

四川省机械工业局编著

齿轮刀具设计理论基础

(下 册)

齿轮刀具设计理论基础

(下 册)

四川省机械工业局编著



机械工业出版社

本书是《齿轮刀具设计理论基础》(下册)。书中较全面、系统地阐述和论证了直齿锥齿轮铣刀、刨刀、圆拉刀盘、双铣刀盘及螺旋锥齿轮铣刀盘、奥利孔铣刀盘等的设计原理及计算方法,不少计算公式,均有详细的推导步骤。为便于读者学习,书中还以专门篇章论述圆锥齿轮(直齿锥齿轮与螺旋锥齿轮)刀具设计计算时所涉及到的数学基础。

本书可供从事锥齿轮刀具设计和锥齿轮加工的科技人员以及有关大专院校师生参考。

齿轮刀具设计理论基础

(下 册)

四川省机械工业局 编著

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

轻工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印张 $18 \frac{1}{4}$ · 字数 438 千字

1983年3月北京第一版·1983年3月北京第一次印刷

印数 0,001—7,900 · 定价 1.90 元

*

统一书号: 15033·5252

前 言

本书是《齿轮刀具设计理论基础》(上册)的续编,也是圆锥齿轮(直齿锥齿轮与螺旋锥齿轮)刀具设计理论基础的专辑,供从事锥齿轮刀具设计和锥齿轮加工的科技人员以及有关大专院校师生参考。

就圆锥齿轮加工所涉及到的各种刀具,例如直齿锥齿轮铣刀、刨刀、圆拉刀盘、双铣刀盘及螺旋锥齿轮铣刀盘、奥利孔铣刀盘等,本书均较全面、系统地阐述和论证了有关的设计原理及计算方法。书中不少计算公式,均有详细的推导步骤,并用最普遍的形式予以列出,这不仅能使读者较容易地掌握这些计算方法而举一反三,而且也便于采用电子计算机进行优化和运算。

本书第一篇是讨论圆锥齿轮刀具设计计算所涉及到的数学内容,诸如刚体运动、曲线曲面及共轭曲面等有关知识。结论和公式多从运动学和几何学的意义上加以简明扼要地说明和推导,使之直观、易懂,便于应用。但不过分追求数学上的严密性。

本书第二篇包括有直齿锥齿轮铣刀、刨刀、圆拉刀盘、双铣刀盘。铣刀与刨刀部分,着重讨论了直齿锥齿轮的啮合规律,分析其理论齿廓与近似齿廓,并建立了相应的表达式,探讨和研究了直齿锥齿轮仿形加工刀具的齿廓设计和造型误差等问题。

有关圆拉刀盘和双铣刀盘部分,本书在介绍其基本概念及应用的基础上,分别对圆拉法齿轮、刀具的参量与有关机床的调整,以及双铣刀盘的结构、机床调整、铣刀片的几何参量等,进行了系统的分析,推导出了有关刀具设计、机床调整的重要关系式,有助于读者对该类刀具的设计与调整计算。

本书第三篇在详细分析螺旋锥齿轮刀具设计、螺旋锥齿轮轮坯设计以及切齿计算三者关系的基础上,着重阐明了螺旋锥齿轮铣刀盘的设计原理,并严格地推导论证了在使用格利森计算卡SGM、SFM、SGT、SFT、HFM、HFT等加工方法时刀盘参数的计算公式和奥利孔EN型、TC型以及万能刀盘的计算方法。

本书尽量采用了ISO标准中有关的规定符号;ISO中没有规定的其他符号,在考虑到我国的沿用习惯,并参考了有关著作,予以酌情选定;公式中某些特殊符号,则在有关章节另作说明。书中带有a、b、c……的公式号,系指同一序号公式的等价公式;带有中括弧的公式号,则系指中间推导公式。

本书的编写工作是在第一汽车制造厂、国营五一机械厂、重庆大学、重庆工具厂、国营新都机械厂、四川齿轮厂、成都机床厂等单位的积极支持下进行的,由许香谷、肖诗纲、周惠久三同志负责主编,李福庆、曾韬、郑昌启、董仁扬、赵明光等同志参加编写。

本书在编写过程中,承蒙西安交通大学吴序堂同志、第二汽车制造厂侯昌友同志、渭阳柴油机厂傅耀先同志、汉江工具厂靳耀斌同志、四川齿轮厂杨顺栋同志、重庆探矿机械厂陈祖杰同志、成都科学技术大学罗家骏同志、四川省机械工业局王秉善同志等仔细审阅初稿,提出了不少宝贵意见,对保证本书质量起了积极的作用,特此致谢。

本书仅是为系统地、深入地总结齿轮刀具设计理论基础所作的初步尝试,书中的某些观点不一定完全正确,有些内容还有待于更进一步验证、修改和充实,希望广大读者批评指正。

四川省机械工业局

目 录

第一篇 数学基础

第一章 一些常用公式	1
一、行列式	1
二、矢量代数	2
三、矢量微分	4
四、运动与座标变换	5
第二章 刚体的运动	8
第一节 刚体的运动	8
一、刚体的运动用其上一点的移动速度和过该点的转动角速度表示	8
二、刚体的运动用动标的运动表示	9
三、刚体的运动表示为螺旋运动	10
第二节 相对微导——在运动座标系中矢量的微分	11
一、绝对速度、相对速度与牵连速度	11
二、变矢 $\alpha(t)$ 在定标 $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ 与动标 $\hat{i}^{(n)}\hat{j}^{(n)}\hat{k}^{(n)}$ 内的微导——绝对微导、相对微导	12
第三节 相对运动	13
一、相对运动速度	13
二、相对螺旋运动	15
三、相对运动加速度	16
第三章 曲线与曲面	18
第一节 曲线	18
一、曲线的矢量方程	18
二、曲线的弧长、切线、法线	18
三、切么矢、主法么矢、副法么矢——动标三棱形	19
四、动标三棱形在曲线上的运动——曲线论的基本公式	21
五、曲率 k	21
六、挠率 κ	23
七、曲线的泰勒展开式	24
第二节 曲面	25
一、曲面的法矢	25
二、曲面上一条曲线上的动标三棱形 $\hat{\alpha}\hat{\nu}\hat{n}$ 的运动	26
三、法曲率、短程挠率、短程曲率	28
四、欧拉—贝特朗公式	30
五、罗德里克方程、主曲率	32
六、曲面在邻域内的近似形状	34
七、两相切曲面的相对法曲率与相对短程挠率、曲率干涉	34
第四章 共轭曲面	37
第一节 由齿面 $\Sigma^{(1)}$ 及啮合运动求共轭齿面 $\Sigma^{(2)}$	37

一、啮合条件	37
二、共轭齿面 $\Sigma^{(2)}$ 的方程	37
三、接触线	38
四、共轭曲面上的点是奇点的条件	39
五、齿面 $\Sigma^{(1)}$ 上的奇点	40
六、齿面 $\Sigma^{(2)}$ 上的奇点	42
七、过渡曲面——两齿面交线的共轭曲面	43
第二节 共轭曲面的曲率关系	43
一、诱导法曲率	43
二、诱导法曲率的其他计算公式、接触线的方向角	47
三、沿相对运动速度 $v^{(12)}$ 方向的诱导法曲率 $k_0^{(12)}$	48
四、诱导短程挠率	49
 第二篇 直齿锥齿轮刀具	
第一章 直齿锥齿轮啮合基本知识	50
一、直齿锥齿轮的相对运动	50
二、直齿锥齿轮的啮合特点	51
三、球面渐开线齿廓与齿面	52
四、背锥渐开线啮合与齿廓	57
五、直齿锥齿轮的变位形式	60
第二章 直齿锥齿轮铣刀	62
一、概述	62
二、切向进刀的铣刀齿廓	62
三、径向进刀的铣刀齿廓	69
第三章 直齿锥齿轮定装滚刀	74
一、滚刀的特点及其加工原理	74
二、滚刀的齿廓及其造形误差	75
三、滚刀的齿距和齿厚	79
第四章 直齿锥齿轮刨刀	83
一、平面齿轮与平顶齿轮	83
二、刨刀的切削角度	85
三、刨刀齿形角与被切齿轮压力角	88
第五章 圆拉法加工直齿锥齿轮	90
第一节 概述	90
一、圆拉法	90
二、圆拉刀盘	91
三、圆拉齿轮	92
第二节 圆弧齿形啮合合理齿形曲率半径	94
一、概述	94
二、啮合方程与威利斯定理	95
三、一阶近似传动欧拉-萨瓦尔公式	96
四、二阶近似传动及其曲率关系式	98

五、圆弧齿形啮合齿形曲率半径关系式	100
六、啮合点M到啮合节点 M' 的距离 x 值	102
七、啮合圆弧齿合理齿形曲率半径	102
第三节 圆拉法齿轮轮齿基本参量	103
一、轮齿基本参量及其定义	103
二、确定轮齿基本参量的准备	104
三、齿线方向角关系式	105
四、齿轮根锥角关系式	106
五、刀具基锥底角关系式	107
六、计算轮齿基本参量时所用的参量	108
第四节 点共轭齿曲面的接触分析	111
一、点共轭齿曲面的应用	111
二、点共轭齿曲面的接触区及其控制方法	111
三、点共轭齿曲面的工作线方向	112
四、点共轭齿曲面的相对法曲率和相对短程挠率	117
五、点共轭齿曲面接触区方向的分析	118
第五节 圆拉法加工直齿锥齿轮齿面接触区的控制及拉齿基本参量	119
一、概述	119
二、圆拉法齿面接触区控制的基本关系式的计算参量	120
三、圆拉法齿面接触区控制的基本关系式中的齿面参量	123
四、齿轮齿面的相对主方向角 ε	125
五、圆拉法齿轮 2 拉齿基本参量	126
第六节 圆拉法刀具侧刃理论齿形的曲率半径	127
一、侧刃理论齿形曲率的确定方法	127
二、位置、运动和标架	128
三、计算参量 ϕ_i 的关系式	129
四、计算参量 Ψ 的关系式	130
五、刀具与齿轮的诱导法曲率 $k_{n\alpha}^{(12)}$ 关系式	131
六、刀具侧刃理论齿形曲率 $k_{n\alpha}^{(2)}$ 和曲率半径 ρ_0 的关系式	132
第七节 圆拉法齿轮齿线及理论圆拉刀	133
一、基本概念	133
二、轮齿倾斜齿线的倾斜角	134
三、轮齿弯曲齿线与实际齿线	135
四、齿轮接触基准点M切削时的刀具切削半径 R_c	138
五、刀具理论齿线	138
六、刀具理论构型面与切削表面	139
第八节 实际圆拉刀	140
一、基本定义与概念	140
二、刀具实际基锥	140
三、刀具实际齿形曲率半径	141
四、刀具实际构型面及实际构型齿线	143
第九节 接触线、刀痕线及运动参量	144
一、齿线、标架及齿线啮合条件	144

二、刀具切削表面	147
三、轮齿齿曲面	148
四、接触线、刀痕线与运动参量	152
第六章 加工直齿锥齿轮的双铣刀盘	153
第一节 双刀盘铣齿法概述	153
一、双刀盘铣齿法的应用、种类与特点	153
二、切削原理和切齿方法	154
三、刀盘结构与要求	156
第二节 铣刀直径以及装置位置与齿形角	157
一、铣刀直径以及装置位置与轮齿槽底凹度	157
二、齿轮齿向曲率与刀具切削齿形角	161
三、滚比的修正	162
第三节 刀片其他参量	163
一、刀片切削部分的几何角度及其变换	163
二、刀片后角	165
三、刀片测量齿形角	167
四、刀顶距和刀顶宽	168

第三篇 螺旋锥齿轮铣刀盘

第一章 弧齿锥齿轮铣刀盘	170
第一节 加工原理与铣刀盘结构	170
一、弧齿锥齿轮加工原理	170
二、刀头的构造	171
三、刀盘参数	172
第二节 刀顶距和刀尖圆角半径	174
一、螺旋角	174
二、大轮刀盘的刀顶距	174
三、小轮粗切刀刀顶距和小轮精切刀刀头顶宽	175
四、最大刀尖圆角半径	176
第三节 公称直径的选择	181
一、齿轮的标准收缩	181
二、合理的刀盘公称直径	183
三、轮坯的修正	185
第四节 大轮刀盘齿形角	186
一、铣齿机基本调整量	186
二、大轮的机床调整	187
三、大轮刀盘齿形角	188
四、用成形法加工大轮时的刀盘齿形角	190
第五节 小轮参考点的法矢和曲率	192
一、切齿计算原理	192
二、等距共轭曲面和参考点的选择	193
三、大轮齿面的法矢和曲率	195

四、小轮参考点的法矢和曲率	198
第六节 小轮刀盘的齿形角和刀尖直径(变性法)	201
一、小轮刀盘齿形角	201
二、小轮齿面曲率的修正	203
三、小轮刀盘的刀尖直径	205
四、格利森计算卡的计算公式	207
五、刀盘参数计算表	209
第七节 小轮刀盘的齿形角和刀尖直径(刀倾法)	216
一、在有刀倾机构的机床上加工小轮	216
二、刀盘参数计算表	219
第二章 准双曲面齿轮铣刀盘	225
第一节 准双曲面齿轮的几何关系	225
一、准双曲面齿轮	225
二、用 r_1 、 r_2 、 Q 确定节锥	226
三、已知 Q 和 δ_2 , 求 ε 和 δ_1	228
第二节 准双曲面齿轮的啮合特性	229
一、一些重要表达式	229
二、准双曲面齿轮的啮合特性	234
三、准双曲面齿轮的压力角和齿线曲率	239
第三节 大轮刀盘参数	240
一、大轮刀盘的公称直径	240
二、大轮刀盘齿形角	243
三、大轮刀盘的其余参数	246
第四节 小轮刀盘的齿形角和刀尖直径	247
第三章 延伸摆线齿锥齿轮刀盘〔奥利孔(Oerlikon)刀盘〕	250
第一节 刀盘标准系列参数的制订原理	250
一、平面齿轮上的齿线	250
二、轮齿的几何参数	252
三、刀盘的切线半径及其选择	253
四、刀号及其选择	255
五、采用标准刀盘后的参数计算	256
六、标准刀盘的结构特点	257
第二节 齿线的特性	260
一、平面齿轮上齿线的极坐标方程	260
二、齿线上任一点的螺旋角	261
第三节 刀盘设计和调整计算的基本公式	264
一、计算的通用原则	264
二、计算的基本公式	265
三、齿线在小端重合的简化计算	267
四、简化公式的准确性	268
第四节 鼓形系数和精刀的计算	270
一、齿线在计算点重合的计算公式	270

二、鼓形系数 F 和精刀的角距 τ_{wi}	270
三、鼓形量 f_b 的确定	271
四、精切刀的切线半径	273
第五节 过切问题和粗刀的计算	273
一、粗刀的过切现象	273
二、粗刀的位置和刀顶宽	274
三、EN 刀盘的计算公式	277
四、重磨系数 f_r	277
第六节 万能刀盘	278
一、万能刀盘的结构特点	278
二、万能刀盘的鼓形系数 F 和粗刀角距系数 V	279

第一篇 数学基础

第一章 一些常用公式

为方便阅读, 这里将本书上册所述的一些常用公式简介如下:

一、行列式

1. 行列式的展开式

二阶:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.1-1)$$

三阶:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad (1.1-1a)$$

2. 行列式的性质

(1) 行列式行与列互换, 其值不变, 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.1-2)$$

(2) 交换行列式的两行 (或列), 行列式变号, 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.1-3)$$

(3) 行列式任意行 (或列) 的公因子可提出, 即:

$$\begin{vmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} & k_1a_{13} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} & k_2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k_1k_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.1-4)$$

(4) 行列式某行 (或列) 各元素如果是二数之和, 则这个行列式可以化为两行列式之和, 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.1-5)$$

(5) 某行 (或列) 的各元素加上另一行 (或列) 的元素的 λ 倍, 行列式不变, 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.1-6)$$

(6) 行列式满足下列条件之一, 则行列式等于零:

- 1) 行列式中的两行 (或列) 对应元素相等或成比例;
- 2) 行列式中有一行 (或列) 的元素全为零;
- 3) 行列式中有一行 (或列) 是其他某些行 (或列) 对应元素的线性组合。

二、矢量代数

1. 矢量加法

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (1.1-7)$$

交换律: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (1.1-8)$

结合律: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (1.1-9)$

矢量组成封闭图形的条件: 和矢量等于零。

2. 线性关系

共线矢量中的一个矢量 $\mathbf{d}$, 可用共线矢量中的任一矢量 (如矢量 $\mathbf{a}$) 线性表示, 即:

$$\mathbf{d} = n\mathbf{a} \quad (1.1-10)$$

平面上的一个矢量 $\mathbf{d}$, 可用该平面上任意两个不共线的矢量 (如矢量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$) 线性表示, 即:

$$\mathbf{d} = n\mathbf{a} + m\mathbf{b} \quad (1.1-11)$$

在三维空间里的一个矢量 $\mathbf{d}$, 可用该空间任意三个不共面的矢量 (如矢量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$) 线性表示, 即:

$$\mathbf{d} = n\mathbf{a} + m\mathbf{b} + l\mathbf{c} \quad (1.1-12)$$

若 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 互相垂直且是单位矢量, 记它们为 $\hat{i}$ 、 $\hat{j}$ 、 $\hat{k}$, 则:

$$\mathbf{d} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k} \quad (1.1-13)$$

这就是矢量在直角坐标系内的表达式, 也可记为:

$$\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z) \quad (1.1-13a)$$

3. 数与矢量的乘法

结合律: $m(n\mathbf{a}) = (mn)\mathbf{a} \quad (1.1-14)$

分配律: $(m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$
 $m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a} \\ m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b} \end{matrix}} \right\} \quad (1.1-15)$

4. 数积

矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数积为:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = ab\cos\varphi \quad (1.1-16)$$

式中 φ —— $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 正方向的夹角。

交换律: $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a} \quad (1.1-17)$

分配律: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{a}\mathbf{d} + \mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{d} \quad (1.1-18)$

两矢量的数积无结合律, 如:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} \neq (\mathbf{b}\mathbf{c})\mathbf{a} \neq (\mathbf{a}\mathbf{c})\mathbf{b}$$

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})^2 \neq \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$$

$$\sqrt{a^2} \doteq a$$

矢量的长:

$$|a| = a = \sqrt{a^2} \quad (1.1-19)$$

两矢量的夹角:

$$\cos \varphi = \frac{ab}{ab} \quad (1.1-20)$$

两矢量垂直的条件, 其数积等于零。若 $a \perp b$, 则:

$$ab = 0 \quad (1.1-21)$$

5. 矢积

矢量 a 与 b 的矢积为:

$$c = a \times b = (ab \sin \varphi) \hat{e} \quad (1.1-22)$$

$\hat{e}$ 为 c 的么矢, 它垂直于 a , 也垂直于 b , 指向按右手法则或左手法则而定。

分配律:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad (1.1-23)$$

无交换律。矢积的次序颠倒, 则矢积变号, 即:

$$a \times b = -b \times a \quad (1.1-24)$$

无结合律, 即:

$$(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$$

两矢量的夹角:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{|a \times b|}{ab} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{|a \times b|}{ab} \end{aligned} \right\} \quad (1.1-25)$$

两矢量平行的条件, 其矢积为零。若 $a \parallel b$, 则:

$$a \times b = 0 \quad (1.1-26)$$

拉格朗日恒等式:

$$(a \times b)^2 + (ab)^2 = a^2 b^2 \quad (1.1-27)$$

6. 混积

矢量 a 、 b 、 c 的混积记为:

$$V = a(b \times c) = |abc| \quad (1.1-28)$$

混积中矢积与数积可以互换, 其值不变, 即:

$$a(b \times c) = (a \times b)c \quad (1.1-29)$$

混积中的矢量依次循环排列, 其值不变, 即:

$$|abc| = |bca| = |cab| \quad (1.1-30)$$

混积中任意两矢量位置互换, 其值变号, 即:

$$|abc| = -|bac| \quad (1.1-31)$$

三个矢量共面的条件, 其混积等于零。若 a 、 b 、 c 共面, 则:

$$|abc| = 0 \quad (1.1-32)$$

一个矢量若同时垂直于三个不共面的矢量, 则该矢量必为零矢。

拉格朗日恒等式:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix} = (ac)(bd) - (ad)(bc) \quad (1.1-33)$$

7. 双重矢积

三个矢量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 作双重矢量，其展开式为：

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (1.1-34)$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{a} = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \quad (1.1-34a)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \mathbf{b}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}| - \mathbf{a}|\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}| \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \mathbf{c}|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| - \mathbf{d}|\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}| \end{aligned} \right\} \quad (1.1-35)$$

或：

$$\text{若 } \mathbf{d} = \mathbf{a}, \text{ 则: } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a}|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| \quad (1.1-35a)$$

8. 矢量的运算在直角坐标系内的表达式

在直角坐标系内，若：

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

则：

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

三、矢量微分

变矢 $\mathbf{a}(t)$ 是数量 t 的函数，设它是连续可微的。将变矢 $\mathbf{a}(t)$ 的起点放在公共的原点 O 上，当 t 变化时，变矢 $\mathbf{a}(t)$ 的端点在空间的轨迹为一连续的曲线，该曲线称为变矢 $\mathbf{a}(t)$ 的矢量端图或速度图，也称为矢函数。在直角坐标系内：

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \quad (1.1-36)$$

导矢记为 $\mathbf{a}'(t)$ ：

$$\mathbf{a}'(t) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right) \quad (1.1-37)$$

它的方向为该点矢函数的切线方向，即为矢量端图的切矢。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{c} = \text{常矢} \quad (1.1-38)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (1.1-39)$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{a}) = m \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad m = \text{常数} \quad (1.1-40)$$

$$\frac{d}{dt}(u(t)\mathbf{a}) = \frac{du}{dt}\mathbf{a} + u \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad u = u(t) \quad (1.1-41)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a} \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (1.1-42)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (1.1-43)$$

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}| = \left| \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b}\mathbf{c} \right| + \left| \mathbf{a} \frac{d\mathbf{b}}{dt}\mathbf{c} \right| + \left| \mathbf{a}\mathbf{b} \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right| \quad (1.1-44)$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt_2} = \frac{d\mathbf{a}}{dt_1} \frac{dt_1}{dt_2} \quad \text{其中: } \mathbf{a} = \mathbf{a}(t_2), \quad t_1 = t_1(t_2) \quad (1.1-45)$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt_1} \frac{d\mathbf{b}}{dt_2} = \frac{d\mathbf{a}}{dt_2} \frac{d\mathbf{b}}{dt_1} \quad \text{其中: } t_1 = t_1(t_2), \quad t_2 = t_2(t_1) \quad (1.1-46)$$

径矢对极角的微分:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{|\mathbf{r}(\theta)|}{|\mathbf{r}'(\theta)|} = r(\theta) \frac{d\theta}{dr} \quad (1.1-47)$$

式中 $\mathbf{r}(\theta)$ —— 平面极坐标的径矢;

θ —— 平面极坐标的极角;

ψ —— 径矢 $\mathbf{r}(\theta)$ 与切矢 $\mathbf{r}'(\theta)$ 的夹角。

定长变矢的条件:

$$\mathbf{a}\mathbf{a}' = 0 \quad \text{其中: } |\mathbf{a}(t)| = \text{常数} \quad (1.1-48)$$

定向变矢的条件:

$$\mathbf{a} = m\mathbf{a}' \text{ 或 } \mathbf{a} \times \mathbf{a}' = 0 \quad \text{其中: } \hat{\mathbf{a}}(t) = \text{常矢} \quad (1.1-49)$$

平行于定平面的变矢的条件:

$$|\mathbf{a}\mathbf{a}'\mathbf{a}''| = 0 \quad (1.1-50)$$

函数的泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots \quad (1.1-51)$$

矢函数的泰勒展开式:

$$\mathbf{a}(t_0+t) = \mathbf{a}(t_0) + \mathbf{a}'(t_0)(t-t_0) + \frac{\mathbf{a}''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{\mathbf{a}'''(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \dots \quad (1.1-51 a)$$

泰勒展开式可以近似地表示函数, 项数取得愈多愈精确, 且愈是前面的项影响愈大。

四、运动与座标变换

点的移动是矢量的加法, 它比较简单。下面仅列出矢量绕座标轴旋转的公式及绕座标轴旋转的座标变换公式。

1. 一些符号的意义

$\mathbf{a}_m^{(t)}$ 表示矢量 $\mathbf{a}$ 的第 t 个位置在第 m 个观察座标系内的表达式, 或表示与第 t 个座标系固连的一个矢量 $\mathbf{a}$ 在第 m 个观察座标系内的表达式, 即:

$$\mathbf{a}_m^{(t)} \equiv (a_{mx}^{(t)}, a_{my}^{(t)}, a_{mz}^{(t)}) \quad (1.1-52)$$

$\mathbf{r}_m^{(n)}(A, t)$ 表示在时刻 t 第 n 个物体或第 n 个坐标系上的一点 A 的径矢在第 m 个观察坐标系内的表达式, 即:

$$\mathbf{r}_m^{(n)}(A, t) \equiv (x_m^{(n)}(A, t), y_m^{(n)}(A, t), z_m^{(n)}(A, t)) \quad (1.1-53)$$

$c^{(n)} = \mathbf{r}^{(n)}(u)$ 表示第 n 个物体或第 n 个坐标系上的一条曲线的参数方程。它在第 m 个观察坐标系内的表达式为 $\mathbf{r}_m^{(n)}(u)$ 。

$c^{(n)}(t) = \mathbf{r}^{(n)}(u, t)$ 表示 $\mathbf{r}^{(n)}$ 经运动后形成的曲线族。它在第 m 个观察系内的表达式为 $\mathbf{r}_m^{(n)}(u, t)$ 。

$\Sigma^{(n)} = \mathbf{r}^{(n)}(u, v)$ 表示第 n 个物体或第 n 个坐标系上的一个曲面的参数方程。它在第 m 个观察坐标系内的表达式为 $\mathbf{r}_m^{(n)}(u, v)$ 。

$\Sigma^{(n)}(t) = \mathbf{r}^{(n)}(u, v, t)$ 表示 $\mathbf{r}^{(n)}(u, v)$ 经过运动形成的曲面族。它在第 m 个观察系内的表达式为 $\mathbf{r}_m^{(n)}(u, v, t)$ 。

$\mathbf{r}^{(A)}$ 表示空间某特定点的径矢。它在第 m 个观察坐标系内的表达式为 $\mathbf{r}_m^{(A)}$ 。

2. 运动

若矢量 $\mathbf{a}_m^{(i)}$ 在坐标系 $O_m x_m y_m z_m$ 中绕 x 轴旋转 ϕ 角变为 $\mathbf{a}_m^{(i+1)}$, 则它们的关系为:

$$\mathbf{a}_m^{(i+1)} = \mathbf{A}_x(\phi) \mathbf{a}_m^{(i)} \quad (1.1-54)$$

同样, 绕 y 轴旋转 ψ 角后有:

$$\mathbf{a}_m^{(i+1)} = \mathbf{A}_y(\psi) \mathbf{a}_m^{(i)} \quad (1.1-55)$$

绕 z 轴旋转 θ 角后有

$$\mathbf{a}_m^{(i+1)} = \mathbf{A}_z(\theta) \mathbf{a}_m^{(i)} \quad (1.1-56)$$

若绕任意轴 $\hat{\omega}$ 旋转 φ 角, 则:

$$\mathbf{a}^{(i+1)} = \mathbf{A}_{\hat{\omega}}(\varphi) \mathbf{a}^{(i)} = (1 - \cos \varphi) (\hat{\omega} \mathbf{a}^{(i)}) \hat{\omega} + (\cos \varphi) \mathbf{a}^{(i)} + (\sin \varphi) (\hat{\omega} \times \mathbf{a}^{(i)}) \quad (1.1-57)$$

3. 座标变换

若同一矢量 $\mathbf{a}$ 在观察坐标系 $x_m y_m z_m$ 内的表达式为 $\mathbf{a}_m$, 在坐标系 $x_{m-1} y_{m-1} z_{m-1}$ 内的表达式为 $\mathbf{a}_{m-1}$, 而坐标系 $x_m y_m z_m$ 为坐标系 $x_{m-1} y_{m-1} z_{m-1}$ 绕 x 轴旋转 ϕ 角而得, 则 $\mathbf{a}_m$ 与 $\mathbf{a}_{m-1}$ 的关系为:

$$\mathbf{a}_{m-1} = \mathbf{A}_x(\phi) \mathbf{a}_m \quad (1.1-58)$$

若是绕 y 轴旋转 ψ 角, 则:

$$\mathbf{a}_{m-1} = \mathbf{A}_y(\psi) \mathbf{a}_m \quad (1.1-59)$$

若是绕 z 轴旋转 θ 角, 则:

$$\mathbf{a}_{m-1} = \mathbf{A}_z(\theta) \mathbf{a}_m \quad (1.1-60)$$

4. 座标变换阵

$\mathbf{A}_x(\phi)$ 、 $\mathbf{A}_y(\psi)$ 、 $\mathbf{A}_z(\theta)$ 为基本座标变换阵, 它们分别为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_x(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_y(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1.1-61)$$

上述公式中的坐标变换阵，正向旋转用原阵 $A_x(\phi)$ 、 $A_y(\psi)$ 、 $A_z(\theta)$ ，反向旋转用逆阵 $A_x^{-1}(\phi)$ 、 $A_y^{-1}(\psi)$ 、 $A_z^{-1}(\theta)$ 。对于坐标变换阵，其逆阵就是它的转置阵(行列互换)。

正转与反转：若采用的是右手坐标系，则按右螺旋的旋转为正转，或者说它的转角为正；而按左螺旋的旋转为反转，或者说它的转角为负。若采用的是左手坐标系，则正反向与右手坐标系恰好相反。以后没有特别申明，我们都采用右手坐标系。

连续几次旋转的坐标变换阵，就是上述这些基本坐标变换阵不同组合的乘积。

5. 矩阵的乘法

矢量与矩阵的乘法：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} \quad (1.1-62)$$

矩阵与矩阵的乘法：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \quad (1.1-63)$$