

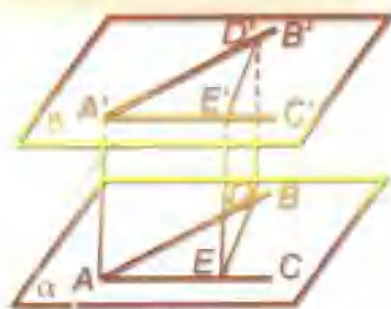
高中数学

龙门专题

傅荣强 主编

空间直线和平面

(修订版)



龍門書局

空间直线和平面

(修订版)

主 编 傅荣强

本册主编 刘贞彦 朱 岩

常 青 韩丽云



龍門書局

版权所有 翻印必究

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，
凡无此标志者均为非法出版物。

举报电话：(010)64033640 13501151303 (打假办)

邮购电话：(010)64000246



(修订版)

空间直线和平面

傅荣强 主编

责任编辑 王 敏 乌 云

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京二二〇七工厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2002年1月修 订 版 开本：890×1240 A5

2002年8月第六次印刷 印张：8 1/2

印数：120 001—150 000 字数：314 000

ISBN 7-80160-140-8/G·176

定 价：9.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻、迅速地明晰重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》,就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计 55 种,其中初中数学 12 种,高中数学 12 种,初中物理 5 种,高中物理 7 种,初中化学 4 种,高中化学 10 种,高中生物 5 种。

本套书在栏目设置上,主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”中的每节又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“知识点精析与应用”着眼于把基础知识讲透、讲细,帮助学生捋清知识脉络,牢固掌握知识点,为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“视野拓展”则是在牢固掌握基础知识的前提下,为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是,这部分虽然名为“拓展”,但仍然立足于教材本身,主要针对教材中因受篇幅所限言之不详,但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点,虽然不一定都很难,但却一直是学生在考试中最易丢分的内容),另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势,综合题与应用题越来越多,试行“3+X”高考模式以后,这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是为顺应这种形势而设,旨在提高学生的综合能力与应用能力,使学生面对纷繁多样的试题,能够随机应变,胸有成竹。

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》,有以下几个特点:

1. 以“专”为先 本套书共计 55 种,你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的论释,读过一本后,可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析,对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识,能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小,更易于理解和记忆。

3. 省时增效 由于“专题”内容集中,每一本书字数相对较少,学生可以有针对性地选择,以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. 局限性小 与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及,并分别自成一册;“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排,而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题,即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系,从而自然地连点成线,从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义,以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例,使学生能够根据自己的情况,权衡轻重,提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才,它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言,只有提高教学质量,提高效率,才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出,讲、练到位,对于提高学生对某一专题学习的相对效率,大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖,编写难度很大,又受作者水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请不吝指正。

编 者

2001年11月1日

编委会

(高中数学)

(修订版)

执行编委

王敏

常青

王文彦

傅荣福

刘贞彦

编主总

委编划

王家志

朱岩

傅荣强

龙门书局



目 录

第一篇 基础篇	(1)
第一讲 平面	(3)
1.1 平面	(3)
1.2 平面的基本性质	(10)
1.3 水平放置的平面图形的直观图的画法	(22)
高考热点题型评析与探索	(29)
本讲测试题	(32)
第二讲 空间两条直线	(41)
2.1 两条直线的位置关系	(41)
2.2 平行直线	(49)
2.3 两条异面直线所成的角	(56)
高考热点题型评析与探索	(71)
本讲测试题	(75)
第三讲 空间直线和平面	(83)
3.1 直线和平面平行的判定与性质	(83)
3.2 直线和平面垂直的判定与性质	(98)
3.3 斜线在平面上的射影,直线和平面所成的角, 三垂线定理	(114)
高考热点题型评析与探索	(139)
本讲测试题	(143)
第四讲 空间两个平面	(153)
4.1 两个平面平行的判定和性质	(153)
4.2 二面角	(170)

4.3 两个平面垂直的判定和性质	(206)
高考热点题型评析与探索	(237)
本讲测试题	(241)
第二篇 综合应用篇	(251)
一、空间两条直线的应用	(251)
二、空间直线和平面的应用	(253)
三、空间两个平面的应用	(256)
综合应用训练题	(259)

第一篇 基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简说研究“数”和“形”的学科.初等数学按其知识体系可划分为平面几何、代数、三角函数、解析几何、立体几何等五个分支.本书研究的空间直线和平面是立体几何的基础部分.

立体几何的本质是研究空间形体的位置关系和数量关系,并且有所侧重位置关系的讨论.

立体几何研究的主要对象可概述为“点、线、面、体”,即空间的点、直线、平面、多面体和旋转体.

立体几何研究的主要任务可归纳为“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”等六大类问题.即

平行:空间的两条直线、直线和平面、平面和平面在什么条件下平行?平行成立后,它们又具有什么样的性质.

垂直:讨论空间两条直线的相互垂直,空间直线和平面的相互垂直,空间平面和平面的相互垂直.

成角:两条异面直线所成的角,直线和平面所成的角,二面角.

距离:点与点、点与直线、点与平面,直线与直线、直线与平面,平面与平面的距离.

面积:多面体和旋转体的侧面积.

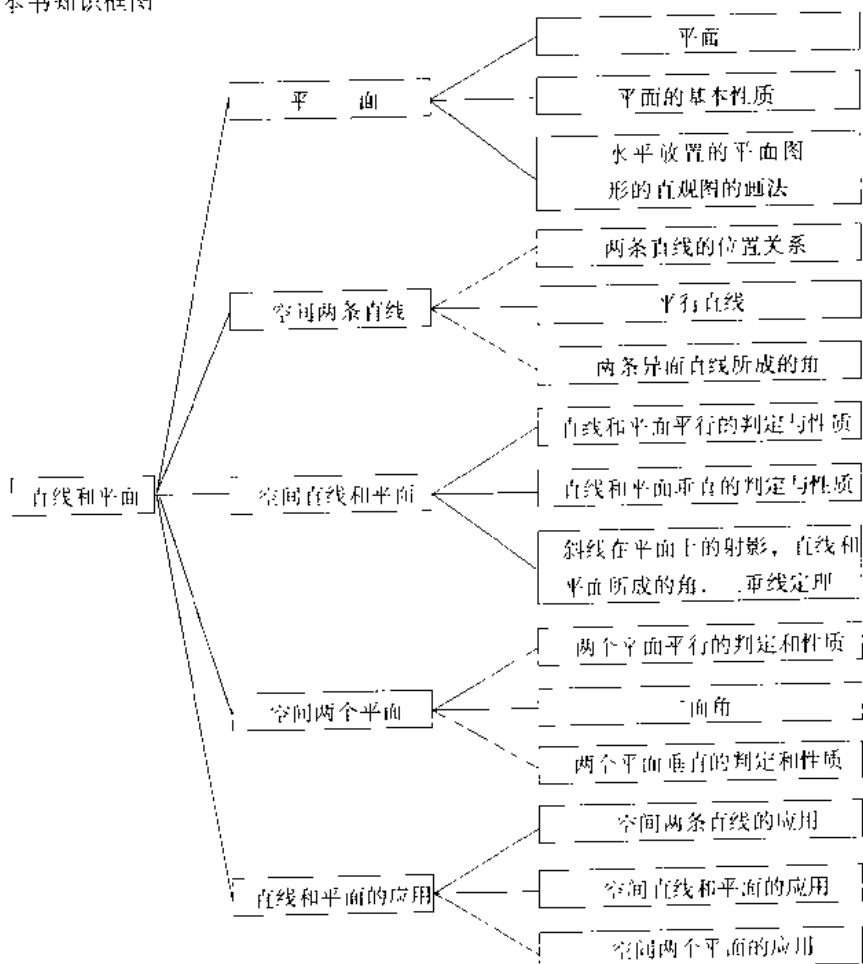
体积:多面体和旋转体的体积.

立体几何研究过程中所采用的方法是公理法.其结构是:

- 公理体系:
- ① 延续平面几何学说(首先承认只要空间元素在一个平面内,无论平面在空间的位置如何,平面几何学说成立);
 - ② 原始定义(如,点,什么是点?点就是点,无法对它加以定义,因为它是源头);
 - ③ 定义——揭示某个概念的本质属性,以区别于其他概念的逻辑方法;
 - ④ 公理——作为一切论证的基础,而本身不加任何证明的事实;
 - ⑤ 定理——已被证明的正确命题.

本书为《空间直线和平面》,它上承平面几何,使其得到延续和发展;下启多面体和旋转体,为其奠定基础.

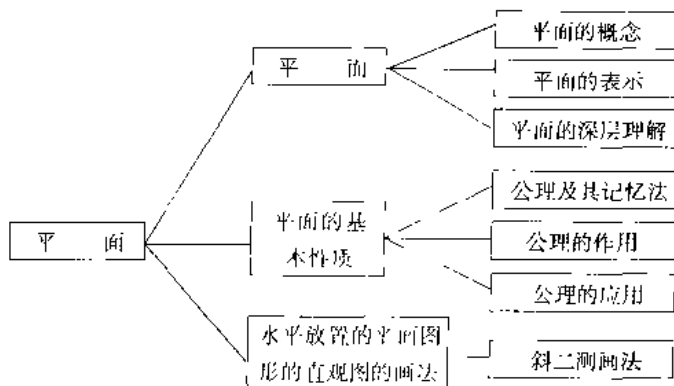
本书知识框图





第一讲 平 面

本讲知识框图



1.1 平 面



重点难点归纳

重点 ①理解平面的概念. ②会用符号语言、图形语言表示平面.

难点 对从实际生活中的平面抽象出立体几何中的平面的领悟.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1. 平面的概念

平面是一个描述而不定义、只需理解的最基本的原始概念. 立体几何里所说的平面是从生活中常见的桌子的表面、黑板面、平静的水面等中抽象出来的. 生活中的平面是人们直观感觉中的比较平、且大小有限的具体模型, 而立体几何中的平面则是理想化的绝对的平且可以无限延展的空间图形. 以后在立体几何中所说的平面, 都是指后一种.

2. 平面的表示

在立体几何中通常画平行四边形来表示平面,且平行四边形的锐角画成 45° ,横边画成等于邻边的2倍.当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮部分的线段画成虚线或不画.

平面通常用一个希腊字母表示,如平面 α 、平面 β 、平面 γ 等.也可用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示,如平面 AC 等等

3. 对平面的深层理解

(1)平面是绝对平的.

(2)平面没有厚度,也可理解厚度为0.

平面属原始定义范畴,无法用其他概念对它加以定义

(3)平面是无限延展的.

(4)平面和点、直线一样,是我们以后研究空间图形的基本元素之一,也是空间图形的一个重要的组成部分.

(5)有限的图形,如,平行四边形,用平行四边形表示平面,只是一种表示法,绝不能认为平行四边形就是平面.

(6)无限的平面,它将无限的空间分成两部分,如果想从平面的一侧到另一侧,必须穿过这个平面.

(7)平面可以看成是空间的一些特殊点组成的集合,它当然是一个无限集.

(8)用希腊字母表示平面在不会引起混淆的情况下,有时可以将“平面”二字省略不写;但用拉丁字母表示平面,如:平面 AC ,”平面”二字不可省略,甚至在一些复杂图形中为了区别起见,还要表示为平面 $ABCD$.表示三角形所在的平面,一般将三个顶点的字母都写出来,如,平面 ABC 、平面 ABD 等等.

(9)在平面几何中,凡是后引的辅助线都作成虚线.立体几何则不然,凡是被平面遮住的线(简称暗线),都画成虚线,凡是不被遮住的线(简称明线)都画成实线.无论是题中原有的、还是后引的辅助线.

【解题方法指导】

【例1】判断下列说法是否正确?并说明理由.

(1)平行四边形是一个平面.

理解平面概念

(2)任何一个平面图形都是一个平面.

掌握基本的几何画法

(3)空间图形中先画的线是实线,后画的线是虚线.

解 (1)不正确.平行四边形只是由空间中的四条线段组成,更不可能无限延展.

点评 我们只不过是用有限的、可看得到的平行四边形来表示漫无边际的平面,而不是说平行四边形就是平面.随着知识的深化,我们将来可以说“平行四边形是一个平面图形”,即它是某一个平面内的几何图形.

(2)不正确.平面图形和平面是两个截然不同的概念,平面图形是有大小的,不是无限延伸的.

切不可将平面图形与平面混为一谈

(3)不正确.在空间图形中能够看见的线画成实线,看不见的线画成虚线,与画线的先后顺序无关.

点评 这是初学立体几何需要转变的一个观念,受平面几何的影响,一些同学长时间对虚线没有新的认识,势必影响空间感的建立,阻碍了空间想象能力的培养

平面画法的拓展

[例 2] 图 1-1 中表示两个相交平面,其中画法正确的是 ()

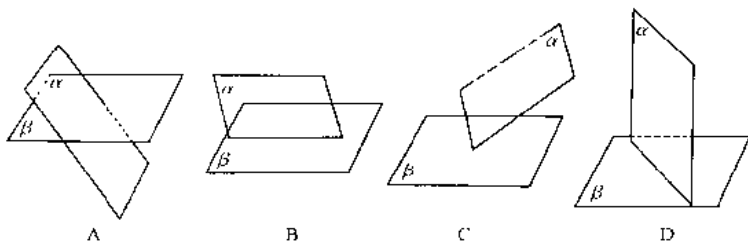


图 1-1

解 D 正确.

因为 A 中没有 α, β 的交线,也没有按照实虚线画法规则去画;同理 B, C 答案错.

点评 由于高中阶段没有设立系统地“画法几何”学习课程,所以画立体图形的方法要靠平时课堂的积累.

平面画法的深化

[例 3] 分别画出满足下列条件的图形:

培养空间想象能力

(1)两个相交平面;

(2)三个平面两两相交,画出两种情形即可.

解 (1)如图 1-2. (2)参看图 1-3.

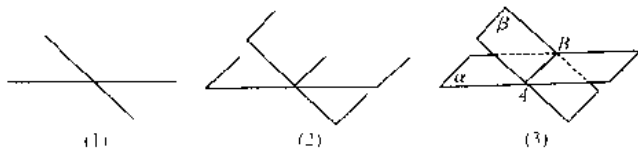


图 1-2

点评 画两个相交平面要画出交线,交线把表示每个平面的平行四边形分成两个小的平行四边形,注意画好实虚线.

[例 4] 一个平面将空间分成_____部分,两个平面将空间分成_____部分,三个平面将空间分成_____部分.

这是本节难点,结论需要记住.

解 本题对平面在空间的位置分类讨论.

一个平面将空间分成两部分.

两个平面相交时将空间分成 4 部分, 两个平面不相交时将空间分成 3 部分. 所以, 两个平面将空间分成 3 或 4 部分.

三个平面不相交时将空间分成 4 部分, 三个平面相交时分别将空间分成 6, 7, 8 部分. 详见图 1-3.

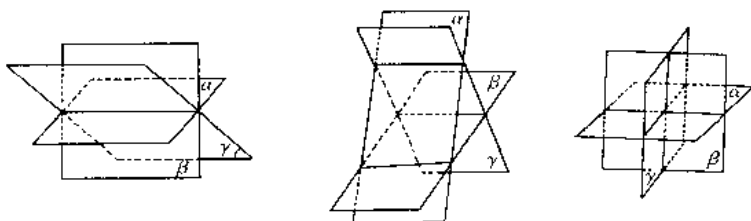


图 1-3

点评 先对两个平面在空间的位置分类讨论, 再让第三个平面以不同的形式介入, 这样设计分类讨论的程序, 在研究空间图形位置关系时, 要经常用到.

【基础训练题】

一、选择题

1. 下列说法正确的是 ()

- A. 镜面是平面
- B. 一个平面长 10 米, 宽 2 米
- C. 两个平面的面积是其中一个平面面积的 2 倍
- D. 所有的平面都是无限延展的

2. 图 1-4 中画法正确的是 ()

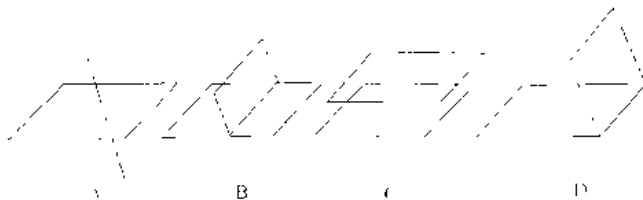


图 1-4

3. 下列说法中表示平面的是 ()

- A. 平静水面
- B. 玻璃黑板面
- C. 桌子的面
- D. 铅垂面

4. 下列说法中错误的是 ()

- A. 平面用一个小写希腊字母就可表示

- B. 平面可用表示平面的平行四边形的对角顶点的两个拉丁字母表示
 C. 三角形 ABC 所在平面与平面 α 可能只有一个公共点
 D. 一条直线和一个平面可能没有公共点

二、填空题

5. 平面几何所讲的直线是_____延长的.
 6. 立体几何所讲的平面是无限_____.
 7. 组成平面图形的点的集合是 A , 这个平面图形它所在的平面点集为 B . 那么 A 与 B 的关系是_____.
 8. 平面内的两条直线可以把平面分成_____部分.

三、解答题

9. 试画出满足下列条件的直线和平面.

- (1) 直线 a 穿过平面 α .
 (2) 直线 a 穿过两个相交平面 α 和 β .
 10. 凭想象画出三棱镜的直观图形.

学习立体几何, 一时一刻都离不开图形, 初学者要反复练习画图.

【答案与提示】

一、1. D (理解平面的定义可直接得出) 2. A 3. D 4. C (两个平面要么没有公共点, 如果有公共点的话, 根据平面无限延展的特点, 必有无数个公共点, 不可能只有一个公共点.)

二、5. 无限 6. 延展的 7. $A \subseteq B$ 8. 3 或 4 当两条直线平行时, 分成 3 部分, 当两条直线相交时, 分成 4 部分.

三、9 参照图 1-5. 10. 参照图 1-6.

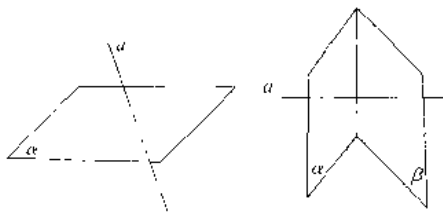


图 1-5

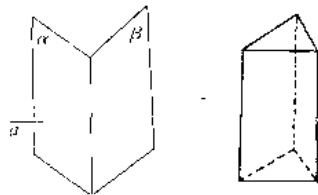


图 1-6

视野拓展

【释疑解难】

空间想象能力的形成始于对几何模型的观察

本节是立体几何的开篇课, 对空间图形的研究就从这里开始, 可谓帷幕刚刚

拉开.在初中平面几何中,我们是以一个平面为背景,圈定在这个平面内研究各种几何图形的相对位置和数量关系.平面概念的介入,标志着我们研究空间图形的位置关系和数量关系进入实质性阶段.这时的平面已经不再具有全集的地位,而是以空间元素的位置置于我们的讨论之中.为了直观、形象地表达空间元素的相互位置关系,平面又往往成为空间图形的位置关系的参照物.今后我们无论研究空间的两条直线还是研究空间的直线和平面,都要以平面为参照物去画图去分析和解决问题.由于平面的概念是从生活中抽象出来的,所以在研究有关平面问题时还离不开生活中的模型,如长方体、正方体等等.但它们的每一个面都是有限图形,把每个面无限延展就得到每个面所在的平面.初学者要善于观察这些几何体的表面特征,从中获得一些感性认识,逐渐培养自己的空间想象能力.

【典型例题导析】

【例5】 正方体各面所在平面将空间分成几部分?

本节难点

分析 如图1-7,若从整体考虑较难入手,不妨分层考虑,采取俯视图法.俯视平面 AB_1 、平面 BC_1 、平面 CD_1 、平面 DA_1 ,依次得 AB 、 BC 、 CD 、 DA .这时,正方体变成正方形 $ABCD$,再将正方形 $ABCD$ 延展为“ $\equiv$ ”字形,将空间分成9部分.两个互相平行的水平平面又将“ $\equiv$ ”字分成三层,因此正方体各面所在平面将空间分成27部分.

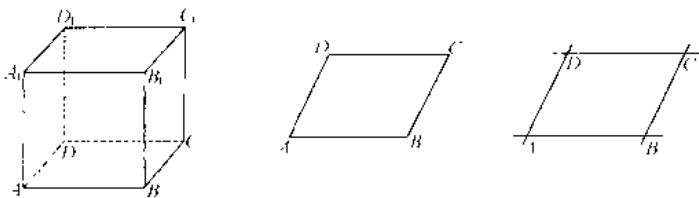


图 1-7

解 正方体各面所在平面将空间分成27部分.

点评 空间想象能力的培养就是这样开始的,以实物为参照,然后延展,归结到题目要求的意境中去.

【例6】 四个平面最多能将空间分成几部分?

分析 在掌握三个平面分空间问题的情况下,考虑第四个平面的放置,则易知将空间分成最多为15部分.

解 四个平面最多将空间分成15部分.由于三个平面最多将空间分成8部分,此时三条交线共点,形成像平面对顶角的形状.第四个平面放入后,最多能将七个空间部分分割成十四个空间部分,而有一个没有被第四个平面分割.

【思维拓展训练题】

1. 把图 1-8 中所给图形补充成相交平面.

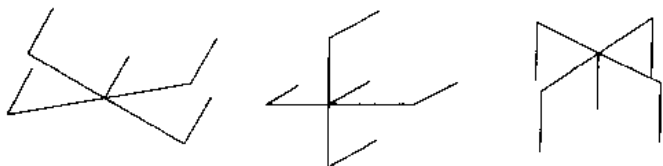


图 1-8

2. 一个西瓜切 3 刀, 最多能切出几块? 如果切 4 刀呢?

3. 如果一条直线上有两个点在一个平面内, 那么这条直线与这个平面的位置关系如何? 凭想象画出图形.

4. 如果两个平面有一个公共点, 那么这两个平面的位置关系如何? 画出图形.

5. 如果两个平面没有公共点, 那么这两个平面应是怎样的位置关系? 画出图形.

6. 空间的三个平面, 可能没有公共直线, 可能有一条公共直线, 可能有两公共直线, 可能有三条公共直线, 试画出图形.

7. 4 个平面两两相交于 6 条直线, 围成一个几何体, 试画出图形.

8. 一条直线与一个平面没有公共点, 试画出图形.

9. 一条直线能在一个平面内吗? 为什么, 如果能, 试画出图形.

10. 试画出一个长方体的直观图形.

【答案与提示】

1 如图 1-9.

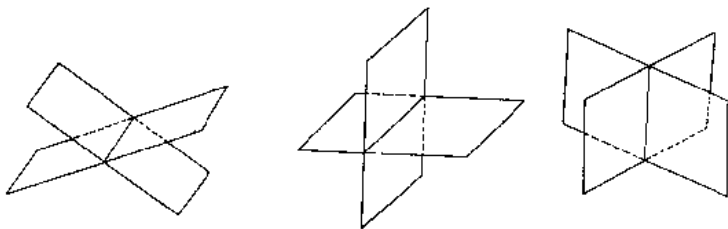


图 1-9

2. 一个西瓜切 3 刀, 最多能切出 8 块, 如果切 4 刀最多能切出 15 块.

3. 这条直线在平面内, 因为直线是直的, 平面是平的, 两点确定直线的位置, 两点在平面内, 就把直线确定到了平面内. 如图 1-10.

4. 如果两平面有一个公共点, 由于平面是平的, 又是无限延展的, 故必相交, 且有一

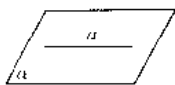


图 1-10