高等学校数学基础课教材

简明线性代数

丘维声 编著

北京大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

简明线性代数/丘维声编著. 一北京:北京大学出版社,2002.2
ISBN 7-301-05397-5

Ⅰ.简… Ⅱ.丘… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 002317 号

书　　名:简明线性代数
著作责任者:丘维声　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05397-5/O·0528
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
排　版　者:高新特激光照排中心　62637627
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
890×1240　A5 开本　10.5 印张　290 千字
2002 年 2 月第 1 版　2002 年 2 月第 1 次印刷
印　　数:0001—5000 册
定　　价:16.00 元

前　言

随着时代的发展，计算机的普及，线性代数这一数学分支显得越来越重要. 现在几乎所有大专院校的大多数专业都在开设线性代数课程. 如何教好、学好这门课程，关键是要有科学地阐述线性代数的基本内容、简明易懂的教材. 这就是本书的编写目的.

线性代数是研究线性空间和线性映射的理论，它的初等部分是研究线性方程组和矩阵. 本书精选了线性代数的内容，着重阐述其最基本的，应用广泛的那些内容；对于不那么基本，或者应用不那么广泛的内容则略为提及，不展开讲，或者不讲.

由于线性空间和线性映射比较抽象，因此本书先讲线性代数的初等部分：线性方程组和矩阵，以及具体的向量空间 K^n（数域 K 上 n 元有序数组形成的向量空间）和具体的欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$；然后再讲抽象的线性空间和线性映射，以及抽象的欧几里得空间和酉空间. 这样安排教学内容体系，既可以使读者能由浅入深，由具体到抽象地学好线性代数，又可以使课时较少的读者只要学习线性方程组和矩阵，以及具体的向量空间 K^n 和具体的欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 就能了解线性代数的基本面貌，掌握其最基本的内容.

学好线性代数的关键是理解和掌握它的基本理论，在理论的指导下，通过分析去做习题或解决实际问题. 如果没有理解基本理论，只是死记解题步骤，或者套题型做题，那么不仅容易忘记，连计算题也做不好，更不用说做证明题了. 那么如何让广大读者在不感到困难的情况下掌握线性代数的基本理论呢？作者积 20 多年在北京大学、中央电视大学等高校讲授高等代数和线性代数课的经验，从学生熟悉的例子引出概念，以线性代数研究对象的内在联系为主线，简明易懂、深入浅出地阐述基本理论，广大学生感到道理讲得清楚，线性代数不难学.

本书还有一个鲜明的特色是，在讲授知识的同时，培养学生具有数学的思维方式. 只有按照数学的思维方式去学习数学，才能学好数学.

而且学会数学的思维方式，有助于他们把今后肩负的工作做好，从而使学生终身受益. 什么是数学的思维方式？观察客观世界的现象，抓住其主要特征，抽象出概念或者建立模型；进行探索，通过直觉判断或者归纳推理、类比推理作出猜测；然后进行深入分析和逻辑推理，揭示事物的内在规律，从而使纷繁复杂的现象变得井然有序. 这就是数学的思维方式. 本书按照数学的思维方式编写每一节的内容，设立了“观察”、“抽象”、“探索”、“分析”、“论证”等小标题，使学生在学习线性代数知识的同时，受到数学思维方式的熏陶，日积月累地培养学生具有数学的思维方式，提高学生的素质.

学好线性代数必须做适量的、好的习题. 本书的每一节都配备了经过精心挑选的习题. 这些习题有助于学生加深理解和掌握线性代数的基本理论，有益于培养学生分析问题和解决问题的能力. 为了使学生能判断自己所做的习题是否做对了，本书书末附有习题答案与提示. 为了帮助学生掌握线性代数的基本理论和基本解题方法，提高解题能力；学会如何在理论的指导下分析问题和解决问题，学会用线性代数的知识去解决实际问题，我们还编写了《线性代数解题指南》一书，与本教材配套出版.

本书可作为综合大学、理工科大学、师范院校和其他大专院校以及自学考试的线性代数课程的教材. 如果周学时为 4，可讲授全书各章；如果周学时为 3，可讲授第一章至第六章；如果周学时为 2，可讲授第一章至第四章. 书中打“ * ”号的内容和习题不作为教学要求.

各章的参考教学时数为：第一章 5 学时，第二章 9 学时，第三章 12 学时，第四章 11 学时，第五章 7 学时，第六章 6 学时，第七章 6 学时，第八章 6 学时，第九章 6 学时.

作者感谢本书的责任编辑刘勇同志，他为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动.

作者热忱欢迎广大读者对本教材提出宝贵意见.

丘维声
于北京大学数学科学学院
2001 年 12 月

目　　录

第一章　线性方程组

思考

某食品厂收到了某种食品 2000 kg 的订单，要求这种食品含脂肪 5%，碳水化合物 12%，蛋白质 15%. 该厂准备用 5 种原料配制这种食品，其中每一种原料含脂肪、碳水化合物、蛋白质的百分比如下表所示（省写了“%”）.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
脂肪	8	6	3	2	4
碳水化合物	5	25	10	15	5
蛋白质	15	5	20	10	10

用上述 5 种原料能不能配制出 2000 kg 的这种食品？如果可以，那么有多少种配方？

分析

设所需要的原料 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 分别为（单位：kg）x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，则根据题意得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2000, \\ 8x_1+6x_2+3x_3+2x_4+4x_5=2000\times 5, \\ 5x_1+25x_2+10x_3+15x_4+5x_5=2000\times 12, \\ 15x_1+5x_2+20x_3+10x_4+10x_5=2000\times 15. \end{cases} \tag{1}$$

如果这个方程组有解，并且 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 取的值都是正数，那么用这 5 种原料可以配制出 2000 kg 的这种食品. 此时，方程组（1）的满足 $x_i>0\ (i=1,2,3,4,5)$ 的解的个数就是配方的个数.

抽象

上述方程组（1）的每个方程中，左端都是未知量 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的

一次齐次式，右端是常数，像这样的方程组称为**线性方程组**. 每个未知量前面的数称为**系数**，右端的项称为**常数项**.

日常生活或生产实际中经常需要求一些量，用未知数 $x_1, x_2, \cdots$ 表示这些量，根据问题的实际情况列出方程组，有许多是线性方程组. 数学的各个分支以及自然科学、工程技术中，有不少问题可以归结为线性方程组的问题. 因此我们抽象出线性方程组这一数学模型，深入地研究它.

含 n 个未知量的线性方程组称为 **n 元线性方程组**，它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{sn}$ 是系数，$b_1, b_2, \cdots, b_s$ 是常数项，常数项一般写在等号的右边. 方程的个数 s 与未知量的个数 n 可以相等，也可以 $s<n$ 或 $s>n$.

对于线性方程组(2)，如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代入后，每个方程都变成恒等式，那么称 n 元有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是线性方程组(2)的**一个解**. 方程组(2)的所有解组成的集合称为这个方程组的**解集**.

从上述配制食品的问题看出，需要研究线性方程组的下列几个问题：

1. 线性方程组是否一定有解？有解时，有多少个解？

2. 如何求线性方程组的解？

3. 线性方程组有解时，它的每一个解是否都符合实际问题的需要？（符合实际问题需要的解称为**可行解**.）

4. 线性方程组的解不止一个时，这些解之间有什么关系？

这一章和第二、三章都是围绕这些问题展开讨论.

§1 解线性方程组的算法

思考

例 1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=9, \\ -x_1-5x_2+4x_3=10, \\ 2x_1+7x_2+x_3=1. \end{cases} \tag{1}$$

分析

如果我们能设法消去未知量 x_1,x_2,剩下一个含 x_3 的一元一次方程,那么就能求出 x_3 的值.进而得到含 x_1,x_2 的方程组.类似地,可以求出 x_2,x_1 的值.所谓消去未知量 x_1,就是使 x_1 的系数变成 0.为了使线性方程组的求解方法能适用于未知量很多的方程组,用计算机编程序去计算,我们应当使解法有规律可循.今后我们用记号②+①·(−3) 表示把方程组的第 1 个方程的(−3)倍加到第 2 个方程上;用记号(②,④)表示把方程组的第 2、第 4 个方程互换位置;用记号③·$\frac{1}{3}$表示用$\frac{1}{3}$乘第③个方程.

示范

例 2 求线性方程组(1)的解.

解

$$\begin{array}{r} \\ ②+①\cdot(-3) \\ ③+①\cdot 1 \\ ④+①\cdot(-2) \end{array}\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2, \\ -5x_2-x_3=3, \\ -2x_2+5x_3=12, \\ x_2-x_3=-3. \end{cases}$$

$$(②,④)\quad\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2, \\ x_2-x_3=-3, \\ -2x_2+5x_3=12, \\ -5x_2-x_3=3. \end{cases}$$

$$
\begin{array}{l}
\\
\\
③+②\cdot 2\\
④+②\cdot 5
\end{array}
\begin{cases}
x_1+3x_2+\ \ x_3=2,\\
\qquad\ \ x_2-\ \ x_3=-3,\\
\qquad\qquad\quad 3x_3=6,\\
\qquad\quad\ -6x_3=-12.
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l}
\\
\\
\\
④+③\cdot 2
\end{array}
\begin{cases}
x_1+3x_2+\ \ x_3=2,\\
\qquad\ \ x_2-\ \ x_3=-3,\\
\qquad\qquad\quad 3x_3=6,\\
\qquad\qquad\qquad 0=0.
\end{cases}
\tag{2}
$$

$$
\begin{array}{l}
\\
\\
③\cdot\frac{1}{3}\\
\\
\end{array}
\begin{cases}
x_1+3x_2+x_3=2,\\
\qquad\ \ x_2-x_3=-3,\\
\qquad\qquad\ \ x_3=2,\\
\qquad\qquad\quad 0=0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l}
①+③\cdot(-1)\\
②+③\cdot 1\\
\\
\\
\end{array}
\begin{cases}
x_1+3x_2\qquad\ \ =0,\\
\qquad\ \ x_2\qquad\ \ =-1,\\
\qquad\qquad\ \ x_3=2,\\
\qquad\qquad\quad 0=0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l}
①+②\cdot(-3)\\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{cases}
x_1\qquad\qquad\ \ =3,\\
\qquad\ \ x_2\qquad\ \ =-1,\\
\qquad\qquad\ \ x_3=2,\\
\qquad\qquad\quad 0=0.
\end{cases}
\tag{3}
$$

因此,(3,−1,2)是线性方程组(1)的惟一的一个解.

评注

[1] 从例 2 的求解过程看出,我们对线性方程组作了三种变换:

Ⅰ. 把一个方程的倍数加到另一个方程上;

Ⅱ. 互换两个方程的位置;

Ⅲ. 用一个非零数乘某一个方程.

这三种变换称为**线性方程组的初等变换**.

[2] 在例 2 中,施行初等变换把线性方程组(1)先变成了方程组(2),像(2)这样的方程组称为**阶梯形方程组**. 对于阶梯形方程组(2)进

一步施行初等变换，变成了方程组(3). 像(3)这样的方程组称为**简化阶梯形方程组**，从它立即看出解是(3，−1，2).

[3] 不难看出，线性方程组经过初等变换 Ⅰ，得到的方程组的解集与原方程组的解集相等，此时称这两个方程组**同解**. 同样容易看出，初等变换 Ⅱ(或 Ⅲ)把线性方程组变成与它同解的方程组. 因此，**经过一系列初等变换变成的简化阶梯形方程组与原线性方程组同解**. 从而，例 1 中线性方程组(1)有惟一的一个解：(3，−1，2).

观察

例 2 的求解过程中，所有的计算都是对方程组的哪些对象做的？

分析

例 2 的求解过程中，只是对线性方程组的系数和常数项进行了运算. 因此，为了书写简便，对于一个线性方程组可以只写出它的系数和常数项，并且把它们按照原来的次序排成一张表，这张表称为线性方程组的**增广矩阵**. 而只列出系数的表称为方程组的**系数矩阵**. 例如，线性方程组(1)的增广矩阵和系数矩阵依次是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

抽象

线性方程组可以用由它的系数和常数项排成的一张表来表示. 本章开头讲的配制食品的例子，5 种原料所含的脂肪、碳水化合物、蛋白质的百分比也可以用一张表来直观清晰地显示. 许许多多的实际问题，各种各样的数学研究对象都常常可以用一张表来表示. 因此我们有必要建立一个数学模型来统一深入地研究这种表.

定义 1　由 $s \cdot m$ 个数排成 s 行、m 列的一张表称为一个 $s \times m$ **矩阵**，其中的每一个数称为这个矩阵的**一个元素**，第 i 行与第 j 列交叉位置的元素称为矩阵的(i,j)**元**.

例如,线性方程组(1)的增广矩阵的(2,4)元是 9,(4,2)元是 7.

矩阵通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$表示.一个 $s\times m$ 矩阵可以简单地记作 $A_{s\times m}$,它的(i,j)元记作 $A(i;j)$.如果矩阵 A 的(i,j)元是 a_{ij},那么可以记作 $A=(a_{ij})$.

元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**,简记作 0. s 行 m 列的零矩阵可以记成 $0_{s\times m}$.

如果一个矩阵 A 的行数与列数相等,则称它为**方阵**. m 行 m 列的方阵也称为 **m 级矩阵**.

本章和第二、三章只围绕线性方程组来研究矩阵,第四、五、六章再深入地研究矩阵的运算和其他性质.

利用线性方程组的增广矩阵,我们可以把例 2 中的求解过程按照下述格式来写.

示范

例 3 求线性方程组(1)的解.

解

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -1 & -5 & 4 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{4}+\textcircled{1}\cdot(-2)]{\substack{\textcircled{2}+\textcircled{1}\cdot(-3) \\ \textcircled{3}+\textcircled{1}\cdot 1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\textcircled{2},\textcircled{4})} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{3}+\textcircled{2}\cdot 2 \\ \textcircled{4}+\textcircled{2}\cdot 5}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{4}+\textcircled{3}\cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}\cdot\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\textcircled{2}+\textcircled{3}\cdot 1 \\ \textcircled{1}+\textcircled{3}\cdot(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}+\textcircled{2}\cdot(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

以最后一个矩阵为增广矩阵的方程组是

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 3, \\ \qquad x_2 \qquad = -1, \\ \qquad\qquad x_3 = 2, \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

因此,原线性方程组有惟一解:(3,-1,2).

评注

[1] 从上述求解过程看出,我们对线性方程组的增广矩阵施行了三种变换:

Ⅰ. 把一行的倍数加到另一行上;

Ⅱ. 互换两行的位置;

Ⅲ. 用一个非零数乘某一行.

这三种变换称为矩阵的**初等行变换**.

[2] 在例 3 的求解过程中,先把增广矩阵经过初等行变换化成了下述矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

像这种矩阵称为**阶梯形矩阵**. 它的特点是:

(1) 元素全为 0 的行(称为**零行**)在下方(如果有零行的话);

(2) 元素不全为 0 的行(称为**非零行**),从左边数起第一个不为 0 的元素(称为**主元**),它们的列指标随着行指标的递增而严格增大.

在例 3 的求解过程中,我们对阶梯形矩阵继续施行初等行变换,直至化成下述矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

像这种矩阵称为**简化行阶梯形矩阵**，它的特点是：

(1) 它是阶梯形矩阵；

(2) 每个非零行的主元都是 1；

(3) 每个主元所在的列的其余元素都是 0.

[3] 在解线性方程组时，把它的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵，写出相应的阶梯形方程组，进行求解；或者一直化成简化行阶梯形矩阵，写出它表示的简化阶梯形方程组，从而立即得出解.

[4] 可以证明：任何一个矩阵都能经过一系列初等行变换化成阶梯形矩阵，并且能进一步用初等行变换化成简化行阶梯形矩阵. 证明的思路从例 3 的增广矩阵化成简化行阶梯形矩阵的过程可以看出，然后用数学归纳法写出证明.

示范

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+②\cdot 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

写出最后这个阶梯形矩阵表示的线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_3 = -1, \\ 0 = -2. \end{cases}$$

x_1,x_2,x_3 无论取什么值都不能满足第 3 个方程：$0=-2$，因此，原线性方程组无解.

例 5 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{①}\cdot(-2)]{\text{②}+\text{①}\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{②}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{③}+\text{②}\cdot 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{①}+\text{②}\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

最后这个简化行阶梯形矩阵表示的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_3 = -1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

从第 1 个方程看出，对于 x_2 每取一个值 c_2，可以求得 $x_1=c_2+2$，从而得到原方程组的一个解：$(c_2+2,c_2,-1)$. 由于 c_2 可以取任意一个数，因此原方程组有无穷多个解. 我们可以用下述表达式来表示这无穷多个解：

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$