

线性系统

编译

天津大学出版社

0231
8078

0231
8078

0231
8078

线 性 系 统

余贻鑫 编译

天津大学出版社

ele
t
S
lis
Do
年
rac

线性系统

余贻鑫 编译

天津大学出版社出版

(天津大学内)

天津新华印刷一厂印制

新华书店天津发行所发行

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 13 1/4 字数: 330千字

1991年2月第一版 1991年2月第一次印刷

印数: 1—2200

ISBN 7-5618-0231-5

TP·30

定价: 3.10元

前 言

本书是一本研究生教材，也适合于大学高年级学生及工程技术人员使用，目的是对线性系统的基本理论和基本结构性质提供一个简练的介绍，为学习新近发表的与线性系统理论及其应用有关的大量文献提供一个坚实的理论基础。值得注意的是，我们主要在状态空间上研究问题，特别注意时域的行为。这是因为当考虑某类最优控制时，或当系统可能是非线性的时候，状态空间方法通常更方便。换句话说，我们所考虑的主要是有限维微（差）分方程所描述的系统。由于多变量（即多输入—多输出）系统的需要， s —域的方法再次引起人们的兴趣，分式形式的传递函数矩阵（又称矩阵分式描述）近十年有了很大发展，所以书中也加入了这一部分内容，并建立了状态变量法与传递函数法之间的联系。

在编写本书时，主要参考的是美国加利福尼亚大学（伯克利）电机与计算机科学系研究生院的线性系统理论课程（EECS 222 Lecture Notes, Fall 1981。它是该系研究生的一门主课）的有关材料。所用讲义是由著名教授Charles A. Desoer编写的。其中使用了代数理论的方法，例如使用了域和环，线性空间与线性变换，值域与零空间，不变子空间与子空间直和等概念。这使得本书比较精炼，比较广义。这些代数系统理论是E. R. Kalman在60年代末开始研究的，这些结果最近十年已被扩展到环上的线性系统。让学生掌握这方面的概念和方法会极大地有助于学生阅读新近发表的大量有关文献。事实上，不熟悉这些方法的人阅读现代电路与系统理论的文献是很困难的。正是基于这一原因，编者从1983年以来一直参照这套材料为天津大学电力及自动化系研究生讲授“线性系统”课。经过几年教学实践的检验，使我们更加觉得把它编译成书十分必要。在编写中做了一些新的尝试。如为了使它成为一本基本上自含的教材，适当地增加了一些预备知识、注记和附录，使得已学过大学线性代数的读者能够自学而没有太大困难，同时还保持着叙述严谨、篇幅紧凑的特点。又如把习题与正文的叙述完全割开，放于各章之末。为了弥补这样做所带来正文叙述中的空白，在正文中增加了适量的命题和例题。本书将某些结果称之为命题，只是因为这些结果不如定理（或引理）使用得经常。

本书虽然也涉及到Hilbert空间这样一些泛函分析的概念——这些概念被认为是建立关于分布参数系统、时变系统、多变量系统和离散时间系统统一理论的基础，但本书将不涉及分布参数系统。还应指出的是，本书不介绍最优控制，也不介绍随机系统，这些内容在研究生的其他课程中处理。

编者在伯克利加利福尼亚大学荣幸地听到了Charles A. Desoer教授的讲课，无论是在教学内容上还是在教学方法上都受益匪浅。Felix F. Wu教授对编者进修该课给予了热情的支持和鼓励。在此表示由衷的感谢。由于编者学识有限，书中错误在所难免，敬请读者指正。

编者 于天津大学

符号表

符 号	意 义
$\in$	$a \in A$ a 是集合 A 的元素; a 属于 A
$\subset$	$A \subset B$ 集合 A 含于集合 B ; A 是 B 的子集合
$\cup$	$A \cup B$ 集合 A 同集合 B 的并
$\cap$	$A \cap B$ 集合 A 同集合 B 的交
$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$ p 蕴涵 q ; “非 q ” 蕴涵 “非 p ”
$\Leftarrow$	$p \Leftarrow q$ q 蕴涵 p
$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$ 当且仅当 p 成立时, q 成立; p 等价 q ; p 蕴涵 q 和 q 蕴涵 p
$\{a, b, c\}$	由元素 a, b, c 构成的集合
ϕ	空集
M^c	集合 M 的补集
0	零元, 零矩阵, 零 (列或行) 向量
θ	零向量或零变换
Q	有理数域
R	实数域
C	复数域
N	非负整数集合, 即 $\{0, 1, 2, \dots\}$
N^+	正整数的集合, 即 $\{1, 2, \dots\}$
Z	整数环, 即 $\{\dots - 1, 0, 1, 2, \dots\}$
Z_2	模 2 运算的二元数域
R	非交换环
K	交换环
A^n	属于集合 A 的元素的 n 元组的集合 (例如 $R^n, R[s]^n, \dots$)
$A^{p \times q}$	属于集合 A 的元素的 $p \times q$ 阵列的集合
$(x_k)_{k \in K}$	元素族; $K :=$ 下标集合。该族是从 K 到 X 的映射
$(x_1, x_2, \dots, x_k)$	由 k 元组成的向量
$F[x], R[x]$	分别具有域 F (典型的是 R 或 C) 和环 R 中系数的单变量多项式环
$F(x)$	具有域 F 中系数的单变量有理函数域 (如 $R(s), C(s)$)
Sup	$Sup(f(t))$ 在间隔 $[0, \tau]$ 上, 对全部 $t \in [0, \tau]$, 函数 $f(t)$ 的上确界

$T,$	$T_r(A)$	矩阵 A 的迹
$\triangleq$		定义成
A^T		矩阵 A 的转置
A^*		矩阵 A 的共轭转置
$f: A \rightarrow B$		f 是把域 A 映射到域 B 的函数
$x \mapsto f(x)$		函数 f 将 x 映射成 $f(x)$
$f(A) \triangleq \{y \in B \mid y = f(x), \text{ 对于某个 } x \in A\}$		f 的值域或 f 的象
$C_+ \triangleq \{s \in C \mid R, s \geq 0\}$		
$\dot{C}_+ \triangleq \{s \in C \mid R, s > 0\}$		
$C_- \triangleq \{s \in C \mid R, s \leq 0\}$		
$\dot{C}_- \triangleq \{s \in C \mid R, s < 0\}$		
$C([t_0, t_1], R)$ 或 $C[t_0, t_1]$		映射 $[t_0, t_1] \rightarrow R$ 的连续函数线性空间
$C^k([t_0, t_1], R)$		有 k 阶连续导数的函数 $[t_0, t_1] \rightarrow R$ 的线性空间
$C([t_0, t_1], R^k)$		连续函数 $[t_0, t_1] \rightarrow R^k$ 的线性空间
$\mathcal{C} \quad \mathcal{C}[f] \in A \text{ 或 } \mathcal{C}[G] \in A$		f 或 G 的元素属于 A
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}[f]$	标量函数 f 的极点表
	$\mathcal{P}[G]$	矩阵函数 G 的极点表
$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}[f]$	标量函数 f 的零点表
	$\mathcal{Z}[G]$	矩阵函数 G 的零点表
$P[t_0, t_1]$		分段连续函数: $[t_0, t_1] \rightarrow R$ 的线性空间
$P([t_0, t_1], R)$		分段连续函数: $[t_0, t_1] \rightarrow R$ 的线性空间
N	$N(A)$	A 的零空间 (也称 " A 的核", 可用 $\ker(A)$ 表示)
R	$R(A)$	A 的值域 (也称 " A 的象", 可用 $\text{im}(A)$ 表示)
Dom	$\text{Dom}(A)$	A 的定义域
rk	$\text{rk}(A)$	矩阵 A 的秩
$\det$	$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
ρ	$\rho(A)$	$A \in C^{n \times n}$ 的谱半径 ($\rho(A) \triangleq \max \lambda_i(A) $)
σ	$\sigma(A)$	$A \in C^{n \times n}$ 的谱 $\sigma(A) \triangleq \{\lambda \mid \det(\lambda I - A) = 0\}$
	$V_1 \oplus V_2$	两个线性空间的直和
	$V_1 \perp V_2$	线性空间 V_1 对线性空间 V_2 正交
	$V_1 \oplus V_2$	线性空间 V_1 和 V_2 的直正交积
	$\tilde{f}, \hat{G}$	标量 (或向量) 函数 f 或矩阵函数 G 的拉氏变换 (也用 $\mathcal{L}[f]$ 或 $\mathcal{L}[G]$ 表示)
	$\tilde{f}, \tilde{G}$	标量 (或向量) 函数 f 或矩阵函数 G 的 z -变换

$f, \dot{G}$	标量(或向量)函数 f 或矩阵函数 G (例如 $G: R_+ \rightarrow R^{n \times n}$) 的时间导数
$\exists$	存在
$\ni$	使得
$\forall$	对于全部
■	证明完毕
l.s.	线性空间
l.s.s.	线性子空间
l.t.	线性变换
s.t.	这样的...以致使
a.a.	几乎所有的
b.i.b.o.	有界输入—有界输出
b.i.b.s.	有界输入—有界状态
SISO	单输入—单输出
MIMO	多输入—多输出
$\mathcal{R}$	线性动力学系统表达式
$\mathcal{D}$	动力学系统表达式

目 录

符号表	(1)
第一章 数学基础	(1)
1. 逻辑、集合、函数和Cartesian积	(1)
1.1 逻辑	(1)
1.2 集合	(1)
1.3 函数	(2)
1.4 Cartesian积	(3)
2. 环和域的概念	(4)
2.1 群的定义	(4)
2.2 环的定义	(4)
2.3 域的定义	(5)
2.4 几个重要命题	(7)
2.5 应用域的概念扩展已得定理使用的例子	(8)
3. 线性空间的概念	(8)
3.1 定义和举例	(8)
3.2 子空间的概念	(9)
3.3 积空间的概念	(10)
4. 线性相关、生成、基底和维数	(10)
5. 线性变换	(12)
6. 线性变换的矩阵表示	(14)
7. 矩阵表示和基底的改变	(16)
8. 值域和零空间	(18)
9. 零空间的基底	(20)
10. 值域的基底	(22)
11. 赋范的线性空间	(24)
12. 不变子空间、子空间的直和与正交子空间	(27)
12.1 不变子空间	(27)
12.2 子空间的直和	(28)
12.3 纯量积与正交子空间	(29)
13. 伴随	(30)
13.1 伴随的定义	(30)
13.2 伴随的性质	(30)

14. 收敛.....	(31)
15. Lipschitz条件.....	(32)
16. 微分方程.....	(33)
16.1 假设.....	(33)
16.2 基本定理.....	(33)
16.3 用迭代法构造微分方程的解.....	(34)
17. Bellman—Gronwall引理.....	(36)
18. 唯一性.....	(37)
习题.....	(37)

第二章 系统理论基础 (40)

1. 基本概念.....	(40)
1.1 物理系统、模型和系统表达式.....	(40)
1.2 例.....	(41)
1.3 动力学系统.....	(42)
2. 等值.....	(46)
2.1 等值状态.....	(46)
2.2 等值动力学系统表达式.....	(46)
3. 定常动力学系统.....	(47)
4. 线性动力学系统.....	(50)
4.1 定义.....	(50)
4.2 分解性质.....	(51)
4.3 零状态响应的线性性质.....	(51)
4.4 零输入响应的线性性质.....	(51)
习题.....	(51)

第三章 线性动力学系统表达式 (53)

1. 定义.....	(53)
2. 线性微分方程.....	(54)
2.1 线性齐次微分方程.....	(54)
2.2 状态转移矩阵.....	(55)
3. 状态转移矩阵的性质.....	(58)
4. 状态转移函数.....	(60)
4.1 启发式的推导.....	(60)
4.2 详细的叙述.....	(61)
5. 变分方程.....	(62)
6. 伴随方程.....	(63)
7. 伴随系统.....	(64)
8. 最优化的例子.....	(66)

9. 脉冲响应矩阵	(67)
习题	(69)
第四章 线性定常动力学系统表达式 (相异特征值的情况)	(71)
1. 状态转移函数	(71)
2. 用Laplace变换计算 e^{At}	(73)
3. 相异特征值 (代数观点)	(74)
4. 相异特征值 (几何观点)	(77)
4.1 特征向量基底	(77)
4.2 用基底表示矩阵 A 及其函数	(77)
4.3 e_i 的动力学解释	(78)
4.4 当 λ_i 是复数时的解释	(79)
4.5 变量的变换——解耦	(81)
4.6 框图解释	(81)
5. 纯量传递函数的零点	(82)
习题	(89)
第五章 线性定常动力学系统表达式 (重特征值的情况)	(90)
1. 基本知识	(90)
1.1 关于不变子空间和子空间直和的几个命题	(90)
1.2 表示定理	(91)
2. 最小多项式	(91)
2.1 定义	(91)
2.2 符号及它们的一些性质	(91)
3. 分解定理	(92)
4. Jordan型	(95)
4.1 Jordan型的示例	(97)
4.2 Jordan型的一般形式及其相应的基底	(97)
5. 框图表示	(100)
6. 矩阵多项式	(101)
6.1 矩阵多项式	(101)
6.2 矩阵函数	(102)
6.3 $f(A)$ 的计算	(103)
7. 周期性变系数微分方程	(106)
8. 线性映射的基本预备定理及其应用	(107)
8.1 基本预备定理	(107)
8.2 $\mathcal{A}x = b$ 解的存在性与唯一性	(108)
9. Hermitian矩阵	(109)
习题	(111)

第六章 离散时间系统	(113)
1. 差分方程	(113)
2. 离散时间系统表达式	(113)
2.1 定义	(113)
2.2 状态转移矩阵	(114)
2.3 完全响应	(114)
2.4 伴随方程	(115)
3. 由连续时间系统表达式向离散时间系统表达式的变换	(115)
第七章 稳定性	(118)
1. 有界函数	(118)
2. 用重叠积分描述系统的有界输入-有界输出的稳定性	(119)
3. $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ 的稳定性	(121)
3.1 Lyapunov 稳定性	(122)
3.2 渐近稳定	(124)
3.3 Lyapunov 函数	(125)
3.4 离散时间系统 $x_{k+1} = Ax_k$ 的稳定性	(126)
4. 有界输入-有界状态稳定性	(128)
5. 弱非线性系统	(129)
习题	(131)
第八章 实现	(132)
1. 等值	(132)
1.1 代数等值	(132)
1.2 代数等值的性质	(134)
1.3 实现	(134)
2. 基本预备定理	(135)
2.1 预备知识	(135)
2.2 基本预备定理	(135)
3. 可控性	(137)
3.1 定义和举例	(137)
3.2 特征描述	(139)
3.3 线性定常情况的特征描述	(140)
3.4 可控部分的离析	(141)
3.5 离散时间系统的可控性和可达性	(143)
4. 可观测性	(144)
4.1 定义	(144)
4.2 特征描述	(145)

4.3 对偶性	(145)
4.4 定常情况的特征描述	(146)
4.5 不可观部分的删除	(147)
4.6 离散时间系统的可观测性	(152)
5. 线性定常系统的最小实现	(153)
5.1 最小性	(153)
5.2 Kalman标准结构定理	(160)
习题	(163)
第九章 线性定常反馈系统	(165)
1. 指数稳定性	(165)
2. 单位反馈情况 (传递函数描述)	(168)
2.1 SISO的单位反馈系统	(168)
2.2 MIMO的单位反馈系统	(169)
2.3 MIMO的单位反馈系统 ($\hat{G}(s)$ 为严格常态的)	(170)
3. 动态反馈 (状态空间表达式)	(171)
4. 动态反馈 (传递函数描述)	(173)
4.1 基本关系	(173)
4.2 闭环系统的指数稳定性	(175)
4.3 关于SISO情况的注记	(176)
5. 集总系统的多变量Nyquist判据	(178)
习题	(183)
附录1 交换环 K 及其上元素构成的 $K^{n \times n}$ 的一些性质	(184)
附录2 多项式、多项式矩阵和常态有理矩阵的互质分式	(186)
1. 多项式互质	(186)
2. 非既约有理函数的约化	(187)
3. 多项式矩阵	(188)
4. 多项式矩阵的互质性	(188)
5. 常态有理矩阵的互质分式	(190)
附录3 极点和零点的概念	(190)
主要参考文献	(197)

第一章 数学基础

本章不仅定义了许多基本概念，而且还证明了后几章中将要用到的一些定理。本章的全部知识，并非从第二章开始就要用到。其中第6节至第10节，以及第12、13两节可以推迟到以后使用这些知识的时候再读。

1. 逻辑、集合、函数和Cartesian积

1.1 逻辑

本书采用通常的逻辑习惯用语，并且只考虑具有真值“真”或者“假”（但不能同时又真又假）的命题。假设 p 和 q 是两个命题。如果 p 和 q 均是真的，则命题“ p 并且 q ”是真的，否则它便是假的。如果 p 和 q 均是假的，则命题“ p 或者 q ”是假的，否则它便是真的。所谓蕴涵是形如“ p 推出 q ”或者“如果 p ，则 q ”这样的命题（表示成 $p \Rightarrow q$ ）。如果 p 真并且 q 假，则这个蕴涵是假的，否则它便是真的。所谓等价是形如“ p 推出 q 并且 q 推出 p ”的命题。通常将它简记为“ p 当且仅当 q ”（表示成 $p \Leftrightarrow q$ ）。如果 p 和 q 同时真或同时假，则等价“ $p \Leftrightarrow q$ ”是真的，否则它便是假的。命题 p 的否命题为“非 p ”。这个否命题真当且仅当命题 p 假。注意：“ $p \Rightarrow q$ ” $\Leftrightarrow$ “非 $q \Rightarrow$ 非 p ”。

1.2 集合

我们所采用的原始的（即无定义的）术语是类、成员和相等。直观上，可以把类考虑成是一些对象（元素）组成的集合体 A ，使得对于每个给定的对象 x ，均可以决定 x 是否为 A 的元素（即成员）。我们以 $x \in A$ 表示“ x 是 A 的元素”，而以 $x \notin A$ 表示“ x 不是 A 的元素”。所有的公理均用这些原始术语和一阶谓词演算来叙述（所谓一阶谓词演算是一种语言，它的句子是用连词并且、或者、不、蕴涵以及量词存在和所有构成的）。例如相等便有如下的性质：对于所有的类 A, B, C ： $A = A$ ； $A = B \Rightarrow B = A$ ； $A = B$ 并且 $B = C \Rightarrow A = C$ ； $A = B$ 并且 $x \in A \Rightarrow x \in B$ 。而外延性公理是说：具有相同的元素的两个类是相等的（形式上写成 $[x \in A \Leftrightarrow x \in B] \Rightarrow A = B$ ）。

类 A 叫作一个集合，当且仅当存在另一个类 B ，使得 $A \subset B$ 。因此集合是一种特殊的类。不是集合的类叫作本性类。集合与本性类的区别在直观上不是很清楚的。粗略地说，集合是一个“小”类，而本性类则异乎寻常地“大”。类形式公理是说，对于包含变量 x 的任意一个一阶谓词演算命题 $p(x)$ ，均存在一个类 A ，使 $x \in A \Leftrightarrow$ 命题 $p(x)$ 真。我们将这个类 A 表示成 $\{x | p(x)\}$ ，并且说成是“使 $p(x)$ 成立的全部 x 所组成的类”。有时也把一个类表示成其所有元素用括号括起来的形式，例如 $\{a, b, c\}$ 。

下面先复习一些大家所熟悉的内容（并，交，笛卡尔积，函数等等）。这里的表达方式不是很严格的，而且只叙述少量的公理，很多公理我们都略去不提。但是应当知道，存在着充分多的公理，以保证当这些运算在集合上进行时，其结果也是一个集合（例如集合的并是一个集合，集合的子类也是一个集合）。证明一个给定的类是集合，通常的办法是证明可以从

一些集合通过一系列这些允许的运算而得到。

类 A 叫作类 B 的**子类** (记为 $A \subset B$) , 指的是

$$\text{对所有 } x \in A, x \in A \Rightarrow x \in B \quad (1)$$

根据外延性公理和相等性质, 可知

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ 并且 } B \subset A$$

如果类 B 的子类 A 本身是一个集合, 我们也把 A 称做是 B 的**子集合**。有公理保证: 一个集合的子类必然是子集合。

没有元素的集合叫做**空集合**或者**零集合**, 表示成 ϕ (即对于任何 x 均有 $x \notin \phi$)。由于命题 “ $x \in \phi$ ” 永远假, 因此当 $A = \phi$ 时, 蕴涵式 (1) 永远真, 即对于每个类 B 均有 $\phi \subset B$ 。如果 $A \subset B$, $A \neq \phi$, 并且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的**真子类**。

幂公理是说: 对于每个集合 A , 由 A 的所有子集合所构成的类 $p(A)$ 本身也是集合。我们把 $p(A)$ 称做 A 的**幂集合**。

以 I (非空类) 作下标的**集族**是对每个 $i \in I$ 取一个集合 A_i 而构成的集合体。给了这样一个集族, 它的**并**和**交**分别定义为类

$$\bigcup_{i \in I} A_i \triangleq \{x | x \in A_i, \text{ 对于某个 } i \in I\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \triangleq \{x | x \in A_i, \text{ 对于所有 } i \in I\}$$

如果 I 是一个集合, 则有适当的公理保证 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 和 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 事实上均是集合。如果 $I = \{1, 2, \dots, n\}$, 人们常常将 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 记为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 类似地将 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 记为 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 。如果 $A \cap B = \phi$, 便称 A 和 B 是**非交的**。

如果 A 和 B 是类, A 在 B 中的**相对补**是 B 的如下子类:

$$B - A \triangleq \{x | x \in B \text{ 并且 } x \notin A\}$$

如果全部所讨论的类均是某个固定集合 U 的子集合 (称 U 为该讨论过程中的**万有集合**), 则将 $U - A$ 记为 A^c , 并且简称为 A 的**补**。读者能够验证下列一些命题:

$$A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \quad (2)$$

$$A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \quad (3)$$

$$(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad (4)$$

$$(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \quad (5)$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \quad (6)$$

1.3 函数

给了类 A 和 B , 从 A 到 B 的**函数** (或者叫做**映射**) f 是指对于每个 $a \in A$ 恰好安排一个元素 $b \in B$ (记为 $f: A \rightarrow B$)。 b 叫做此函数在 a 的**值**, 或者叫做 a 的**象**, 通常将它记为 $f(a)$ 。 A 是此函数的**定义域** (有时写作 $Dom f$), 而 B 叫做此函数的**值域**。有时为方便起见, 用 $a \mapsto f(a)$ 表达出函数 f 在 A 的元素上如何作用。两个函数叫做**相等的**, 是指它们有同样的定义域和值域, 并且它们对于公共定义域上的每个元素均有同样的值。

如果 $f: A \rightarrow B$ 是一个函数, 并且 $S \subset A$, 则由

$$a \mapsto f(a) \text{ (对于 } a \in S \text{)}$$

给出的从 S 到 B 的函数叫作 f 在 S 上的限制, 并且表示成 $f|_S: S \rightarrow B$ 。如果 A 是任一类, 则 A 上的恒等函数是指由 $a \mapsto a$ 所给出的函数 (表示成 $I_A: A \rightarrow A$)。如果 $S \subset A$, 则函数 $I_A|_S: S \rightarrow A$ 叫做是 S 到 A 的包含映射。

假设 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow C$ 均为函数, 则 f 和 g 的合成 (复合) 是指由下式给出的函数 $A \rightarrow C$:

$$a \mapsto g(f(a)), \quad a \in A$$

这个复合函数记为 $g \circ f$, 或者简记为 gf 。如果 $h: C \rightarrow D$ 是第三个函数, 易知 $h(gf) = (hg)f$ 。如果 $f: A \rightarrow B$, 则 $f \circ I_A = f = I_B \circ f: A \rightarrow B$ 。

函数图表 1.1 叫作交换的, 是指 $gf = h$ 。类似地, 图表 1.2 叫做交换的, 是指 $kh = gf$ 。

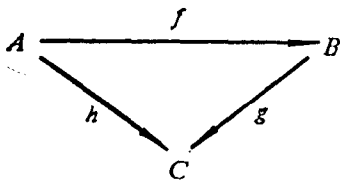


图 1.1 三角形函数图表

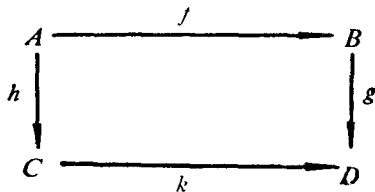


图 1.2 矩形函数图表

设 $f: A \rightarrow B$ 是一个函数, 如果 $S \subset A$, 则 S 在 f 之下的象 (表示成 $f(S)$) 是指类 $\{b \in B \mid b = f(a), \text{ 对某个 } a \in S\}$

类 $f(A)$ 叫做 f 的象, 有时将它表示成 $im f$ 。如果 $T \subset B$, 则 T 在 f 作用下的原象 (表示成 $f^{-1}(T)$) 是指类

$$\{a \in A \mid f(a) \in T\}$$

如果 T 只包含一个元素, $T = \{b\}$, 我们也用 $f^{-1}(b)$ 代替 $f^{-1}(T)$ 。容易证明:

对于 $S \subset A$, $f^{-1}(f(S)) \supset S$

对于 $T \subset B$, $f(f^{-1}(T)) \subset T$

函数 $f: A \rightarrow B$ 叫做单射 (或者叫作一对一的), 是指对于所有的 $a, a' \in A$, $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$ 。换句话说, f 是单射当且仅当对于所有的 $a, a' \in A$, $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ 。函数 f 叫做满射 (或者叫做映上), 是指 $f(A) = B$ 。换句话说, 即是指对于每个 $b \in B$, 均有 $a \in A$, 使得 $b = f(a)$ 。函数 f 叫做一一对应, 是指它同时是单射和满射。从这些定义立刻得知, 对于任意一个类 A , 恒等映射 $I_A: A \rightarrow A$ 是一一对应的。读者可以证明映射 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow C$ 有:

f 和 g 均为单射 $\Rightarrow gf$ 为单射

f 和 g 均为满射 $\Rightarrow gf$ 为满射

gf 为单射 $\Rightarrow f$ 为单射

gf 为满射 $\Rightarrow g$ 为满射

1.4 Cartesian 积

本书以后将只处理集合, 不涉及本性类。总是用 $\mathbf{R}$ 表示全部实数的集合, 用 $\mathbf{C}$ 表示全部复数的集合, 并且 $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R}; x \geq 0\}$ 。类似地, 将用 $\mathbf{Z}$ 表示全部整数的集合, 而 $\mathbf{Z}_+$ 表示全部非负的整数的集合。

给定两个集合 A 和 B , 用它们的 Cartesian 积表示所有的有序对 (a, b) 的集合, 其中 $a \in A$ 和 $b \in B$ 。或者更严密地说成: 集合 A 和 B 的 Cartesian 积是集合

$$A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

注意 $A \times \phi = \phi = \phi \times B$ 。我们分别把 a 和 b 称为有序对 (a, b) 的第一分量和第二分量。应该记住, $(a, b) = (a', b') \iff a = a'$ 并且 $b = b'$ 。进而一切有序的 n 维实数和复数分别用 R^n 和 C^n 表示。

2. 环和域的概念

我们所用的数的范围是逐渐扩大的, 其发展路线是:

自然数 $\rightarrow$ 整数 $\rightarrow$ 有理数 $\rightarrow$ 实数 $\rightarrow$ 复数 $\rightarrow$ 矩阵 (广义的数)

值得注意的是: (1) 不是对数永远可以进行加、减、乘、除四则运算的。例如对于矩阵 A 和 B , $AB = BA$ 不一定成立; (2) 矩阵 $A = [a_{ij}]$ 其元素不只限于实数与复数, 而可以更自由地考虑, 它可以由实数、复数按照四则运算得到。例如 a_{ij} 可以是

$$(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) / (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)$$

这样一个有理数。象这样可以把矩阵做更广泛的考虑。更进一步可以把数推广为属于某个集合的元, 把矩阵运算看成变换, 进行更高层次的概括和抽象, 从而使所得的研究结果可以获得更广泛的应用。为此本书使用代数学中群、环、域的概念。

2.1 群的定义

集合 G 满足下列公理时, 称 G 为群。

(1) 对于 G 中的任意两个元 α, β , 可以唯一地定义 $\alpha \circ \beta$, 且

$$\alpha \circ \beta \in G \quad (\text{自闭性, 唯一性})$$

(2) $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in G$ (结合律)

(3) G 中存在元 e , $e \circ \alpha = \alpha \circ e = \alpha$, $\forall \alpha \in G$ (单位元)

(4) 有满足 $\alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} = e$ 的元 $\alpha^{-1} \in G$ 存在, $\forall \alpha \in G$ (逆元)

注记 (1) 在群中如果进一步要求

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in G \quad (\text{交换律})$$

则称该群为可换群 (阿贝尔群)。

(2) 符号 $\circ$ 是加法时的可换群被称为加法群。此时, e 写成 0 , 叫做零元; α^{-1} 写成 $-\alpha$ 。

(3) 符号 $\circ$ 是乘法时的可换群被称为乘法可换群。此时, e 写成 1 。

例如, 实数的集合 R 是加法群。 R 中除掉 0 后的集合, 为乘法的可换群。

2.2 环的定义

当集合 R 满足下列公理时, 称 R 为环。

(1) 对于 R 的任意两个元 α, β , 可以定义加法 $+$ 和乘法 $\cdot$, 而且 $\alpha + \beta$ 和 $\alpha \cdot \beta$ 皆唯一确定 (乘法的 $\cdot$ 也可以略去)

$$\alpha + \beta \in R, \alpha \beta \in R, \quad \forall \alpha, \beta \in R$$

(2) R 是加法群。

(3) 对于乘法, 结合律成立

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$$

(4) 对于加法和乘法都满足分配律

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$$

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$$

注记 (1) 在上述环的公理中, 根据第(2)条, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, 但不要求关于乘法的交换律。作为附加条件, 满足乘法交换律的环叫做交换环。

(2) 环 R 中任意不为零的元 α , 不一定存在乘法的逆元 $\alpha^{-1} \in R$, 满足 $\alpha\alpha^{-1} = 1$ 。

(3) 环 R 中存在乘法单位元 1 , 使得对环中任意元 α , 式 $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ 成立。

2.3 域的定义

当集合 F 满足下列公理时, 称 F 为域。

(1) F 是可换环;

(2) F 中除 0 以外的元, 对乘法构成可换群。

虽然域和环、群有关, 可以如上定义, 但因域是今后经常用到的重要概念, 所以现再将其条件重复列举如下。

定义: 以 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 为元的集合 F , 当满足下列公理时, 称 F 为域。

(A) 对于 F 的任意两个元 α 和 β , α 和 β 的和可以唯一定义, $\alpha + \beta \in F$ 。(自闭性, 唯一性)

并且

(A1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \forall \alpha, \beta \in F$ (加法的交换律)

(A2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma \in F$ (加法的结合律)

(A3) F 中存在零元 0 , 使 $\alpha + 0 = \alpha, \forall \alpha \in F$ 成立 (加法不变性)

(A4) 对于任意的 $\alpha \in F$, 在 F 中存在 $-\alpha$ 元, 使 $\alpha + (-\alpha) = 0$ 成立。

(M) 对于 F 中的任意两个元 α 和 β , α 和 β 的积 $\alpha\beta$ 可唯一定义, $\alpha\beta \in F$ (自封性, 唯一性)

并且

(M1) $\alpha\beta = \beta\alpha, \forall \alpha, \beta \in F$ (乘法的交换律)

(M2) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma \in F$ (乘法的结合律)

(M3) F 中存在单位元 1 , 使 $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha, \forall \alpha \in F$ 成立 (乘法不变性)

(M4) 对于 F 中的任意 $\alpha \neq 0$ 的元, 在 F 中有用 α^{-1} 表示的逆元存在,

使得 $\alpha \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \alpha = 1$ 成立。(乘法的逆)

(D) 对于加法和乘法还满足下列分配律

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in F$$

例1 全体整数的集合 $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 偶数的集合 $Z_e = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ 是可换环。

例2 设 R 为任意环, 将 R 中的元排列成 n 行 n 列方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$