四川省机械工业局编著

齿轮刀具设计理论基础

（下　册）

齿轮刀具设计理论基础

（下　册）

四川省机械工业局编著

机械工业出版社

本书是《齿轮刀具设计理论基础》（下册）。书中较全面、系统地阐述和论证了直齿锥齿轮铣刀、刨刀、圆拉刀盘、双铣刀盘及螺旋锥齿轮铣刀盘、奥利孔铣刀盘等的设计原理及计算方法，不少计算公式，均有详细的推导步骤。为便于读者学习，书中还以专门篇章论述圆锥齿轮（直齿锥齿轮与螺旋锥齿轮）刀具设计计算时所涉及到的数学基础。

本书可供从事锥齿轮刀具设计和锥齿轮加工的科技人员以及有关大专院校师生参考。

齿轮刀具设计理论基础

（下　　册）

四川省机械工业局　编著

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

轻工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 18 1/4·字数 438 千字

1983年 3 月北京第一版·1983年 3 月北京第一次印刷

印数　0,001—7,900·定价 1.90 元

*

统一书号：15033·5252

前　言

本书是《齿轮刀具设计理论基础》(上册)的续编，也是圆锥齿轮（直齿锥齿轮与螺旋锥齿轮）刀具设计理论基础的专辑，供从事锥齿轮刀具设计和锥齿轮加工的科技人员以及有关大专院校师生参考。

就圆锥齿轮加工所涉及到的各种刀具，例如直齿锥齿轮铣刀、刨刀、圆拉刀盘、双铣刀盘及螺旋锥齿轮铣刀盘、奥利孔铣刀盘等，本书均较全面、系统地阐述和论证了有关的设计原理及计算方法。书中不少计算公式，均有详细的推导步骤，并用最普遍的形式予以列出，这不仅能使读者较容易地掌握这些计算方法而举一反三，而且也便于采用电子计算机进行优化和运算。

本书第一篇是讨论圆锥齿轮刀具设计计算所涉及到的数学内容，诸如刚体运动、曲线曲面及共轭曲面等有关知识。结论和公式多从运动学和几何学的意义上加以简明扼要地说明和推导，使之直观、易懂，便于应用。但不过分追求数学上的严密性。

本书第二篇包括有直齿锥齿轮铣刀、刨刀、圆拉刀盘、双铣刀盘。铣刀与刨刀部分，着重讨论了直齿锥齿轮的啮合规律，分析其理论齿廓与近似齿廓，并建立了相应的表达式，探讨和研究了直齿锥齿轮仿形加工刀具的齿廓设计和造型误差等问题。

有关圆拉刀盘和双铣刀盘部分，本书在介绍其基本概念及应用的基础上，分别对圆拉法齿轮、刀具的参量与有关机床的调整，以及双铣刀盘的结构、机床调整、铣刀片的几何参量等，进行了系统的分析，推导出了有关刀具设计、机床调整的重要关系式，有助于读者对该类刀具的设计与调整计算。

本书第三篇在详细分析螺旋锥齿轮刀具设计、螺旋锥齿轮轮坯设计以及切齿计算三者关系的基础上，着重阐明了螺旋锥齿轮铣刀盘的设计原理，并严格地推导论证了在使用格利森计算卡 SGM、SFM、SGT、SFT、HFM、HFT 等加工方法时刀盘参数的计算公式和奥利孔 EN 型、TC 型以及万能刀盘的计算方法。

本书尽量采用了 ISO 标准中有关的规定符号；ISO 中没有规定的其他符号，在考虑到我国的沿用习惯，并参考了有关著作，予以酌情选定；公式中某些特殊符号，则在有关章节另作说明。书中带有 a 、b 、c ……的公式号，系指同一序号公式的等价公式；带有中括弧的公式号，则系指中间推导公式。

本书的编写工作是在第一汽车制造厂、国营五一机械厂、重庆大学、重庆工具厂、国营新都机械厂、四川齿轮厂、成都机床厂等单位的积极支持下进行的，由许香谷、肖诗纲、周惠久三同志负责主编，李福庆、曾韬、郑昌启、董仁扬、赵明光等同志参加编写。

本书在编写过程中，承蒙西安交通大学吴序堂同志、第二汽车制造厂侯昌友同志、渭阳柴油机厂傅耀先同志、汉江工具厂靳耀斌同志、四川齿轮厂杨顺栋同志、重庆探矿机械厂陈祖杰同志、成都科学技术大学罗家骏同志、四川省机械工业局王秉善同志等仔细审阅初稿，提出了不少宝贵意见，对保证本书质量起了积极的作用，特此致谢。

本书仅是为系统地、深入地总结齿轮刀具设计理论基础所作的初步尝试，书中的某些观点不一定完全正确，有些内容还有待于更进一步验证、修改和充实，希望广大读者批评指正。

四川省机械工业局

目　　录

第一篇　数学基础

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二篇 直齿锥齿轮刀具

第三篇　螺旋锥齿轮铣刀盘

第一篇　数学基础

第一章　一些常用公式

为方便阅读，这里将本书上册所述的一些常用公式简介如下：

一、行列式

1．行列式的展开式

二阶：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1-1}$$

三阶：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} \tag{1.1-1 a}$$

2．行列式的性质

（1）行列式行与列互换，其值不变，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1-2}$$

（2）交换行列式的两行（或列），行列式变号，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1-3}$$

（3）行列式任意行（或列）的公因子可提出，即：

$$\begin{vmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} & k_1a_{13} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} & k_2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k_1k_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1-4}$$

（4）行列式某行（或列）各元素如果是二数之和，则这个行列式可以化为两行列式之和，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1-5}$$

（5）某行（或列）的各元素加上另一行（或列）的元素的 λ 倍，行列式不变，即：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & a_{23}+\lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1-6}$$

（6）行列式满足下列条件之一，则行列式等于零：

1）行列式中的两行（或列）对应元素相等或成比例；

2）行列式中有一行（或列）的元素全为零；

3）行列式中有一行（或列）是其他某些行（或列）对应元素的线性组合。

二、矢量代数

1．矢量加法

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \tag{1.1-7}$$

交换律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{1.1-8}$$

结合律：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{1.1-9}$$

矢量组成封闭图形的条件：和矢量等于零。

2．线性关系

共线矢量中的一个矢量 $\boldsymbol{d}$，可用共线矢量中的任一矢量（如矢量 $\boldsymbol{a}$）线性表示，即：

$$\boldsymbol{d}=n\boldsymbol{a} \tag{1.1-10}$$

平面上的一个矢量 $\boldsymbol{d}$，可用该平面上任意两个不共线的矢量（如矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$）线性表示，即：

$$\boldsymbol{d}=n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b} \tag{1.1-11}$$

在三维空间里的一个矢量 $\boldsymbol{d}$，可用该空间任意三个不共面的矢量（如矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$）线性表示，即：

$$\boldsymbol{d}=n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+l\boldsymbol{c} \tag{1.1-12}$$

若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 互相垂直且是单位矢量，记它们为 $\hat{\mathrm{i}}$、$\hat{\mathrm{j}}$、$\hat{\mathrm{k}}$，则：

$$\boldsymbol{d}=d_x\hat{\mathrm{i}}+d_y\hat{\mathrm{j}}+d_z\hat{\mathrm{k}} \tag{1.1-13}$$

这就是矢量在直角座标系内的表达式，也可记为：

$$\boldsymbol{d}=(d_x,\ d_y,\ d_z) \tag{1.1-13a}$$

3．数与矢量的乘法

结合律：

$$m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a} \tag{1.1-14}$$

分配律：

$$\left.\begin{aligned}(m+n)\boldsymbol{a}&=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}\\ m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}\end{aligned}\right\} \tag{1.1-15}$$

4．数积

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数积为：

$$\boldsymbol{ab}=ab\cos\varphi \tag{1.1-16}$$

式中 φ——$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正方向的夹角。

交换律：

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba} \tag{1.1-17}$$

分配律：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{bd} \tag{1.1-18}$$

两矢量的数积无结合律，如：

$$(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}\neq(\boldsymbol{bc})\boldsymbol{a}\neq(\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{ab})^2\neq\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$$

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2} \neq \boldsymbol{a}$$

矢量的长：

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{\boldsymbol{a}^2} \tag{1.1-19}$$

两矢量的夹角：

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab} \tag{1.1-20}$$

两矢量垂直的条件，其数积等于零。若 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$，则：

$$\boldsymbol{ab} = 0 \tag{1.1-21}$$

5．矢积

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢积为：

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (ab\sin\varphi)\hat{\boldsymbol{c}} \tag{1.1-22}$$

$\hat{\boldsymbol{c}}$ 为 $\boldsymbol{c}$ 的么矢，它垂直于 $\boldsymbol{a}$，也垂直于 $\boldsymbol{b}$，指向按右手法则或左手法则而定。

分配律：

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \tag{1.1-23}$$

无交换律。矢积的次序颠倒，则矢积变号，即：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{1.1-24}$$

无结合律，即：

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

两矢量的夹角：

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}{ab} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}{\boldsymbol{ab}} \end{aligned}\right\} \tag{1.1-25}$$

两矢量平行的条件，其矢积为零。若 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$，则：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \tag{1.1-26}$$

拉格朗日恒等式：

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{ab})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \tag{1.1-27}$$

6．混积

矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混积记为：

$$V = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{abc}| \tag{1.1-28}$$

混积中矢积与数积可以互换，其值不变，即：

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{1.1-29}$$

混积中的矢量依次循环排列，其值不变，即：

$$|\boldsymbol{abc}| = |\boldsymbol{bca}| = |\boldsymbol{cab}| \tag{1.1-30}$$

混积中任意两矢量位置互换，其值变号，即：

$$|\boldsymbol{abc}| = -|\boldsymbol{bac}| \tag{1.1-31}$$

三个矢量共面的条件，其混积等于零。若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，则：

$$|\boldsymbol{abc}| = 0 \tag{1.1-32}$$

一个矢量若同时垂直于三个不共面的矢量，则该矢量必为零矢。

拉格朗日恒等式：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\mathbf{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad} \\ \mathbf{bc} & \boldsymbol{bd} \end{vmatrix}=(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd})-(\boldsymbol{ad})(\mathbf{bc}) \tag{1.1-33}$$

7. 双重矢积

三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\mathbf{c}$作双重矢量，其展开式为：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})-\mathbf{c}(\boldsymbol{ab}) \tag{1.1-34}$$

$$(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})\boldsymbol{a}=\mathbf{c}(\boldsymbol{ab})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) \tag{1.1-34 a}$$

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\mathbf{c}\times\boldsymbol{d})&=\boldsymbol{b}|\boldsymbol{acd}|-\boldsymbol{a}|\boldsymbol{bcd}|\\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\mathbf{c}\times\boldsymbol{d})&=\mathbf{c}|\boldsymbol{dab}|-\boldsymbol{d}|\boldsymbol{cab}|\end{aligned}\right\} \tag{1.1-35}$$

或：

若 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}$，则：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\mathbf{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}|\boldsymbol{abc}| \tag{1.1-35 a}$$

8. 矢量的运算在直角坐标系内的表达式

在直角坐标系内，若：

$$\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$$

$$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$$

$$\mathbf{c}=(c_x,\ c_y,\ c_z)$$

则：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$$

$$\boldsymbol{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{abc}|=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

三、矢量微分

变矢 $\boldsymbol{a}(t)$是数量 t 的函数，设它是连续可微的。将变矢 $\boldsymbol{a}(t)$ 的起点放在公共的原点O上，当 t 变化时，变矢 $\boldsymbol{a}(t)$的端点在空间的轨迹为一连续的曲线，该曲线称为变矢 $\boldsymbol{a}(t)$ 的矢量端图或速度图，也称为矢函数。在直角坐标系内：

$$\boldsymbol{a}(t)=(a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)) \tag{1.1-36}$$

导矢记为 $\boldsymbol{a}'(t)$：

$$\boldsymbol{a}'(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1.1-37}$$

它的方向为该点矢函数的切线方向，即为矢量端图的切矢。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{c}=0,\ \mathbf{c}=\text{常矢} \tag{1.1-38}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1-39}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{a})=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t},\quad m=\text{常数} \tag{1.1-40}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t)\boldsymbol{a})=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}+u\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t},\quad u=u(t) \tag{1.1-41}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{ab})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1-42}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1-43}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{abc}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{bc}\right|+\left|\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c}\right|+\left|\boldsymbol{ab}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}\right| \tag{1.1-44}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t_2}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t_1}\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t_2}\quad\text{其中：}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t_2),\ t_1=t_1(t_2) \tag{1.1-45}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t_2}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t_1}\quad\text{其中：}t_1=t_1(t_2),\ t_2=t_2(t_1) \tag{1.1-46}$$

径矢对极角的微分：

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{|\boldsymbol{r}(\theta)|}{|\boldsymbol{r}'(\theta)|}=r(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} \tag{1.1-47}$$

式中 $\boldsymbol{r}(\theta)$——平面极座标的径矢；

θ——平面极座标的极角；

ψ——径矢 $\boldsymbol{r}(\theta)$ 与切矢 $\boldsymbol{r}'(\theta)$ 的夹角。

定长变矢的条件：

$$\boldsymbol{aa}'=0\qquad\text{其中：}|\boldsymbol{a}(t)|=\text{常数} \tag{1.1-48}$$

定向变矢的条件：

$$\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}'\text{或}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}'=0\quad\text{其中：}\hat{a}(t)=\text{常矢} \tag{1.1-49}$$

平行于定平面的变矢的条件：

$$|\boldsymbol{aa}'\boldsymbol{a}''|=0 \tag{1.1-50}$$

函数的泰勒展开式：

$$f(x)f=(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\cdots\cdots \tag{1.1-51}$$

矢函数的泰勒展开式：

$$\boldsymbol{a}(t_0+t)=\boldsymbol{a}(t_0)+\boldsymbol{a}'(t_0)(t-t_0)+\frac{\boldsymbol{a}''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\frac{\boldsymbol{a}'''(t_0)}{3!}(t-t_0)^3+\cdots\cdots \tag{1.1-51 a}$$

泰勒展开式可以近似地表示函数，项数取得愈多愈精确，且愈是前面的项影响愈大。

四、运动与座标变换

点的移动是矢量的加法，它比较简单。下面仅列出矢量绕座标轴旋转的公式及绕座标轴旋转的座标变换公式。

1．一些符号的意义

$\boldsymbol{a}_m^{(t)}$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的第 t 个位置在第 m 个观察座标系内的表达式，或表示与第 t 个座标系固连的一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 在第 m 个观察座标系内的表达式，即：

$$\boldsymbol{a}_m^{(t)}\equiv(a_{mx}^{(t)},\ a_{my}^{(t)},\ a_{mz}^{(t)}) \tag{1.1-52}$$

323429

$\boldsymbol{r}_m^{(n)}(A, t)$ 表示在时刻 t 第 n 个物体或第 n 个座标系上的一点A的径矢在第 m 个观察座标系内的表达式，即：

$$\boldsymbol{r}_m^{(n)}(A, t) \equiv (x_m^{(n)}(A, t),\ y_m^{(n)}(A, t),\ z_m^{(n)}(A, t)) \tag{1.1-53}$$

$c^{(n)} = \boldsymbol{r}^{(n)}(u)$ 表示第 n 个物体或第 n 个座标系上的一条曲线的参数方程。它在第 m 个观察座标系内的表达式为 $\boldsymbol{r}_m^{(n)}(u)$。

$c^{(n)}(t) = \boldsymbol{r}^{(n)}(u, t)$ 表示 $\boldsymbol{r}^{(n)}$ 经运动后形成的曲线族。它在第 m 个观察系内的表达式为 $\boldsymbol{r}_m^{(n)}(u, t)$。

$\Sigma^{(n)} = \boldsymbol{r}^{(n)}(u, v)$ 表示第 n 个物体或第 n 个座标系上的一个曲面的参数方程。它在第 m 个观察座标系内的表达式为 $\boldsymbol{r}_m^{(n)}(u, v)$。

$\Sigma^{(n)}(t) = \boldsymbol{r}^{(n)}(u, v, t)$ 表示 $\boldsymbol{r}^{(n)}(u, v)$ 经过运动形成的曲面族。它在第 m 个观察系内的表达式为 $\boldsymbol{r}_m^{(n)}(u, v, t)$。

$\boldsymbol{r}^{(A)}$ 表示空间某特定点的径矢。它在第 m 个观察座标系内的表达式为 $\boldsymbol{r}_m^{(A)}$。

2、运动

若矢量 $\boldsymbol{a}_m^{(t)}$ 在座标系 $O_m x_m y_m z_m$ 中绕 x 轴旋转 ϕ 角变为 $\boldsymbol{a}_m^{(t+1)}$，则它们的关系为：

$$\boldsymbol{a}_m^{(t+1)} = \boldsymbol{A}_x(\phi)\boldsymbol{a}_m^{(t)} \tag{1.1-54}$$

同样，绕 y 轴旋转 ψ 角后有：

$$\boldsymbol{a}_m^{(t+1)} = \boldsymbol{A}_y(\psi)\boldsymbol{a}_m^{(t)} \tag{1.1-55}$$

绕 z 轴旋转 θ 角后有

$$\boldsymbol{a}_m^{(t+1)} = \boldsymbol{A}_z(\theta)\boldsymbol{a}_m^{(t)} \tag{1.1-56}$$

若绕任意轴 $\hat{\omega}$ 旋转 φ 角，则：

$$\boldsymbol{a}^{(t+1)} = \boldsymbol{A}_{\hat{\omega}}(\varphi)\boldsymbol{a}^{(t)} = (1-\cos\varphi)(\hat{\omega}\boldsymbol{a}^{(t)})\hat{\omega} + (\cos\varphi)\boldsymbol{a}^{(t)} + (\sin\varphi)(\hat{\omega}\times\boldsymbol{a}^{(t)}) \tag{1.1-57}$$

3、座标变换

若同一矢量 $\boldsymbol{a}$ 在观察座标系 $x_m y_m z_m$ 内的表达式为 $\boldsymbol{a}_m$，在座标系 $x_{m-1}y_{m-1}z_{m-1}$ 内的表达式为 $\boldsymbol{a}_{m-1}$，而座标系 $x_m y_m z_m$ 为座标系 $x_{m-1}y_{m-1}z_{m-1}$ 绕 x 轴旋转 ϕ 角而得，则 $\boldsymbol{a}_m$ 与 $\boldsymbol{a}_{m-1}$ 的关系为：

$$\boldsymbol{a}_{m-1} = \boldsymbol{A}_x(\phi)\boldsymbol{a}_m \tag{1.1-58}$$

若是绕 y 轴旋转 ψ 角，则：

$$\boldsymbol{a}_{m-1} = \boldsymbol{A}_y(\psi)\boldsymbol{a}_m \tag{1.1-59}$$

若是绕 z 轴旋转 θ 角，则：

$$\boldsymbol{a}_{m-1} = \boldsymbol{A}_z(\theta)\boldsymbol{a}_m \tag{1.1-60}$$

4、座标变换阵

$\boldsymbol{A}_x(\phi)$、$\boldsymbol{A}_y(\psi)$、$\boldsymbol{A}_z(\theta)$ 为基本座标变换阵，它们分别为：

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_x(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{A}_y(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{A}_z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{1.1-61}$$

上述公式中的座标变换阵，正向旋转用原阵 $\boldsymbol{A}_x(\phi)$、$\boldsymbol{A}_y(\psi)$、$\boldsymbol{A}_z(\theta)$，反向旋转用逆阵 $\boldsymbol{A}_x^{-1}(\phi)$、$\boldsymbol{A}_y^{-1}(\psi)$、$\boldsymbol{A}_z^{-1}(\theta)$。对于座标变换阵，其逆阵就是它的转置阵(行列互换)。

正转与反转：若采用的是右手座标系，则按右螺旋的旋转为正转，或者说它的转角为正；而按左螺旋的旋转为反转，或者说它的转角为负。若采用的是左手座标系，则正反向与右手座标系恰好相反。以后没有特别申明，我们都采用右手座标系。

连续几次旋转的座标变换阵，就是上述这些基本座标变换阵不同组合的乘积。

5．矩阵的乘法

矢量与矩阵的乘法：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} \tag{1.1-62}$$

矩阵与矩阵的乘法：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \tag{1.1-63}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com