线性系统

编译

天津大学出版社

线 性 系 统

余贻鑫　编译

天 津 大 学 出 版 社

线 性 系 统

余贻鑫　编译

天津大学出版社出版
(天津大学内)
天津新华印刷一厂印制
新华书店天津发行所发行

开本：787×1092毫米 1/16 印张：13 1/4 字数：330千字
1991年2月第一版　1991年2月第一次印刷
印数：1—2200
ISBN 7-5618-0231-5

TP·30
定价：3.10元

前　　言

本书是一本研究生教材，也适合于大学高年级学生及工程技术人员使用，目的是对线性系统的基本理论和基本结构性质提供一个简练的介绍，为学习新近发表的与线性系统理论及其应用有关的大量文献提供一个坚实的理论基础。值得注意的是，我们主要在状态空间上研究问题，特别注意时域的行为。这是因为当考虑某类最优控制时，或当系统可能是非线性的时候，状态空间方法通常更方便。换句话说，我们所考虑的主要是有限维微（差）分方程所描述的系统。由于多变量（即多输入—多输出）系统的需要，s一域的方法再次引起人们的兴趣，分式形式的传递函数矩阵（又称矩阵分式描述）近十年有了很大发展，所以书中也加入了这一部分内容，并建立了状态变量法与传递函数法之间的联系。

在编写本书时，主要参考的是美国加里福尼亚大学（伯克利）电机与计算机科学系研究生院的线性系统理论课程（EECS 222 Lecture Notes. Fall 1981。它是该系研究生的一门主课）的有关材料。所用讲义是由著名教授Charles A.Desoer编写的。其中使用了代数理论的方法，例如使用了域和环，线性空间与线性变换，值域与零空间，不变子空间与子空间直和等概念。这使得本书比较精炼，比较广义。这些代数系统理论是E.R.Kalman在60年代末开始研究的，这些结果最近十年已被扩展到环上的线性系统。让学生掌握这方面的概念和方法会极大地有助于学生阅读新近发表的大量有关文献。事实上，不熟悉这些方法的人阅读现代电路与系统理论的文献是很困难的。正是基于这一原因，编者从1983年以来一直参照这套材料为天津大学电力及自动化系研究生讲授“线性系统”课。经过几年教学实践的检验，使我们更加觉得把它编译成书十分必要。在编写中做了一些新的尝试。如为了使它成为一本基本上自含的教材，适当地增加了一些预备知识、注记和附录，使得已学过大学线性代数的读者能够自学而没有太大困难，同时还保持着叙述严谨、篇幅紧凑的特点。又如把习题与正文的叙述完全割开，放于各章之末。为了弥补这样做所带来正文叙述中的空白，在正文中增加了适量的命题和例题。本书将某些结果称之为命题，只是因为这些结果不如定理（或引理）使用得经常。

本书虽然也涉及到Hilbert空间这样一些泛函分析的概念——这些概念被认为是建立关于分布参数系统、时变系统、多变量系统和离散时间系统统一理论的基础，但本书将不涉及分布参数系统。还应指出的是，本书不介绍最优控制，也不介绍随机系统，这些内容在研究生的其他课程中处理。

编者在伯克利加里福尼亚大学荣幸地听到了Charles A.Desoer教授的讲课，无论是在教学内容上还是在教学方法上都受益匪浅。Felix F.Wu教授对编者进修该课给予了热情的支持和鼓励。在此表示由衷的感谢。由于编者学识有限，书中错误在所难免，敬请读者指正。

编者　　于天津大学

符　号　表

符号		意义
$\in$	$a\in A$	a是集合A的元素；a属于A
$\subset$	$A\subset B$	集合A含于集合B；A是B的子集合
$\cup$	$A\cup B$	集合A同集合B的并
$\cap$	$A\cap B$	集合A同集合B的交
$\Rightarrow$	$p\Rightarrow q$	p蕴涵q；“非q”蕴涵“非p”
$\Leftarrow$	$p\Leftarrow q$	q蕴涵p
$\Leftrightarrow$	$p\Leftrightarrow q$	当且仅当p成立时，q成立；p等价q；p蕴涵q和q蕴涵p
$\{a, b, c\}$		由元素a、b、c构成的集合
ϕ		空集
M^c		集合M的补集
0		零元，零矩阵，零（列或行）向量
θ		零向量或零变换
$\boldsymbol{Q}$		有理数域
$\boldsymbol{R}$		实数域
$\boldsymbol{C}$		复数域
$\boldsymbol{N}$		非负整数集合，即$\{0, 1, 2, \cdots\}$
$\boldsymbol{N}^*$		正整数的集合，即$\{1, 2, \cdots\}$
$\boldsymbol{Z}$		整数环，即$\{\cdots -1, 0, 1, 2, \cdots\}$
$\boldsymbol{Z}_2$		模2运算的二元数域
R		非交换环
K		交换环
A^n		属于集合A的元素的n元组的集合（例如$\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{R}[s]^n$，…）
$A^{p\times q}$		属于集合A的元素的$p\times q$阵列的集合
$(x_k)_{k\in K}$		元素族；$K:=$下标集合。该族是从K到X的映射
$(x_1\ x_2\cdots x_k)$		由k元组成的向量
$\boldsymbol{F}[x]$，$\boldsymbol{R}[x]$		分别具有域$\boldsymbol{F}$（典型的是$\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{C}$）和环R中系数的单变量多项式环
$\boldsymbol{F}(x)$		具有域$\boldsymbol{F}$中系数的单变量有理函数域（如$\boldsymbol{R}(s)$，$\boldsymbol{C}(s)$）
Sup	$\underset{t\in[0,\tau]}{Sup}(f(t))$	在间隔$[0,\tau]$上，对全部$t\in[0,\tau]$，函数$f(t)$的上确界

T_r	$T_r(A)$	矩阵A的迹
$\triangleq$		定义成
A^T		矩阵A的转置
A^*		矩阵A的共轭转置
$f: A\to B$		f是把域A映射到域B的函数
$x\mapsto f(x)$		函数f将x映射成$f(x)$

$f(A)\triangleq\{y\in B\mid y=f(x)$，对于某个$x\in A\}\triangleq f$的值域或$f$的象

$\boldsymbol{C}_+\triangleq\{s\in\boldsymbol{C}\mid R_e s\geqslant 0\}$

$\mathring{\boldsymbol{C}}_+\triangleq\{s\in\boldsymbol{C}\mid R_e s>0\}$

$\boldsymbol{C}_-\triangleq\{s\in\boldsymbol{C}\mid R_e s\leqslant 0\}$

$\mathring{\boldsymbol{C}}_-\triangleq\{s\in\boldsymbol{C}\mid R_e s<0\}$

$C([t_0, t_1], \boldsymbol{R})$ 或$C[t_0, t_1]$		映射$[t_0, t_1]\to\boldsymbol{R}$的连续函数线性空间
$C^k([t_0, t_1], \boldsymbol{R})$		有k阶连续导数的函数$[t_0, t_1]\to\boldsymbol{R}$的线性空间
$C([t_0, t_1], \boldsymbol{R}^k)$		连续函数$[t_0, t_1]\to R^k$的线性空间
$\mathscr{E}$	$\mathscr{E}[f]\in A$或$\mathscr{E}[G]\in A$	f或G的元素属于A
$\mathscr{P}$	$\mathscr{P}[f]$	标量函数f的极点表
	$\mathscr{P}[G]$	矩阵函数G的极点表
$\mathscr{Z}$	$\mathscr{Z}[f]$	标量函数f的零点表
	$\mathscr{Z}[G]$	矩阵函数G的零点表
$P[t_0, t_1]$		分段连续函数：$[t_0, t_1]\to\boldsymbol{R}$的线性空间
$P([t_0, t_1], \boldsymbol{R})$		分段连续函数：$[t_0, t_1]\to\boldsymbol{R}$的线性空间
N	$N(A)$	A的零空间（也称“A的核”，可用$\ker(A)$表示）
R	$R(A)$	A的值域（也称“A的象”，可用$\mathrm{im}(A)$表示）
Dom	$\mathrm{Dom}(A)$	A的定义域
rk	$\mathrm{rk}(A)$	矩阵A的秩
det	$\det(A)$	矩阵A的行列式
ρ	$\rho(A)$	$A\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$的谱半径（$\rho(A)\triangleq\max\limits_i\lvert\lambda_i(A)\rvert$）
σ	$\sigma(A)$	$A\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$的谱$\sigma(A)\triangleq\{\lambda\mid\det(\lambda\boldsymbol{I}-A)=0\}$
	$V_1\oplus V_2$	两个线性空间的直和
	$V_1\perp V_2$	线性空间V_1对线性空间V_2正交
	$V_1\oplus\!\!\!\!\perp V_2$	线性空间V_1和V_2的直正交积
	$\hat{f}$，$\hat{G}$	标量（或向量）函数f或矩阵函数G的拉氏变换（也用$\mathscr{L}[f]$或$\mathscr{L}[G]$表示）
	$\tilde{f}$，$\tilde{G}$	标量（或向量）函数f或矩阵函数G的z—变换

$\dot{f}$, $\dot{G}$	标量（或向量）函数f或矩阵函数G（例如G：$R_+\to R^{n\times n}$）的时间导数
$\exists$	存在
$\ni$	使得
$\forall$	对于全部
▮	证明完毕
l.s.	线性空间
l.s.s.	线性子空间
l.t.	线性变换
s.t.	这样的…以致使
a.a.	几乎所有的
b.i.b.o.	有界输入—有界输出
b.i.b.s.	有界输入—有界状态
SISO	单输入—单输出
MIMO	多输入—多输出
$\mathscr{R}$	线性动力学系统表达式
$\mathscr{D}$	动力学系统表达式

目　　录

第一章　数学基础

本章不仅定义了许多基本概念，而且还证明了后几章中将要用到的一些定理。本章的全部知识，并非从第二章开始就要用到。其中第6节至第10节，以及第12、13两节可以推迟到以后使用这些知识的时候再读。

1.　逻辑、集合、函数和Cartesian积

1.1　逻辑

本书采用通常的逻辑习惯用语，并且只考虑具有真值“真”或者“假”（但不能同时又真又假）的命题。假设p和q是两个命题。如果p和q均是真的，则命题“p并且q”是真的，否则它便是假的。如果p和q均是假的，则命题“p或者q”是假的，否则它便是真的。所谓**蕴涵**是形如“p推出q”或者“如果p，则q”这样的命题（表示成$p\Rightarrow q$）。如果p真并且q假，则这个蕴涵是假的，否则它便是真的。所谓**等价**是形如“p推出q并且q推出p”的命题。通常将它简记为“p当且仅当q”（表示成$p\Longleftrightarrow q$）。如果p和q同时真或同时假，则等价“$p\Longleftrightarrow q$”是真的，否则它便是假的。命题p的否命题为“非p”。这个否命题真当且仅当命题p假。注意：“$p\Rightarrow q$”$\Longleftrightarrow$“非$q\Rightarrow$非p”。

1.2　集合

我们所采用的原始的（即无定义的）术语是**类**、**成员**和**相等**。直观上，可以把类考虑成是一些对象（元素）组成的集合体A，使得对于每个给定的对象x，均可以决定x是否为A的元素（即成员）。我们以$x\in A$表示“x是A的元素”，而以$x\notin A$表示“x不是A的元素”。所有的公理均用这些原始术语和一阶谓词演算来叙述（所谓一阶谓词演算是一种语言，它的句子是用连词**并且**、**或者**、**不**、**蕴涵**以及量词**存在**和**所有**构成的）。例如相等便有如下的性质：对于所有的类A，B，C：$A=A$；$A=B\Rightarrow B=A$；$A=B$并且$B=C\Rightarrow A=C$；$A=B$并且$x\in A\Rightarrow x\in B$。而**外延性**公理是说：具有相同的元素的两个类是相等的（形式上写成$[x\in A\Longleftrightarrow x\in B]\Rightarrow A=B$）。

类A叫作一个集合，当且仅当存在另一个类B，使得$A\subset B$。因此集合是一种特殊的类。不是集合的类叫作**本性类**。集合与本性类的区别在直观上不是很清楚的。粗略地说，集合是一个“小”类，而本性类则异乎寻常地“大”。类形式公理是说，对于包含变量x的任意一个一阶谓词演算命题$p(x)$，均存在一个类A，使$x\in A\Longleftrightarrow$命题$p(x)$真。我们将这个类$A$表示成$\{x|p(x)\}$，并且说成是“使$p(x)$成立的全部$x$所组成的类”。有时也把一个类表示成其所有元素用括号括起来的形式，例如$\{a,b,c\}$。

下面先复习一些大家所熟悉的内容（并，交，笛卡尔积，函数等等）。这里的表达方式不是很严格的，而且只叙述少量的公理，很多公理我们都略去不提。但是应当知道，存在着充分多的公理，以保证当这些运算在集合上进行时，其结果也是一个集合（例如集合的并是一个集合，集合的子类也是一个集合）。证明一个给定的类是集合，通常的办法是证明可以从

一些集合通过一系列这些允许的运算而得到。

类A叫作类B的**子类**（记为$A \subset B$），指的是

$$\text{对所有} x \in A, \quad x \in A \Rightarrow x \in B \tag{1}$$

根据外延性公理和相等性质，可知

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \text{并且} B \subset A$$

如果类B的子类A本身是一个集合，我们也把A称做是B的**子集合**。有公理保证：一个集合的子类必然是子集合。

没有元素的集合叫做**空集合**或者**零集合**，表示成ϕ（即对于任何x均有$x \notin \phi$）。由于命题“$x \in \phi$”永远假，因此当$A = \phi$时，蕴涵式（1）永远真，即对于每个类B均有$\phi \subset B$。如果$A \subset B$，$A \neq \phi$，并且$A \neq B$，则称A是B的**真子类**。

幂公理是说：对于每个集合A，由A的所有子集合所构成的类$p(A)$本身也是集合。我们把$p(A)$称做A的**幂集合**。

以I（非空类）作下标的**集族**是对每个$i \in I$取一个集合A_i而构成的集合体。给了这样一个集族，它的**并**和**交**分别定义为类

$$\bigcup_{i \in I} A_i \triangleq \{x \mid x \in A_i, \text{对于某个} i \in I\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \triangleq \{x \mid x \in A_i, \text{对于所有} i \in I\}$$

如果I是一个集合，则有适当的公理保证$\bigcup_{i \in I} A_i$和$\bigcap_{i \in I} A_i$事实上均是集合。如果$I = \{1, 2, \cdots, n\}$，人们常常将$\bigcup_{i \in I} A_i$记为$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，类似地将$\bigcap_{i \in I} A_i$记为$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$。如果$A \cap B = \phi$，便称$A$和$B$是**非交的**。

如果A和B是类，A在B中的**相对补**是B的如下子类：

$$B - A \triangleq \{x \mid x \in B \text{并且} x \notin A\}$$

如果全部所讨论的类均是某个固定集合U的子集合（称U为该讨论过程中的万有集合），则将$U - A$记为A^c，并且简称为A的补。读者能够验证下列一些命题：

$$A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \tag{2}$$

$$A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \tag{3}$$

$$(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \tag{4}$$

$$(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \tag{5}$$

$$A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A \tag{6}$$

1.3 函数

给了类A和B，从A到B的函数（或者叫做**映射**）f是指对于每个$a \in A$恰好安排一个元素$b \in B$（记为$f: A \rightarrow B$）。b叫做此函数在a的值，或者叫做a的**象**，通常将它记为$f(a)$。A是此函数的**定义域**（有时写作$Dom\ f$），而B叫做此函数的**值域**。有时为方便起见，用$a \mapsto f(a)$表达出函数f在A的元素上如何作用。两个函数叫做**相等**的，是指它们有同样的定义域和值域，并且它们对于公共定义域上的每个元素均有同样的值。

如果$f: A \rightarrow B$是一个函数，并且$S \subset A$，则由

$$a \mapsto f(a) \quad (\text{对于 } a \in S)$$

给出的从S到B的函数叫作f在S上的**限制**，并且表示成$f \mid S: S \to B$。如果A是任一类，则A上的**恒等函数**是指由$a \mapsto a$所给出的函数（表示成$\boldsymbol{I}_A: A \to A$）。如果$S \subset A$，则函数$\boldsymbol{I}_A|_S: S \to A$叫做是$S$到$A$的**包含映射**。

假设$f: A \to B$和$g: B \to C$均为函数，则f和g的**合成**（复合）是指由下式给出的函数$A \to C$：

$$a \mapsto g(f(a)), \quad a \in A$$

这个复合函数记为$g \circ f$，或者简记为gf。如果$h: C \to D$是第三个函数，易知$h(gf) = (hg)f$。如果$f: A \to B$，则$f \circ \boldsymbol{I}_A = f = \boldsymbol{I}_B \circ f: A \to B$。

函数**图表**1.1叫作**交换的**，是指$gf = h$。类似地，图表1.2叫做**交换的**，是指$kh = gf$。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

图 1.1 三角形函数图表

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

图 1.2 矩形函数图表

设$f: A \to B$是一个函数，如果$S \subset A$，则S在f之下的**象**（表示成$f(s)$）是指类

$$\{b \in B \mid b = f(a), \text{对某个 } a \in S\}$$

类$f(A)$叫做f的**象**，有时将它表示成imf。如果$T \subset B$，则T在f作用下的**原象**（表示成$f^{-1}(T)$）是指类

$$\{a \in A \mid f(a) \in T\}$$

如果T只包含一个元素，$T = \{b\}$，我们也用$f^{-1}(b)$代替$f^{-1}(T)$。容易证明：

对于$S \subset A$，$f^{-1}(f(S)) \supset S$

对于$T \subset B$，$f(f^{-1}(T)) \subset T$

函数$f: A \to B$叫做**单射**（或者叫作**一对一**的），是指对于所有的$a, a' \in A$，$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$。换句话说，$f$是单射当且仅当对于所有的$a, a' \in A$，$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$。函数$f$叫做**满射**（或者叫做**映上**），是指$f(A) = B$。换句话说，即是指对于每个$b \in B$，均有$a \in A$，使得$b = f(a)$。函数$f$叫做**一一对应**，是指它同时是单射和满射。从这些定义立刻得知，对于任意一个类A，恒等映射$\boldsymbol{I}_A: A \to A$是一一对应的。读者可以证明映射$f: A \to B$和$g: B \to C$有：

f和g均为单射$\Rightarrow gf$为单射

f和g均为满射$\Rightarrow gf$为满射

gf为单射$\Rightarrow f$为单射

gf为满射$\Rightarrow g$为满射

1.4 Cartesian积

本书以后将只处理集合，不涉及本性类。总是用$\boldsymbol{R}$表示全部实数的集合，用$\boldsymbol{C}$表示全部复数的集合，并且$\boldsymbol{R}_+ = \{x \in \boldsymbol{R};\ x \geqslant 0\}$。类似地，将用$\boldsymbol{Z}$表示全部整数的集合，而$\boldsymbol{Z}_+$表示全部非负的整数的集合。

给定两个集合A和B，用它们的Cartesian积表示所有的**有序对**（a，b）的集合，其中$a\in A$和$b\in B$。或者更严密地说成：集合A和B的Cartesian积是集合

$$A\times B:=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

注意$A\times\phi=\phi=\phi\times B$。我们分别把$a$和$b$称为有序对（$a$，$b$）的第一分量和第二分量。应该记住，$(a,b)=(a',b')\Longleftrightarrow a=a'$并且$b=b'$。进而一切有序的$n$维实数和复数分别用$\boldsymbol{R}^n$和$\boldsymbol{C}^n$表示。

2. 环和域的概念

我们所用的数的范围是逐渐扩大的，其发展路线是：

自然数→整数→有理数→实数→复数→矩阵（广义的数）

值得注意的是：（1）不是对数永远可以进行加、减、乘、除四则运算的。例如对于矩阵A和B，$AB=BA$不一定成立；（2）矩阵$A=[a_{ij}]$其元素不只限于实数与复数，而可以更自由地考虑，它可以由实数、复数按照四则运算得到。例如a_{ij}可以是

$$(b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0)\ /(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)$$

这样一个有理数。象这样可以把矩阵做更广泛的考虑。更进一步可以把数推广为属于某个集合的元，把矩阵运算看成变换，进行更高层次的概括和抽象，从而使所得的研究结果可以获得更广泛的应用。为此本书使用代数学中群、环、域的概念。

2.1 群的定义

集合G满足下列公理时，称G为**群**。

（1）对于G中的任意两个元α,β，可以唯一地定义$\alpha\circ\beta$，且

$\alpha\circ\beta\in G$　（自闭性，唯一性）

（2）$(\alpha\circ\beta)\circ\gamma=\alpha\circ(\beta\circ\gamma)$，$\forall\alpha,\beta,\gamma\in G$　（结合律）

（3）G中存在元e，$e\circ\alpha=\alpha\circ e=\alpha$，$\forall\alpha\in G$　（单位元）

（4）有满足$\alpha^{-1}\circ\alpha=\alpha\circ\alpha^{-1}=e$的元$\alpha^{-1}\in G$存在，$\forall\alpha\in G$（逆元）

注记　（1）在群中如果进一步要求

$\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$，$\forall\alpha,\beta\in G$　（交换律）

则称该群为**可换群（阿贝尔群）**。

（2）符号$\circ$是加法时的可换群被称为**加法群**。此时，e写成0，叫做零元；α^{-1}写成$-\alpha$。

（3）符号$\circ$是乘法时的可换群被称为**乘法可换群**。此时，e写成1。

例如，实数的集合$\boldsymbol{R}$是加法群。$\boldsymbol{R}$中除掉0后的集合，为乘法的可换群。

2.2 环的定义

当集合R满足下列公理时，称R为**环**.

（1）对于R的任意两个元α、β，可以定义加法＋和乘法·，而且$\alpha+\beta$和$\alpha\cdot\beta$皆唯一确定（乘法的·也可以略去）

$\alpha+\beta\in R$，$\alpha\beta\in R$，$\forall\alpha,\beta\in R$

（2）R是加法群。

（3）对于乘法，结合律成立

$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$，$\forall\alpha,\beta,\gamma\in R$

（4）对于加法和乘法都满足分配律

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$，　　$\forall\alpha,\beta,\gamma\in R$

$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$　　$\forall\alpha,\beta,\gamma\in R$

注记　（1）在上述环的公理中，根据第（2）条，$\alpha+\beta=\beta+\alpha$，但不要求关于乘法的交换律。作为附加条件，满足乘法交换律的环叫做**交换环**。

（2）环R中任意不为零的元α，不一定存在乘法的逆元$\alpha^{-1}\in R$，满足$\alpha\alpha^{-1}=1$。

（3）环R中存在乘法单位元1，使得对环中任意元α，式$\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$成立。

2.3　域的定义

当集合F满足下列公理时，称F为域。

（1）F是可换环；

（2）F中除0以外的元，对乘法构成可换群。

虽然域和环、群有关，可以如上定义，但因域是今后经常用到的重要概念，所以现再将其条件重复列举如下。

定义：以α，β，γ，…为元的集合$\boldsymbol{F}$，当满足下列公理时，称$\boldsymbol{F}$为域。

（A）对于$\boldsymbol{F}$的任意两个元α和β，α和β的和可以唯一定义，$\alpha+\beta\in\boldsymbol{F}$。（自闭性，唯一性）

并且

（$A1$）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$，$\forall\alpha$，$\beta\in\boldsymbol{F}$　　（加法的交换律）

（$A2$）$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$，$\forall\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{F}$　　（加法的结合律）

（$A3$）$\boldsymbol{F}$中存在零元0，使$\alpha+0=\alpha$，$\forall\alpha\in\boldsymbol{F}$成立　（加法不变性）

（$A4$）对于任意的$\alpha\in\boldsymbol{F}$，在$\boldsymbol{F}$中存在$-\alpha$元，使$\alpha+(-\alpha)=0$成立.

（M）对于$\boldsymbol{F}$中的任意两个元α和β，α和β的积$\alpha\beta$可唯一定义，$\alpha\beta\in\boldsymbol{F}$　（自封性，唯一性）

并且

（$M1$）$\alpha\beta=\beta\alpha$，$\forall\ \alpha,\beta\in\boldsymbol{F}$　　（乘法的交换律）

（$M2$）$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$，$\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{F}$　　（乘法的结合律）

（$M3$）$\boldsymbol{F}$中存在单位元1，使$\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$，$\forall\ \alpha\in\boldsymbol{F}$成立　　（乘法不变性）

（$M4$）对于$\boldsymbol{F}$中的任意$\alpha\neq 0$的元，在$\boldsymbol{F}$中有用α^{-1}表示的逆元存在，

使得$\alpha\ \alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=1$成立。（乘法的逆）

（D）对于加法和乘法还满足下列分配律

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$，　$\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{F}$

例1　全体整数的集合$\boldsymbol{Z}=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}$，偶数的集合$Z_e=\{0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \cdots\}$是可换环。

例2　设R为任意环，将R中的元排列成n行n列方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$