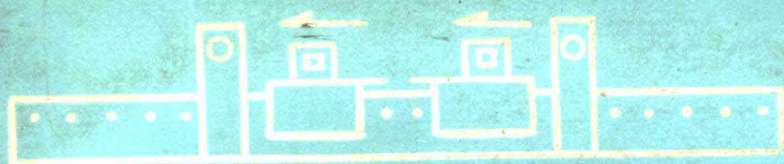


916872

大学物理实验

力学、热学部分



西南八所高等院校合编

西南师范大学出版社

大学物理实验

力学、热学部分

云南师范大学	重庆师范大学
南充师范学院	四川师范大学
西南师范大学	云南民族学院
西南民族学院	南充教育学院

合 编

西南师范大学出版社

内 容 简 介

本书是参照国家教委1987年制定的综合大学及高等师范大学物理专业四年制《普通物理实验教学大纲》的力学、热学部分篇写的。内容包括绪论、误差和数据处理基本知识及三十五个实验。有的实验分为A、B等几个实验，各校可根据情况选用。

本书可供各高等院校全日制本科、函授、夜大、电大、师专作为普通物理实验课教材，也可供其它专业有关课程参考。

大 学 物 理 实 验

(力学、热学部分)

西南师范大学出版社出版

(重庆 北碚)

新华书店重庆发行所经销

西南师范大学出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张：12.25 字数：320千

1989年7月 第一版 1989年7月 第1次印刷

印数：1—5,100

ISBN 7-5621-0302-X/O·28

定价：3.60元

序

最近，有机会读了西南地区几所高等师范院校合编的《大学物理实验》（力学、热学部分）一书的初稿，非常高兴。在过去一段时期内，我国大学存在一种轻视实验的倾向，近几年来才逐步纠正，目前许多学校已经把实验列为一门独立的课程。为了充分利用本校设备，参照大纲上好实验课，多数学校采用自编讲义作为实验教材，以满足教学需要。但是，由于科学、技术、社会三者在现代化的进程中越来越紧密地结合在一起，人们对物理实验的认识发生了极大的变化。大学物理实验的教学目的不能再局限于掌握基础理论和培养实验技能，而且应当从科学、技术及社会相互关系的角度，努力培养学生独立地、创造性地解决问题和综合研究的能力。因此，一套能适应我国四个现代化要求，广泛适用于一般大学的物理实验教材，就成为当前的迫切需要。特别是普通高等学校举办的高等函授教育，各校每年集中大量学员在短期内要完成实验教学任务，这种要求就更为突出。《大学物理实验》一书正是为了满足这种需要，由西南地区高师函授教育协作会组织几所高等师范院校在总结使用自编讲义的经验的基础上，吸收国内外物理实验教材的优点，结合多形式、多层次高等师范教育的特点而编写的物理实验教学用书。

本书从西南地区高校的实际出发，在保证基础和经典实验内容的前提下，着眼于教材的改革；强调了实验中的物理思想；突出了综合研究能力的培养；介绍了一些用简单的仪器和方法进行物理思想比较丰富的实验；对独立设计实验方案进行了探索；为了适应科学研究和生产发展的需要，对温度的测量作了系统的论述。

本书编排的实验课题较现行教学大纲稍多，但有较大的灵活性，有些课题还根据不同原理或使用不同仪器分为A、B等部分。各个学校可以根据现有设备和教学实际情况，选择其中一部分实验来做。

《大学物理实验》一书的编写，在高等学校物理实验教材建设中迈出了可喜的一步。相信经过各校实际运用，本着实事求是的精神反复修订，它将会更加完善，成为一本适合我国现代化事业需要的大学物理实验教材。

麦赐球

1938年7月

前 言

为适应多形式高等教育的发展,受西南地区高等师范函授教育协作会委托,我们参照国家教委1987年制定的综合大学及高等师范大学物理专业四年制《普通物理实验教学大纲》的力学、热学部分,根据高师函授教育的特点,结合西南地区多数高等师范院校及其他院校的实际情况,编写了本书,内容包括绪论、误差和数据处理基本知识及35个实验。

本书在云南师范大学胡世强付教授主持下,由云南师范大学、重庆师范学院、南充师范学院、四川师范大学、西南师范大学、云南民族学院、西南民族学院、南充教育学院联合编写。各部分编写情况是:绪论由胡世强编写;误差和数据处理基本知识由赵海龙、宋建业编写;实验一由陈钢编写;实验二、实验十二A、实验十二B、实验二十四由王家骥编写;实验三由庞友舜编写;实验四、实验三十A、实验三十B由李燕卿编写;实验五A、实验十六B由肖建华编写;实验五B由李蜀川编写;实验五C、实验十四由屈先培编写;实验六、实验十九A、实验十九B、实验二十九A、实验二十九B由宋建业编写;实验七、实验九A、实验十七由顾长鑫编写;实验八、实验十、实验十八、实验二十、实验二十二A、实验二十二B由李惟凤编写;实验九B、实验十一、实验三十二由熊开碧编写;实验十三A、实验十六A由孙威立编写;实验十三B、实验二十八、实验三十C由王天远编写;实验十三C、实验二十二C、实验三十三由赵海龙编写;实验十五由潘学军编写;实验二十一由蹇继勋编写;实验二十三由王中南编写;实验二十五、实验二十七、实验三十一、实验三十四A、实验三十四B、实验三十四C、实验三十五由刁才文编写;实验二十六由刘坤智编写。

云南师范大学麦赐球教授审阅了本书的初稿并为本书作序,我们在此深表谢意。

由于经验不足,能力有限,书中难免有缺点和错误,诚挚希望读者批评指正。

编 者

1988年7月

目 录

绪 论	(1)
§ 1. 物理实验的地位和作用	(1)
§ 2. 物理实验的一般程序	(1)
误差和数据处理基本知识	(2)
§ 1. 测量及其分类	(2)
§ 2. 误差及其分类	(3)
§ 3. 测量结果的表示	(4)
§ 4. 直接测量的误差估算	(5)
§ 5. 间接测量的误差估算	(7)
§ 6. 误差估算的意义	(10)
§ 7. 有效数字及其运算	(12)
§ 8. 用作图法处理数据	(13)
§ 9. 最小二乘法简介	(14)
习 题	(17)
实验 1 长度测量	(19)
实验 2 单摆	(24)
实验 3 固体和液体密度的测定	(32)
实验 4 惯性秤	(36)
实验 5A 用频闪照相法测定重力加速度	(37)
实验 5B 用火花记时法测定重力加速度	(41)
实验 5C 用光电记时法测定重力加速度	(43)
实验 6 用分析天平测量空气密度	(45)
实验 7 在气垫导轨上测定速度和加速度	(49)
实验 8 牛顿第二定律的验证	(54)
实验 9A 用气垫导轨验证动量守恒定律	(57)
实验 9B 用碰撞仪验证动量守恒定律	(60)
实验 10 刚体转动实验	(63)
实验 11 用伸长法测定金属丝的杨氏模量	(66)
实验 12A 用共鸣管测空气中的声速	(69)
实验 12B 用超声波测空气中的声速	(74)

实验 13 A	用落球法测定液体的粘滞系数	(80)
实验 13 B	用泊肃叶公式测定液体的粘滞系数	(83)
实验 13 C	气体粘滞系数的测定	(85)
实验 14	三线摆	(86)
实验 15	扭摆	(89)
实验 16 A	可倒摆	(91)
实验 16 B	复摆	(93)
实验 17	气垫导轨上简谐振动的研究	(96)
实验 18	气垫导轨上阻尼振动的研究	(97)
实验 19 A	用电磁法研究弦的振动	(101)
实验 19 B	用音叉法研究弦的振动	(102)
实验 20	互相垂直振动的合成	(103)
实验 21	验证伯努利方程	(108)
实验 22 A	用混合法测固体的比热容	(112)
实验 22 B	用冷却法测固体的比热容	(116)
实验 22 C	液体比热容的测定	(118)
实验 23	焦耳实验	(119)
实验 24	金属线胀系数的测定	(122)
实验 25	良导体导热系数的测定	(126)
实验 26	不良导体导热系数的测定	(129)
实验 27	气体和液体导热系数的测定	(133)
实验 28	冰的比熔解热的测定	(136)
实验 29 A	用补偿法测定水的汽化热	(139)
实验 29 B	用电热法测定水的汽化热	(140)
实验 30 A	用拉脱法测量液体表面张力系数	(141)
实验 30 B	用毛细管法测量液体表面张力系数	(143)
实验 30 C	用干涉法测量液体表面张力系数	(144)
实验 31	气体温度计	(147)
实验 32	气体体胀系数的测定	(152)
实验 33	实际气体范德瓦尔斯方程的研究	(154)
实验 34 A	用标准铂铑系热电偶测量高温	(155)
实验 34 B	用标准中温铂电阻温度计精密测量中温	(161)
实验 34 C	用标准低温铂电阻温度计精密测量低温	(166)
实验 35	真空的获得和测量	(172)
附表 F	物理常数表	(179)

绪 论

§1. 物理实验的地位和作用

物理学是一门实验科学。物理实验在物理理论的建立中占有极其重要的地位。许多物理学的理论规律是直接大量的实验中总结概括出来的，物理理论的确立又往往有赖于实验来验证。例如杨氏干涉实验使光的波动学说得以确立，光电效应实验为光的量子论打下基础，迈克尔逊——莫雷实验为相对论的建立起了重要作用。物理学发展到了今天，除了天文现象以外，在一般自然条件下或一般实验条件下，就可以观察到新的、具有前所未有的理论价值的实验现象是比较困难的。

随着科学技术的发展，物理实验的范围越来越广，精确度也越来越高。通过实验可以验证更深的理论，指出理论的实用范围，推动理论的发展；可以启示新的物理思想，提供新的物理方法；实验成功可以推动生产力的发展。近代科学技术的发展表明，物理学领域内的所有成果，都是理论和实验结合的结晶。

大学物理实验是一门独立的基础课程。现在进行的物理实验，其目的是通过实验使学生直观地建立物理概念，深入地理解物理定律；使学生在物理实验的基本知识、基本方法和基本技能方面受到系统的训练，从而具有初步的科学实验能力；培养学生严肃认真、实事求是、理论联系实践的科学态度和工作作风。

§2. 物理实验的一般程序

一般说来，从大学开始的物理实验是学生接受系统的实验训练的开始。通常将实验课分为实验预习、实验操作和实验报告几个程序来进行。

●实验预习 为了顺利进行实验，学生应按规定内容进行预习，以理解实验原理，明确实验内容，掌握实验方法，熟悉所用仪器，了解操作要点，并写出简要的预习报告。预习报告包括实验名称、实验目的、实验原理摘要和必须的记录表格。

●实验操作 实验操作是让学生熟悉实验仪器、独立进行测量，并在教师指导下，逐步学会分析和解决实验中出现的問題。操作前，实验装置须经教师检查，同意后方可进行。

在实验过程中必须遵守操作规程，仔细观察现象，及时作好原始记录。实验结束后将记录数据交教师检查签字、整理好仪器方可离开实验室。

●实验报告 实验报告是整个实验工作的总结，可以加深对实验的理解。实验报告要用简明的形式将实验结果完整而又真实地表达出来。实验报告要求简单明瞭，语言确切，字迹清楚，图表规则，讨论深刻。实验报告的内容为：实验目的，实验原理，实验器材，实验步骤，数据记录与处理，结果表述，回答问题，讨论和分析实验中的问题等。

误差和数据处理基本知识

§1. 测量及其分类

在物理实验中，不仅要定性地观察物理现象的变化，而且还要求定量地确定物理量及其在变化过程中的数量关系，这就需要测量。所谓测量就是将待测量与选定作单位的同类量进行比较。

●测量分类 测量按性质可分为直接测量和间接测量；从测量次数来分，可分为单次测量和多次测量；而以测量的精度来分，又可分为多次等精度测量和多次不等精度测量。

●直接测量和间接测量 直接测量是利用仪器把研究的物理量直接测量出来。如称物体的质量用天平、测长度用刻度尺、计时间用秒表、测温度用温度计、测电流强度用安培计。而许多物理量是在直接测量其他物理量的数值后，通过一定的函数关系计算出来，这种测量称为间接测量，其物理量称为间接测量量。如地球的质量、地球到太阳的距离就需要连续测量地球的运行周期而求得，密度是根据测量物体的质量和体积而求得，单摆测重力加速度是测量单摆的摆长和振动周期，再由单摆的周期公式求得。

一个物理量是直接测量还是间接测量不是绝对的，通常与仪器的选择有关，如液体的密度，选用量筒和天平进行测量时为间接测量，选用比重计进行测量时则为直接测量。随着科学技术的发展，能够直接测量的物理量将逐渐增多。

●单次测量与多次测量 有的物理量在同一实验条件下不可能进行多次重复测量，或者不必要进行多次重复测量，在这两种情况下，取一次测量的读数作为测量结果，我们称这种测量为单次测量。例如混合法测比热容时，热平衡温度一瞬即逝，无法进行多次测量。又如用米尺测量黑板的长度，重复测量意义又不大。

在实验中，为了提高测量的精确度，在条件许可下总是对同一物理量进行多次重复测量，这就是多次测量，测量次数越多，偶然误差的影响越小，但测量次数也不宜太多。多次测量又分为多次等精度测量和多次不等精度测量。

●多次等精度测量和多次不等精度测量 同一测量者，用同一仪器，同一测量方法，在同样的环境条件下，对同一物理量进行多次的重复测量，称为多次等精度（直接）测量。通过这样的测量，所得到的一组数据叫做等精度测量列。对于多次等精度测量，可以证明，测量列的算术平均值为最佳值，因此用算术平均值作为测量结果。

如果对同一物理量的多次测量中，所用的仪器、方法甚至测量者或外界条件中，有一个或多个因素发生变化，测量精度也就不相同，这就是多次不等精度测量。这种测量将得到一个不等精度测量列。对于多次不等精度测量，以各测量值的加权平均值作为测量结果。本书讨论的多次测量都是等精度测量。

§2. 误差及其分类

我们要测量的物理量，在一定条件下，总是有一个客观的真正大小。这个实际值称为该物理量的真值，用符号 A 表示。

由于测量中所用仪器精度的限制、实验原理的近似性、测量环境的不稳定性或者测量者观测能力的限制等原因，测量值 X 与真值 A 之间总是存在偏差，这种偏差就叫做误差，即

$$\Delta = X - A \quad (1)$$

既然仪器、环境、测量方法等条件难以达到理想的地步，所以真值是找不到的，因此误差不仅不能完全避免，而且也不能完全确定。误差只能用各种方法估计。

●误差的分类 根据测量中误差产生的原因和性质，可将误差分为系统误差、偶然误差和过失误差（粗差）三大类。

●系统误差 在测量中，在一定的条件下（同一仪器，同一测量方法，同一测量环境，同一测量者），对某一物理量进行多次测量时，误差的数值和符号总保持不变，或者按照一定的规律变化，这种误差称为系统误差。

产生系统误差的原因在于：●1. 仪器误差 由于仪器制造本身的缺陷，使用不当或者仪器未经很好校准造成的误差。如天平不等臂，电表的零点不准确，显微镜的螺距不均匀等。

●2. 理论和方法误差 由于测量原理或方法的不完善，即理论公式的近似性，实验条件和方法不能完全满足要求所引起的误差。如用气垫导轨作匀速直线运动中在某一间隔内有加速情况，单摆实验中忽略了阻力影响，热学实验中忽略散热量，电学实验中接线电阻和接触电阻的影响等。

●3. 人为误差 由于测量者本身的不良习惯，或心理和生理特点所引起的误差。如读数总是偏高（或偏低），按停表过早（或过迟），反应速度的快慢，分辨能力的高低等。由这些原因造成的系统误差具有一个基本特点，就是使测量结果或正或负始终偏朝一个方向，或按一定的规律变化。因此不能通过多次测量取平均值来消除它，但只要我们按系统误差的特征善于发现它，就可以采取改进仪器、修正理论公式、改善实验条件、提高实验技术等措施来减小系统误差。

●偶然误差 在同一条件下，对某一物理量进行多次重复测量，可以发现，测量结果并不相等，而是围绕某一值“跳动”。误差的数值和符号变化不定，这种误差称为偶然误差。

偶然误差是由许多不可预料的偶然因素造成的。如实验过程中温度、湿度、电磁场等偶然变化都是难以避免的。每一个误差，都是一个随机数，因此偶然误差又称随机误差，但是在相同的条件下，对某一物理量进行多次测量时，可发现偶然误差服从统计规律。图1所示为无穷多次测量的偶然误差的统计分布。图中 X 轴表示误差的大小， Y 轴表示误差出现的次数。由于曲线对 Y 轴对称，很明显，在偶然误差中绝对值相等的正、负误差出现的机会相等；绝对值小的误差出现的机会多；超过某一限度的误差不会出现。具有这种特点分布叫做高斯分布（正态分布）。

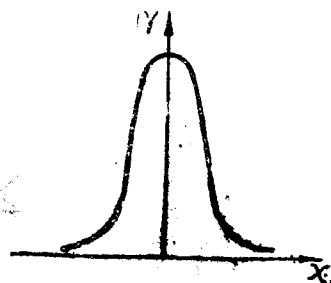


图1

偶然误差服从正态分布的统计规律。可以证明对于多次等精度测量，算术平均值是测量

结果的最佳值（最近真值），增加测量次数可以减小偶然误差。

●过失误差（粗差） 由实验者的过失所引起的误差，称为过失误差，它的特点是结果中出现异常值（或坏值）。它是由测量者粗枝大叶、过度疲劳、操作不正确或仪器的毛病而引起的，它明显地歪曲了测量结果，若测量结果中含有异常值，应按一定的规则加以剔除。

§3. 测量结果的表示

●测量结果的衡量 为了对测量结果进行评价，而且能把测量结果中的系统误差和偶然误差的大小科学地反映出来，通常引入了精密度、准确度和精确度的概念。

●1. 精密度 是指对同一物理量进行多次测量时，所测结果彼此间的相互接近程度，即反映了测量结果的重复性，符合程度或离散程度，因而它是偶然误差的量度，精密度高，偶然误差小，反之亦然。

●2. 准确度 是表示测量结果与真值间的接近程度。在消除了偶然误差的情况下，它反映了算术平均值偏离真值的大小，因此它是系统误差的量度。准确度越高，系统误差越小。

●3. 精确度 包含了精密度和准确度两种含义。在测量中有精密度高而准确度低的情形，也有精密度低而准确度高的情形，当然也有既精密又准确或既不精密又不准确的情况出现，这就是精确度的问题，它是系统误差及偶然误差的综合量度。如果测量的数据比较集中，而它们的算术平均值又靠近真值，则这组测量值的偶然误差和系统误差都比较小，它们的精确度就高，反之则精确度就低。

●绝对误差和相对误差 测量的精确度由测量误差描述。所谓绝对误差是指待测物理量某一测量值 X_i 与真值 A 之差

$$\Delta = X_i - A \quad (2)$$

在只考虑偶然误差的情况下，测量值在真值的左右摆动，由于偶然误差服从正态分布，则 A 应该是 X 的期待值。事实上，当测量次数增多时，我们可以取多次测量的算术平均值（或均方根值，或加权平均值）作为真值的最佳估算值。算术平均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3)$$

在实际测量中，用平均值 $\bar{X}$ 代替真值 A ，用偏差代替真误差，而某次测量的偏差（残差）

$$\Delta_i X = X_i - \bar{X} \quad (4)$$

平均绝对误差

$$\Delta X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta X_i| \quad (5)$$

测量结果用平均值和平均绝对误差表示时应为

$$X = \bar{X} \pm \Delta X \quad (6)$$

绝对误差能对测量中出现的偶然误差作出估计性的量度，因而它能表征测量的可靠程度和技术水平。然而只用绝对误差不能完全反映测量结果的优劣程度，因此引入相对误差。

绝对误差与真值的比叫做相对误差。用算术平均值和平均绝对误差表示时，相对误差为

$$E = \frac{\Delta \bar{X}}{\bar{X}} \times 100\% \quad (7)$$

绝对误差和相对误差的意义不同。绝对误差反映测量结果的可靠范围。相对误差则反映绝对误差在测量结果中的比重。用相对误差表示测量结果时，有

$$X = \bar{X} (1 \pm E) \quad (8)$$

§4. 直接测量的误差估算

在假定系统误差已修正，粗差已排除，只考虑偶然误差的情况下，我们怎样估算偶然误差呢？偶然误差估算方法有多种，下面分别作简要的介绍。

●测量列的平均绝对误差 在有限次测量中，各测量值误差的绝对值的平均值称为平均绝对误差。如用残差表示，则是

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|}{\sqrt{n(n-1)}} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}| \quad (9)$$

根据高斯误差理论，测量列的平均绝对误差为 η 时，任一测量值的误差有 57.5% 的可能性在 $(-\eta, +\eta)$ 区间内。

●测量列的标准误差 标准误差指的是各测量值误差的平方和的平均值的平方根，因此又称均方根误差。设对某物理量的测量次数为 n ，各次测量的值分别为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，各次测量的残差为 $X_i - \bar{X}$ ，则标准误差

$$\sigma = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (10)$$

按 (10) 式计算得的标准误差 σ 并不是一组测量列的真误差，它除了用来度量测量列的精密度外，可作为偶然误差的界限，用作粗差的剔除。

根据高斯误差理论，对于测量列的标准误差为 σ 的测量，任一测量值 X_i ，在区间 $(\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma)$ 内的几率为 68.3%；在区间 $(\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma)$ 内的几率为 95.5%；在区间 $(\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma)$ 内的几率为 99.7%，在此区间外的几率仅为 0.3%，即 $X_i < \bar{X} - 3\sigma$ 或 $X_i > \bar{X} + 3\sigma$ 的测量值实际是不大可能的，所以把 $(\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma)$ 定为测量列的范围， 3σ 为偶然误差的误差界。超过误差界的测量值便认为是异常值，应该予以剔除。即满足

$$|X_i - \bar{X}| > 3\sigma \quad (11)$$

的测量值 X_i 应该剔除。

若测量次数 n 较小时，用 3σ 作为误差鉴别标准会剔不掉粗差，这时可采用肖维涅剔除粗差的标准。肖维涅标准认为，对相同精度，相互独立测量列的数据，若测量值 X_i 满足

$$|X_i - \bar{X}| > \omega_n \sigma \quad (12)$$

时, 则 x_i 便是异常值, 应该从测量列中剔除. (12) 式中的 ω_n 与测量次数 n 有关, 可查阅表 1.

表 1 ω_n — n 的关系

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
ω_n	1.38	1.53	1.65	1.73	1.80	1.86	1.92	1.96	2.00	2.03	2.07	2.10	2.13	2.15	2.17
n	18	19	20	21	22	23	24	25	30	40	50	75	100	200	
ω_n	2.20	2.22	2.24	2.26	2.28	2.30	2.31	2.33	2.39	2.49	2.58	2.71	2.81	3.62	

由表 1 可知, 3σ 作为误差界时, 需要测量 100 次以上, 测量次数越少, ω_n 值也 越小, 测量值的允许范围也越小.

●例 1. 用螺旋测微计测钢丝的直径, 测量结果如下:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$d_i(\text{mm})$	2.042	2.043	2.041	2.043	2.042	2.043	2.039	2.032	2.040	2.043	2.043

试计算测量列的标准误差, 检验是否有异常值.

解: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = 2.041\text{mm}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = 0.003\text{mm}$$

为了检查各个 d_i 是否为异常值, 先取 3σ 作为取舍标准, 由于 $3\sigma = 0.009\text{mm}$, 因此 d_i 值的范围为 $2.032\text{mm} < d_i < 2.050\text{mm}$, 查看数据表, 没有发现异常值. 但采用肖维涅准则, 查表 1 得 $\omega_n = 2.00$, 即 $\omega_n \sigma = 2.00 \times 0.003 = 0.006\text{mm}$, 因此 d_i 的范围为 $2.035\text{mm} < d_i < 2.047\text{mm}$, 于是发现 $|d_8 - \bar{d}| > \omega_n \sigma$, 所以应该把 d_8 剔除. 剔除 d_8 后

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = 2.042\text{mm}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = 0.001\text{mm}$$

●算术平均值的标准误差 多次测量的偶然误差还可以用算术平均值的标准误差来表示, 其定义为

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}} \quad (13)$$

由 (10) 式和 (13) 式可见, $\sigma_{\bar{X}}$ 和 σ 的关系为

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (14)$$

上式表明, 当测量次数增加时, 可以提高测量结果的精密度。

●算术平均值的平均绝对误差 算术平均值的平均绝对误差 T 与测量列的平均绝对误差 η 之间的关系为

$$T = \frac{\eta}{\sqrt{n}} \quad (15)$$

用残差表示则为

$$T = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n\sqrt{n-1}} \quad (16)$$

在物理实验中, 我们往往用 (9) 式求平均绝对误差, 这时测量结果表示为

$$X = \bar{X} \pm \eta \quad (17)$$

●例 2. 用分析天平称量小铅块的质量, 结果如下:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m_i(\text{mg})$	48.0	47.9	47.5	48.2	48.4	47.8	48.6	48.3	47.8	48.1	48.2

求平均绝对误差 η , 标准误差 σ , 算术平均值的标准误差 σ_m , 并写出测量结果。

解: $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum m_i = 48.07 \text{mg}$

$$\eta = \frac{1}{n} \sum |m_i - \bar{m}| = 0.2 \text{mg}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m_i - \bar{m})^2}{n-1}} = 0.3 \text{mg}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.09 \text{mg}$$

结果表为

$$m = 48.1 \pm 0.2 \text{mg}$$

或

$$m = 48.07 \pm 0.09 \text{mg}$$

●单次测量的误差 单次测量的误差主要是仪器或测量者的分辨能力所造成的, 应根据实验情况作合理的估算。在一般情况下, 可取仪器出厂的鉴定书或仪器上注明的仪器误差作为单次测量的误差, 若无法查到仪器误差, 通常把仪器最小刻度的 $1/2$ 作为单次测量的误差, 而把最小刻度的 $1/\sqrt{3}$ 作为单次测量的标准误差。一些无法估读的仪器, 如游标卡尺、数字式仪表等, 就取最小刻度作为单次测量的误差。

§5. 间接测量的误差估算

物理实验中, 许多物理量无法进行直接测量, 如重力加速度、粘滞系数、电子的质量、光的波长等, 它们必须通过一些直接测量量、根据一定的函数关系求出。既然直接测量存在

误差, 间接测量也必然存在误差, 这就是误差的传递问题。

④误差传递公式 设间接测量 N 是直接测量量 X 、 Y 、 Z ... 的函数, 函数关系为

$$N=f(X,Y,Z,\dots) \quad (18)$$

令 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 、... 分别为测量 X 、 Y 、 Z ... 时产生的误差, ΔN 为由 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ ... 引起的 N 的误差, 因各误差与相应各测量量相比均很小, 可视为它们的微分, 所以将 (18) 式求微分, 有

$$dN = \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial Y} dY + \frac{\partial f}{\partial Z} dZ + \dots \quad (19)$$

将上式中的微分换成相应的误差, 则有

$$\Delta N = \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial f}{\partial Z} \Delta Z + \dots \quad (20)$$

将 (18) 式取对数后求全微分, 并将微分换成误差, 则得 N 的相对误差

$$E_\eta = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\partial \ln f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial \ln f}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial \ln f}{\partial Z} \Delta Z + \dots \quad (21)$$

(20) 式和 (21) 式就是误差传递的基本公式, 如何应用要视具体情况而定。对于系统误差, 因它们的偏离方向是一定的, 由它们引起的间接测量误差的偏离方向也是一定的, 此时误差的传递应该用代数传递, 即 (20) 式和 (21) 式中, 不论是误差传递系数 $\frac{\partial f}{\partial X}$ 、

$\frac{\partial f}{\partial Y}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial Z}$ 、... 或 $\frac{\partial \ln f}{\partial X}$ 、 $\frac{\partial \ln f}{\partial Y}$ 、 $\frac{\partial \ln f}{\partial Z}$ 、..., 还是 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 、...、 ΔN , 均是可正可负的; 对于偶然误差, 因它们的偏离方向不定, 可能在极端条件下传递, 此时误差的传递应该

表 2 常用函数的误差传递公式

函数关系式	误差的代数传递公式	误差的算术传递公式
$N = X \pm Y$	$\Delta \cdot N = \Delta \cdot X \pm \Delta \cdot Y$	$\Delta N = \Delta X + \Delta Y$
$N = XY$	$E_\eta = \frac{\Delta \cdot X}{X} + \frac{\Delta \cdot Y}{Y}$	$E_\eta = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$
$N = \frac{X}{Y}$	$E_\eta = \frac{\Delta \cdot X}{X} + \frac{\Delta \cdot Y}{Y}$	$E_\eta = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$
$N = mX$	$\Delta \cdot N = m \Delta \cdot X, E_\eta = \frac{\Delta \cdot X}{X}$	$\Delta N = m \Delta X, E_\eta = \frac{\Delta X}{X}$
$N = X^m$	$E_\eta = m \frac{\Delta \cdot X}{X}$	$E_\eta = m \frac{\Delta X}{X}$
$N = \sqrt[m]{X}$	$E_\eta = \frac{1}{m} \frac{\Delta \cdot X}{X}$	$E_\eta = \frac{1}{m} \frac{\Delta X}{X}$
$N = \ln X$	$\Delta \cdot N = \frac{\Delta \cdot X}{X}$	$\Delta N = \frac{\Delta X}{X}$
$N = \sin X$	$\Delta \cdot N = \cos X \Delta \cdot X$	$\Delta N = \cos X \Delta X$
$N = \cos X$	$\Delta \cdot N = -\sin X \Delta \cdot X$	$\Delta N = \sin X \Delta X$
$N = \operatorname{tg} X$	$\Delta \cdot N = \sec^2 X \Delta \cdot X$	$\Delta N = \sec^2 X \Delta X$

用算术传递，也就是将 (20) 式和 (21) 式取绝对值相加，即

$$\Delta N = \left| \frac{\partial f}{\partial X} \right| \Delta X + \left| \frac{\partial f}{\partial Y} \right| \Delta Y + \left| \frac{\partial f}{\partial Z} \right| \Delta Z + \dots \quad (22)$$

$$E_\eta = \frac{\Delta N}{N} = \left| \frac{\partial \ln f}{\partial X} \right| \Delta X + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial Y} \right| \Delta Y + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial Z} \right| \Delta Z + \dots \quad (23)$$

式中 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 、 $\dots$ 、 ΔN 均是正值。(22) 式和 (23) 式是偶然误差在极端条件下的传递公式，因而由它们求出的误差分别为最大绝对误差和最大相对误差。几个常用函数误差的代数传递公式和算术传递公式见表 2，表中假定自变量 X 、 Y 及常数 m 均取正值；为区别起见，我们将误差的代数传递公式中的各个系统误差打上“*”号。

表 2 中，有的函数只列出了绝对误差，有的函数只列出了相对误差，有的函数两种误差都列出，这是因为有的函数求绝对误差要方便些，有的函数求相对误差要方便些，有的函数两种误差的求法都差不多。在物理实验中，被测量的物理量往往不是直接测量量的单一函数形式，因此在求误差时应该选择适当的秩序，以便使问题简化。例如，当函数形式为和与差时，先求绝对误差、后求相对误差；当函数形式为积与商时，先求相对误差、后求绝对误差。

一般都假定系统误差已经修正，因此我们通常用的误差传递公式都是算术传递公式。

●例 3. 用单摆测重力加速度， $g = 4\pi^2 L T^{-2}$ ，求 Δg 和 E_η 。

解：

$$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln L - 2\ln T$$

$$E_\eta = \left| \frac{\partial \ln g}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial \ln g}{\partial T} \right| \Delta T = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T}{T}$$

$$\Delta g = g E_\eta$$

●例 4. 钢管的内径 $D_1 = \bar{D}_1 \pm \Delta D_1$ ，外径 $D_2 = \bar{D}_2 \pm \Delta D_2$ ，长 $L = \bar{L} \pm \Delta L$ ，求体积 V 的误差

解： $V = \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2) L$

$$\ln V = \ln \frac{\pi}{4} + \ln (D_2^2 - D_1^2) + \ln L$$

$$E_\eta = \left| \frac{\partial \ln V}{\partial D_1} \right| \Delta D_1 + \left| \frac{\partial \ln V}{\partial D_2} \right| \Delta D_2 + \left| \frac{\partial \ln V}{\partial L} \right| \Delta L$$

$$= \frac{2D_1 \Delta D_1}{D_2^2 - D_1^2} + \frac{2D_2 \Delta D_2}{D_2^2 - D_1^2} + \frac{\Delta L}{L}$$

$$= \frac{2(\bar{D}_1 \Delta D_1 + \bar{D}_2 \Delta D_2)}{\bar{D}_2^2 - \bar{D}_1^2} + \frac{\Delta L}{L}$$

$$\Delta V = V E_\eta = \frac{\pi}{4} (\bar{D}_2^2 - \bar{D}_1^2) \bar{L} E_\eta$$

●标准误差传递公式 设间接测量量 N 是直接测量量 X 、 Y 、 Z 、 $\dots$ 的函数，即 $N = f(X, Y, Z, \dots)$ ，若在测量时分别对 X 、 Y 、 Z 、 $\dots$ 作了 n 次测量，则可以，间接测量量的标准

误差等于各直接测量量的标准误差与相应传递系数乘积的方和根，即

$$\sigma_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 \sigma_Y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 \sigma_Z^2 + \dots} \quad (24)$$

相对误差

$$E_\sigma = \frac{\sigma_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial X}\right)^2 \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial Y}\right)^2 \sigma_Y^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial Z}\right)^2 \sigma_Z^2 + \dots} \quad (25)$$

式中 σ_X 、 σ_Y 、 σ_Z 、... 分别为直接测量量 X 、 Y 、 Z 、... 的标准误差

(如 $\sigma_X = \sqrt{(\sum (X_i - \bar{X})^2) / (n-1)}$)。几个常用函数的标准误差传递公式见表 3。

表 3 常用函数的标准误差传递公式

函数关系式	标准误差传递公式
$N = X \pm Y$	$\sigma_N = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$
$N = XY$	$E_\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2}$
$N = \frac{X}{Y}$	$E_\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2}$
$N = X^m$	$E_\sigma = m \frac{\sigma_X}{X}$
$N = \frac{X^a Y^b}{Z^c}$	$E_\sigma = \sqrt{a^2 \left(\frac{\sigma_X}{X}\right)^2 + b^2 \left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\sigma_Z}{Z}\right)^2}$
$N = \ln X$	$\sigma_N = \frac{\sigma_X}{X}$
$N = \sin X$	$\sigma_N = \cos X \sigma_X$

●例 5. 测量某圆柱的直径，所测数据为：5.642，5.648，5.653，5.640，5.639，5.646mm；圆柱体高度的单次测量值 $h = 6.715 \pm 0.005\text{cm}$ 。求圆柱体的体积。

解： $D = \bar{D} \pm \Delta D = 5.645 \pm 0.005\text{mm}$

$$\bar{V} = \frac{1}{4} \pi \bar{D}^2 \bar{h} = \frac{1}{4} \times 3.1415 \times 0.5645^2 \times 6.715 = 1.680 (\text{cm}^3)$$

$$E_\sigma = \frac{\sigma_V}{\bar{V}} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{\bar{D}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2} = \sqrt{\left(2 \times \frac{0.005}{5.645}\right)^2 + \left(\frac{0.005}{6.715}\right)^2} = 0.0019$$

$$\sigma_V = \bar{V} E_\sigma = 1.680 \times 0.0019 = 0.003 (\text{cm}^3)$$

所求体积 $V = \bar{V} \pm \sigma_V = 1.680 \pm 0.003 \text{cm}^3$

§6. 误差估算的意义