运用有限单元法解决矿山工程中的实际问题。

作者对侯朝炯教授、徐永圻教授、朱锡珍高工所给予的热情关心和帮助，对江苏南通柳新煤矿的领导和工程技术人员所给予的大力支持，对大学生吕宇峰在文稿的计算机输入中所做的大量工作，对中国矿业大学各级领导和同志们所给予的关心和鼓励表示诚挚的谢意。

虽然作者已尽心尽力，但因水平所限，书中难免有不妥之处，恳请批评指正。来信请寄：江苏徐州，中国矿业大学采矿工程系，吕家立，邮政编码221008。

作者

1994.10于中国矿业大学

# 主要符号与说明

$A$ ——面积

$\{A\}$——列阵或列向量

$|A|$——$n$ 阶行列式

$a_{ij}$——行列式$|A|$的元素

$A_{ij}$——元素 $a_{ij}$的代数余子式

$[A]_{m\times n}$—— $m\times n$ 阶的矩阵

$[A]^T$ ——$[A]$的转置矩阵

$[A]^{-1}$——$[A]$的逆矩阵

$B_1$、$B_2$ ——煤柱两边的塑性区宽度

$[B]$——几何矩阵

$[B_i]$——几何矩阵$[B]$的子块

$C$ ——材料的内聚力强度

$D$ ——薄板的弯曲刚度，$D=Eh^3/[12(1-\mu^2)]$

$[D]$——弹性矩阵

$[D]_p$ ——塑性矩阵

$[D]_{ep}$——弹塑性矩阵

$\{d\}$——位移列阵

$\{d\varepsilon\}$——应变增量列阵

$\{d\sigma\}$——应力增量列阵

$\{d\delta\}$——位移增量列阵

$E$ ——材料的拉、压弹性模量(简称弹性模量)

$E_h$，$E_v$ ——横观各向同性材料的独立弹性常数

$F(\sigma)$——屈服准则

$\{F\}^e$ ——单元的结点力列阵

$\{F_i\}$——结点 $i$ 的结点力列阵

$G$ ——材料的剪切弹性模量

$G_{vh}$——横观各向同性材料的独立弹性常数

$g$ ——重力加速度

$H$ ——水头函数

$H_i$ ——加权系数

$H_m$ ——垮落带高度

$H_{li}$——导水裂缝带高度

$h$——薄板厚度

$I$——横截面惯性矩

$[I]_n$——$n$ 阶的单位阵或么阵

$|J|$——雅可比行列式

$k_0$——基床系数或抗力系数

$k_s, k_n$——节理单元的切向和法向刚度系数

$k_x, k_y, k_z$——坐标轴 $x, y, z$ 方向上的渗透系数

$[K]$——结构体的总体刚度矩阵

$[\overline{K}]$——引入支承条件而修改了的结构体的总体刚度矩阵

$[K]^{-1}$——$[K]$的逆矩阵

$[K]_L$——载荷矫正矩阵

$[K]_N$——大位移刚度矩阵

$[K]_\sigma$——几何刚度矩阵

$[K]_t$——切线刚度矩阵

$[K]^e$——单元的刚度矩阵

$[k_{rs}^e]$——单元刚度矩阵$[K]^e$的子块

$[K_{joint}]$——节理单元的刚度矩阵

$L_i$——面积坐标

$[L]$——下三角阵

$\{L\}$——结构体的总体结点荷载列阵

$\{\overline{L}\}$——引入支承条件而修改了的结构体的结点荷载列阵

$\{L\}^e$——单元结点荷载列阵

$\{l_i^e\}$——结点 $i$ 的荷载列阵

$l, m, n$——法线的方向余弦

$M_{\theta xi}$——作用在结点 $i$ 上的、沿 $\theta_x$ 方向的结点力

$M_{\theta yi}$——作用在结点 $i$ 上的、沿 $\theta_y$ 方向的结点力

$M_x, M_y, M_{xy}$——弯矩、扭矩

$\{M\}$——薄板单元的内力列阵

$[N]$——形函数矩阵

$N_i$——形函数或插值函数

$P_x, P_y, P_z$——体积力在坐标轴 $x, y, z$ 上的分量

$\{P\}$——体积力列阵

$\overline{P}_x, \overline{P}_y, \overline{P}_z$——表面力在坐标轴 $x, y, z$ 上的分量

$\{\overline{P}\}$——表面力列阵

$Q(\sigma)$——塑性势面

$\{Q\}$——集中力列阵

$[S]$——单元的应力矩阵

$[S_i]$——应力矩阵$[S]$的子块

$T_{\theta xi}$——作用在结点 $i$ 上的、沿 $\theta_x$ 方向的结点力矩载荷

$T_{\theta yi}$——作用在结点 $i$ 上的、沿 $\theta_y$ 方向的结点力矩载荷

$t$——厚度

$[U]$——上三角阵

$u,v,w$——位移在坐标轴 $x,y,z$ 上的分量

$U_i,V_i,W_i$——结点 $i$ 的结点力在坐标轴 $x,y,z$ 上的分量

$u_i,v_i,w_i$——结点 $i$ 的位移在坐标轴 $x,y,z$ 上的分量

$v_x,v_y,v_z$——渗流水的流动速度在坐标轴 $x,y,z$ 方向上的分量

$W$——重量

$w$——薄板弯曲的挠度

$Y$——煤层厚度

$Z_i$——作用在结点 $i$ 上的、沿 $z$ 方向的结点载荷

$\alpha$——待定常数

$\alpha,k$——材料常数，由材料的内聚力强度 $C$ 和内摩擦角 $\varphi$ 决定

$\{\delta\}$——结构体的结点位移列阵

$\{\delta\}^e$——单元的结点位移列阵

$\{\delta_i\}$——结点 $i$ 的位移列阵

$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$——形变（应变）分量

$\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_z,\gamma_{rz}$——轴对称问题的形变（应变）分量

$\{\varepsilon\}$——应变列阵

$\{\varepsilon_0\}$——初应变列阵

$\theta$——角度

$\theta_x,\theta_y$——绕 $x$、$y$ 轴的转角

$\mu$——材料的泊松比

$\mu_{hh},\mu_{vh}$——横观各向同性材料的独立弹性常数

$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$——主应力

$\sigma_n$——剪切破裂面上的正应力

$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$——应力分量

$\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z,\tau_{zr}$——轴对称问题的应力分量

$\{\sigma\}$——应力列阵

$\{\sigma_0\}$——原岩应力或初应力列阵

$\tau_n$——剪切破裂面上的剪应力

$\varphi$——材料的内摩擦角

$\{\chi\}$——薄板的形变列阵

$\psi$——材料的膨胀角

$\omega_x,\omega_y,\omega_z$——绕 $x,y,z$ 轴的转动分量

# 目 录

# 绪 论

## （矿山工程力学问题的分析方法）

井巷、采场、边坡、硐室等矿山工程，以及地基工程等均属地质工程。地质工程是以岩体为工程的主要结构和建筑材料，以岩体环境为工程建筑环境的一类特殊工程。这里所说的“岩体”实际上是地质体。地质体在长期、反复、多次的地质作用下，经受多次变形、多次破坏，从而形成了一定岩石成分、一定结构、一定地质环境（指地应力、地下水和地温）。地质体在作为力学介质而研究地质工程力学问题时称为岩体。

岩体在长期、反复、多次的地质作用下，经受多次变形、多次破坏，其内部产生了一些不同类型的开裂和易开裂的地质界面，以及被地质界面切割而成的不同类型的岩块。这种地质界面称为结构面，这种岩块称为结构体。不同类型的结构面和不同类型的结构体组合、排列的形式，称为岩体结构。结构面和结构体统称成为岩体结构单元。岩体结构可分成两级5序，如表0－1所示。

表0－1　　岩体结构的级序和类型

| 级 | I | | Ⅱ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 序 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 类　型 | 块状结构 | 板裂结构 | 完整结构 | 碎裂结构 | 散体结构 |
| 划分依据 | 块状结构体；软弱结构面 | 板状结构体；软弱结构面 | 结构面不连续 | 坚硬结构面切割 | 结构面无序状分布 |
| 力学性质控制因素 | 结构体沿软弱结构面滑动 | 层间错动分割岩体；贯通性节理 | 结构面的不连续性及岩性 | 结构面的组数、产状 | 结构体大小和及其岩性 |

根据岩体结构、岩体变形和破坏机理、地应力特点，岩体的力学介质模型可分为4类。这4类岩体力学介质模型及其力学问题解决的力学理论列于表0－2。

很明显，处于不同类型岩体力学介质中的地质工程，其力学问题应采用不同的力学理论和方法去解决。在解决地质工程力学问题时，首要的工作是进行工程地质的研究，确定地质工程所处的岩体的力学介质模型，进而选用相应的力学理论和方法。如果不是这样，而是一律采用连续介质力学理论和方法去解决地质工程力学问题，那么就会导致地质工程的失败。

作为力学理论，连续介质力学理论和块裂介质力学理论已经成熟，而板裂介质力学理论和碎裂介质力学理论还在发展之中。研究块裂介质力学理论、板裂介质力学理论和碎裂介质力学理论及其方法超出了本书的范围，它们属于矿山非连续介质力学的范畴。本书只涉及连

续介质岩体中的矿山工程力学问题。

表 0－2　岩体力学介质分类

| 岩体力学介质 | 岩体结构类型及地应力条件 | 力学理论 |
| --- | --- | --- |
| 连续介质 | 完整结构岩体<br>细碎屑散体结构岩体<br>高地应力条件下的碎裂结构岩体 | 连续介质力学 |
| 块裂介质 | 块裂结构岩体 | 块裂介质力学 |
| 板裂介质 | 板裂结构岩体<br>单向应力作用下的碎裂结构岩体 | 板裂介质力学 |
| 碎裂介质 | 粗碎屑散体结构岩体<br>低地应力条件下的碎裂结构岩体 | 碎裂介质力学 |

所谓连续介质，指的是一种假定的物质结构模型。它认为介质(如真实流体或固体)占据的空间连续无空隙地充满着“质点”，这些质点具有宏观物理量(如质量、速度、压强、温度等)，它们一般是空间和时间坐标的连续函数，且满足各种应遵循的物理定律(如质量守恒定律、牛顿运动定律、能量守恒定律、热力学定律等)。这里的“质点”，实际上指的是微观充分大，宏观充分小的分子团，也称为微团。非连续介质是另一种假定的物质结构模型，它认为介质占据的空间中存在着“质点”没有充满的空隙，波动能量在空隙处可能发生反射。由表 2 岩体力学介质分类可以看出，完整结构岩体、细碎屑散体结构岩体、高地应力条件下的碎裂结构岩体均是连续介质。那些未受或仅受轻微构造作用的厚层沉积岩体通常也当作连续介质。

矿山工程力学问题基本上是开挖岩体后的岩体稳定问题，以及人工营建的结构和岩体相互作用的问题。井巷、采场、边坡、硐室等的开挖，使岩体的原始平衡状态受到破坏，原岩应力场发生变化，同时，岩体发生变形。在井巷、采场、硐室等周围的岩体里产生高应力区，井巷、采场、硐室等周围的岩体向井巷、采场、硐室空间移动。一些强度较底的岩石由于新的应力达到其强度极限而发生破坏，诸如开裂、剪切变形、甚至大量塌落，特别是对节理、裂隙等软弱结构面发育的岩体，这些情况的发生更是明显。为了保证井巷、采场、硐室等周围岩体的稳定，保护井巷、采场、硐室等矿山工程，常常必须对井巷、采场、硐室等周围的岩体用人工营建的结构进行支护，或对岩体进行加固。研究井巷、采场、边坡、硐室等开挖后其周围岩体中的应力场和位移场，判断岩体是否稳定；研究人工营建的结构和岩体相互作用，确定合理支护；研究岩体加固及加固效果等是矿山工程技术工作者必须加以研究的课题。

连续介质岩体中矿山工程力学问题可分为线性弹性问题和非线性问题。线性弹性问题是在位移与应变、应变与应力、应力与载荷之间都为线性关系的前提下研究岩体的应力、应变分布规律，以及它们同载荷之间关系的问题。坚硬完整结构岩体中的矿山工程力学问题即属此类问题。非线性问题是载荷、应力、应变和位移等参量间出现非线性关系时的矿山工程力学问题，这是矿山工程中最常见的力学问题。有三种非线性问题，①物理非线性、几何线性问题，又称材料非线性问题，即应力一应变关系为非线性的问题；②物理线性、几何非线性问题，即应变与变形梯度间的非线性问题；③既物理非线性、又几何非线性的问题。除此之外，

岩体的破坏、变形还与时间有关系，表现为松驰、蠕变等所谓流变性质，这是特殊的非线性问题。软岩岩体、高地应力条件下的碎裂结构岩体中的矿山工程力学问题即属非线性问题。

解决连续介质岩体中矿山工程力学问题的方法有：解析法、数值计算法、基于实验和经验的经验法。解析法是解经典固体力学微分方程的方法，它的解答是数学表达式，能给出研究区域内任一点所求物理量的数值。解析法得到的问题解答可能是准确的，也可能是近似的。如果解严格的微分方程定解问题，问题解答就是准确的；如果使用基于能量原理的变分法、加权残数法，问题解答就是近似的。只有极少数矿山工程力学问题能用解析法求解，例如单一岩石中圆孔、椭圆孔周边应力的计算，圆孔周围极限平衡区的确定，细碎屑散体结构岩体中压力拱理论和太沙基理论的建立等。

数值计算法综合力学、计算数学、计算机科学的知识，以计算机和相应应用软件为工具，求出研究区域上一些特定点上所求物理量的数值。数值计算法又可分为两类：第一类是对连续介质力学问题的基本微分方程进行数值求解。这类方法的代表是有限差分法；第二类是对连续介质力学问题的力学模型进行数值求解。这类方法的代表是有限单元法和边界单元法。数值计算法得到的问题解答，由于处理问题时的离散化等原因，因而是近似的。但在满足一定的条件下，其解答将收敛于准确解。

有限差分法是数值求解微分方程定解问题的方法。它把问题的求解区域剖分成网络，在网络点上，用适应的数值微分公式把微分方程和定解条件中的微商换成差商，从而把原定问题离散化为差分方程，以求解数值解。这种方法对于有规则的几何特性和均匀的材料特性的问题，解答的收敛性好，程序设计简单。在求解矿山工程力学问题时，这一数值计算法用的较少。

有限单元法是用有限单元将连续体离散化，通过对有限个单元作分片插值，求解各种力学、物理问题的一种数值方法。有限单元法把连续体离散成有限个单元，每个单元的场函数是只包含有限个待定结点参量的简单场函数，这些单元场函数的集合就能近似地表示整个连续体的场函数。根据能量方程或加权函数方程可建立有限个待定参数的代数方程组，求解此离散方程组，就能得到问题的数值解。有限单元法十分有效，通用性强，应用范围广泛。有限单元法在解矿山工程力学问题时更具有很多优点，主要的是：能成功地反映岩体的不均匀性、各向异性、非线性，这是其它数值计算方法难以做到的；能很好地适应各种复杂的几何形状；问题的边界条件能很容易地得到满足；便于编写计算机程序，充分发挥高速电子数字计算机的计算优势；易于学习、掌握、应用。有限单元法已被广泛用于求解各种矿山工程力学问题，诸如矿山工程围岩稳定性分析、支护形式优化、矿柱设计、渗流分析、地表沉陷等线性和非线性问题，并取得了重大的经济效益。目前已有许多大型或专用程序系统供工程设计使用。世界著名的自动动态增量非线性分析有限单元程序 ADINA 是一个能较好地解矿山工程力学问题的程序，它的优点是能较好地模拟开挖过程、单元类型多、材料模式丰富、程序组织先进、求解方法灵活。使用有限单元法求解矿山工程力学问题的困难，一是对岩体的力学介质类别划分，二是对岩体的赋存环境了解，三是对岩体的本构方程及其力学参数的选择。合理地解决这些问题，必将使有限单元法在求解矿山工程力学问题中发挥更大的作用，使对岩体基本性质的研究向纵深发展，取得更加令人满意的结果。

边界单元法是沿边界求解连续介质物理力学偏微分方程定解问题的一种数值解法。边界单元法把连续介质物理力学偏微分方程定解问题，利用偏微分方程的基本解，通过线性叠

加或加权残数等方法化为沿边界的积分方程；再把边界划分为有限个单元，利用插值函数，将边界积分方程化为线性方程组，从而离散求解。由此可见，边界单元法实际上是连续介质物理力学偏微分方程定解问题的边界积分方程法及其数值解法的总称。由于边界单元法是沿边界求解连续介质物理力学偏微分方程定解问题的一种数值解法，所以边界单元法把原问题的维数减少了--维，具有比有限差分法和有限单元法的未知数少，且分布在边界上的优点，在工程上已广泛用于分析固体、流体和温度等边界形状复杂的稳态或瞬态的线性或非线性边值问题上。它特别适用于分析无限域问题，诸如矿山工程中巷道、采场围岩稳定性分析、锚杆一围岩相互作用的问题、岩体渗流场分析等等。然而边界单元法在处理层状岩体中的矿山工程力学问题时，其优点并不能发挥；再者，解边界单元法的线性方程组的花费也要高。

本书只研究可以作为连续介质岩体中的矿山工程力学问题有限单元法解法。关于基于实验和经验的经验法，这里就不论述了。

# 第一章　有限单元法概论

本章主要介绍有限单元法的类别，使用有限单元法求解问题的一般步骤，有限单元法解的收敛性以及有限单元法的发展概况，以便读者对有限单元法有一个明晰的了解，从而明确有限单元法在求解矿山工程力学问题中的可信度。

## 第一节　有限单元法的类别

有限单元法可以按基本未知量和推导方法这两个方面予以分类。

以基本未知量为准，有限单元法可分为三类：

1. 位移法，是以结点位移为基本未知量的有限单元法；
2. 力法，是以结点力为基本未知量的有限单元法；
3. 混合法，是以一部分结点的位移和另一部分结点的力为基本未知量的有限单元法。

目前，位移法的应用范围最广，在某些特殊问题中才应用力法，混合法则在板壳问题中得到了应用。

以推导有限单元法基本方程为准，有限单元法也可分为三类：

1. 直接刚度法，是以结点位移为基本未知量，在单元内假定以结点位移为参数的位移场，根据虚功原理或最小势能原理求得单元的刚度矩阵，进而建立总体刚度矩阵的有限单元法；
2. 变分法，是以研究泛函极值问题的变分原理来建立有限单元法基本方程的有限单元法；
3. 加权余值法，是以研究最佳近似解的加权余值法来建立有限单元法基本方程的有限单元法。

直接刚度法易于理解；变分法使有限单元法建立在更坚实的数学基础上，扩大了有限单元法的应用范围；加权余值法使得那些根本不存在泛函的工程领域中的问题，也可用有限单元法求解，从而进一步扩大了有限单元法的应用范围。

本书使用直接刚度法推导有限单元法基本方程，很显然，这是位移法有限单元法。

## 第二节　有限单元法求解问题的一般步骤

用有限单元法求解问题，一般都遵循以下步骤：

1. 有限单元法计算模型的建立；
2. 对每个单元进行力学分析；

3. 对结构体进行总体分析；

4. 进一步的计算分析。

兹将上述步骤简述如下：

**一、有限单元法计算模型的建立**

有限单元法计算模型的建立主要指的是：

1. 将待分析的连续体，如结构物、固体等，用假想的点（对于杆件、梁分析）、线（直线或曲线）、面（平面或曲面）将连续体分割成有限多个、有限大小的子区域，这些子区域只在特定的点处相互联结，从而使连续体离散化为结构体。这有限多个有限大小的子区域是这结构体的构件，称为有限单元，或简称为单元。单元与单元相互联结的特定的点则称为结点。

单元有三类：一维单元、二维单元、三维单元。每一类中又可根据几何形状的不同，分为不同形状的单元。常见单元的几何形状如图1－1所示。必须注意的是，作为一个单元来讲，它是连续、均匀、各向同性的。

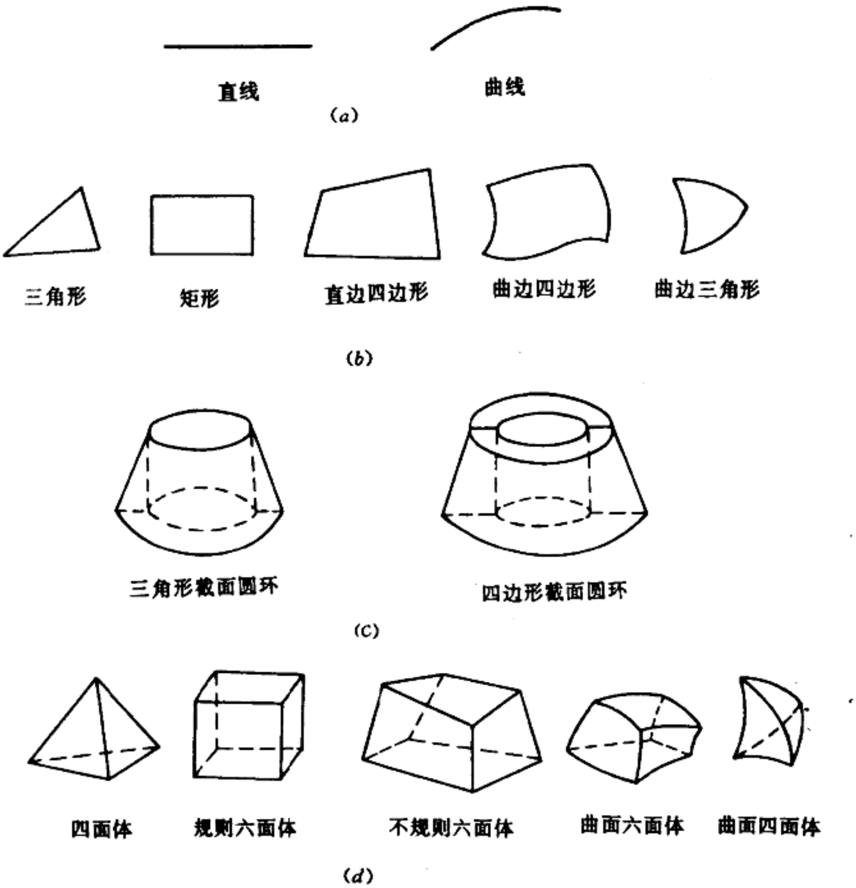


图1－1　常见单元的几何形状

(a)——一维单元；(b)——二维单元；(c)——轴对称单元；(d)——三维单元

结点与结点之间的联结可以是铰接、固接或其它形式的联结，视问题的具体情况而定。

而单元结点的设置、性质、数目等应根据问题的性质、描述变形形态的需要和计算准确度的要求等而定。

在将连续物体离散化为结构体时有一些技巧、规则是要利用和遵守的，这将在以后的章节里加以介绍。

2. 如果结构体的哪个(或哪些)结点的位移或其某个(或某些)方向上的分量被限定了的话，那么就在那个(或那些)结点上安置铰支座，或在其被限定的那个位移分量方向上安置链杆支座。

3. 建立一个合适的坐标系。在这个坐标系里，对单元进行编号，同时还要对结点进行编号。如果连续物体被分割成 $M$ 个单元，有 $N$ 个结点，则单元编号从 1 开始，直至 $M$；结点编号从 1 开始，直至 $N$。这时的结点编号称为结点的总体编号。

结点编号也有一些规则要遵守，这也将在以后的章节里介绍。

要说明的是，这里的一些工作并不都是必需人工做的，有不少的高级一些的有限单元法程序可自动处理上述的一些工作，从而减轻了人们的劳动。

**二、对每个单元进行力学分析**

在对每个单元进行力学分析时，单元的结点是否加有支座是不予考虑的。假如结点的某个方向上安置了链杆支座，那么就在这个方向上作用一个未知支座反力。这个支座反力是作为下面要讲的结点荷载看待的。

单元的力学分析包括以下内容：

1. 位移模式的选择。在连续物体离散化而得到的结构体中，每个单元内的一些物理量，如位移、应变等的变化有可能采用一些能逼近其真实变化规律的近似函数予以描述。在位移法有限单元法中，用称为位移模式的函数来描述每个单元内的位移场。

位移模式一经选定，就有可能利用结点位移表征单元内位移，即

$$\{d\} = [N]\{\delta\}^e \tag{1-1}$$

式中 $\{d\}$——单元内位移列阵；

$[N]$——形函数矩阵；

$\{\delta\}^e$——单元结点位移列阵。

2. 将单元所受的外荷载(包括面力、集中力、体积力等)按静力等效的原则移置到结点上，形成单元的结点荷载。单元结点载荷用列阵 $\{L\}^e$ 表示。

所谓静力等效是指原载荷在任何虚位移上所做的虚功等于结点载荷在任何虚位移上所做的虚功。要注意，单元外荷载移置成结点荷载的结果取决于位移模式，一定的位移模式，单元外荷载移置的结果也是一定的。换句话说，同一个单元，同样的外荷载，如果位移模式不同，外荷载移置的结果也是不同的。

3. 推导单元的应力矩阵和刚度矩阵。首先利用弹性力学的基本方程导出用结点位移表示的单元应变关系式：

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e \tag{1-2}$$

式中 $\{\varepsilon\}$——单元的应变列阵；

$[B]$——单元的几何矩阵。

然后利用弹性力学的基本方程导出用结点位移表示的单元应力关系式：

$$\{\sigma\} = [S]\{\delta\}^e \tag{1-3}$$

式中 $\{\sigma\}$——单元的应力列阵；

$[S]$——单元的应力矩阵。

最后利用弹性力学的基本方程导出用结点位移表示的单元结点力的关系式：

$$\{F\}^e = [K]^e\{\delta\}^e \tag{1-4}$$

式中 $\{F\}^e$——单元结点力列阵；

$[K]^e$——单元的刚度矩阵。

要说明的是单元结点力的概念。单元结点力是指环绕该单元的其它所有单元施加在该单元结点上的力。对于单元的某一结点而言，是与它联结的所有单元施加给它的力。

在位移法有限单元法中，求解基本未知量的方程是结点的平衡方程，即对某一结点而言，环绕它的单元都对它施加结点力，同时，环绕它的单元也都向它等效移置来结点荷载。在该结点处，结点力$\sum\limits_e \{F\}^e$和结点荷载$\sum\limits_e \{L\}^e$达到平衡，即有结点平衡方程

$$\sum_e \{F\}^e = \sum_e \{L\}^e \tag{1-5}$$

$\sum\limits_e$表示对环绕该结点的所有单元求和。图1－2表示了平面问题中某一结点平衡情况。图1－2中，$i$表示某一结点，$U_i$和$V_i$表示结点$i$所受单元结点力$\sum\limits_e \{F\}^e$的$x$轴和$y$轴分量，而$X_i$和$Y_i$表示结点$i$所受单元结点荷载$\sum\limits_e \{L\}^e$的$x$轴和$y$轴分量。

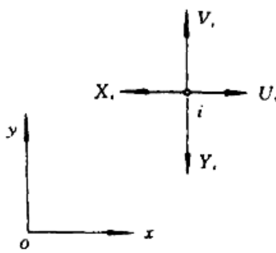


图1－2 平面问题中某一结点平衡

## 三、对结构体进行总体分析

在对结构体的所有单元进行了上述分析之后，再将所有的单元组合起来构成结构体，对该结构体进行总体分析。对结构体进行总体分析包括以下内容：

1. 根据直接刚度法建立结构体的结点平衡方程

$$[K]\{\delta\} = \{L\} \tag{1-6}$$

式中 $[K]$——结构体的总体刚度矩阵；

$\{\delta\}$——结构体的结点位移列阵；

$\{L\}$——结构体的总体结点荷载列阵。

2. 引入支承条件。在建立结构体的结点平衡方程时，结构体的位移边界条件是没有考虑的。引入支承条件就是要使结构体的位移边界条件得到满足。引入支承条件时，要对那些与有支座的结点相应的总体刚度矩阵和结点荷载列阵元素进行修改，从而有

$$[K]\{\delta\} = \{L\} \tag{1-7}$$

式中 $[K]$——引入支承条件而修改了的结构体的总体刚度矩阵；

$\{L\}$——引入支承条件而修改了的结构体的结点荷载列阵。

3. 解方程(1－7)，求得结构体的结点位移

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{L\} \tag{1-8}$$

式中 $[K]^{-1}$——$[K]$的逆矩阵。

## 四、进一步的计算分析

在求得结构体的结点位移之后，还要进行进一步的计算分析，这包括计算各个单元的应

力、各个单元应力的主应力及其方向，支座反力。还要利用一定的破坏准则，对单元进行校核，以确定单元内的某点是否发生了破坏。

以上就是用有限单元法求解问题的一般过程，这一过程在第二章中将加以详细的介绍，特别是通过用有限单元法求解四边受压和对角受压方板的位移场和应力场，来具体地介绍有限单元法的解题过程。

## 第三节　有限单元法解的收敛性

评价一种数值计算方法的好坏，可以从以下三个方面考虑：

1. 准确度，即这种数值计算方法所得到的数值解与准确解接近的程度；

2. 稳定性，即这种数值计算方法在计算过程中的截断误差、舍入误差等，会不会漫无止境地累积而掩盖了准确解；

3. 收敛性，即在分割的单元越分越小时，接近两次解答的差额会不会越变越小，以至趋于零。

前已论及有限单元法是一种数值计算解法，其解答是近似的。现在的问题是有限单元法解答的准确度如何？稳定性如何？收敛性如何？

有限单元法本身的误差来源于两个方面：

一是离散误差。这是由于分割单元的几何状况与结构体实际几何形状有差异而引起的误差。这种误差当单元的尺寸越分越小时，即趋于减小。从理论上来讲，当单元尺寸接近零时，这种误差即可消除。

二是位移模式误差。这是由于选择的位移模式所表示的单元位移变化与单元实际位移变化有差别而引起的误差。这种误差即使是在单元分割很小时，也无法减小。因此，位移模式的选择是保证有限单元法解有高的准确度和好的收敛性的关键所在。为保证有限单元法解有高的准确度和好的收敛性，位移模式必须满足一些条件。这些条件是：

1. 位移模式必须能反映单元的刚体位移。单元的位移是由本单元变形引起的，同时，其它单元的变形也连带它产生了位移。这种由其它单元的变形而连带它产生的位移称为刚体位移。刚体位移是单元可能发生的最基本的位移，为了正确反映单元的位移形态，位移模式必须能反映单元的刚体位移。

2. 位移模式必须能反映单元的常量应变。单元的应变可分为随坐标位置变化的变量应变及与坐标无关的常量应变。很明显，当把单元尺寸逼近无限小时，单元的应变趋于均匀，常量应变就成为单元应变的主要部分。为了正确反映单元的变形形态，位移模式必须能反映单元的常量应变。

3. 位移模式在单元中必须连续，在相邻单元之间尽可能保证位移的协调，即尽可能保证相邻单元的形变不引起单元之间开裂、重叠。连续体在外载荷的作用下，位移是连续的，当把它离散成为结构体时，如果单元很小很小，这结构体就能很好地代表该连续体。但实际上不可能将单元划分得很小很小，因此，所选择的位移模式在单元中必须连续，在相邻单元之间尽可能保证位移的协调。

理论和实践业以证明，为了使有限单元法的解答在单元越分越小时，先后两次解答差值越变越小并趋近于零，满足刚体位移和常量应变的条件是必要条件，而满足相邻两单元位移