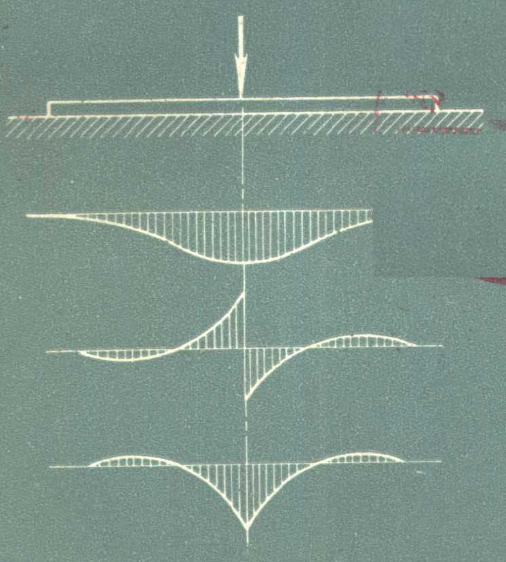
结构力学教学参考丛书

弹性地基梁的计算

龙驭球 编



人民教育出版社

结构力学教学参考丛书

弹性地基梁的计算

龙驭球 编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书讨论结构力学的一个专题——弹性地基梁的计算。它可作为清华大学结构力学教研组编《结构力学》上、下册的续编，也可作为一本独立的教学参考书。

全书共分四章。主要内容有局部弹性地基梁的计算、地下刚架的计算和半无限体弹性地基梁的计算。

本书可供高等工科院校土建、水利类专业师生作为教学参考书，也可供其他专业和有关工程技术人员参考使用。

结构力学教学参考丛书
弹性地基梁的计算
龙驭球 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷三厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张7.375 字数 177,000
1981年9月第1版 1983年4月第2次印刷
印数 8,501—10,550
书号 15012·0353 定价 0.77 元

序

本书讨论结构力学的一个专题——弹性地基梁的计算。它可作为清华大学结构力学教研组编《结构力学》上、下册的续编，也可作为一本独立的教学参考书。

全书共四章。第一章概略地介绍弹性地基梁的特点及其分类。第二章采用温克尔地基模型，讨论地基梁的计算，着重介绍长梁和短梁的划分标准和相应的计算方法；第三章也采用温克尔地基模型，讨论地下刚架的计算，主要介绍地基梁的刚度方程和地下刚架的位移法。第四章采用半无限体地基模型，分别介绍链杆法和级数法，在附录中还汇集了较详细的地基梁计算表格。

本书是在清华大学多年所用讲义的基础上改编而成的，在编写过程中参考了包世华、黄昭度、时学黄等同志的讲稿。习题解答由程瑞棣、张庆、刘凤阁同志给出。表2-4由支秉琛同志指导学生科学小组编制而成。

本书由同济大学朱宝华、西安冶金建筑学院锺朋主审，参加审稿的有同济大学、西安冶金建筑学院、重庆建筑工程学院、郑州工学院、湖南大学、哈尔滨建筑工程学院、天津大学、大连工学院、北京工业大学、北京建筑工程学院、华东水利学院、武汉水利电力学院、西安空军工程学院和山东建筑工程学院等十四个院校的同志。参加审稿的同志对本书提出了许多很好的意见，在此表示谢意。

本书一定还存在不少问题，请读者提出意见，以便进一步提高。

编者

一九八一年五月

目　录

第一章　概述……1
§1-1　弹性地基梁的特点……1
§1-2　地基模型的分类……2
第二章　局部弹性地基梁的计算……6
§2-1　基本微分方程……6
§2-2　基本方程的解……9
§2-3　无限长梁的计算……14
§2-4　半无限长梁的计算……23
§2-5　短梁的计算……27
习题……68
第三章　地下刚架的计算……87
§3-1　地基梁的载常数……87
§3-2　地基梁的形常数……90
§3-3　地基梁的转角位移方程……94
§3-4　地下刚架的计算……97
习题……101
第四章　半无限体弹性地基梁的计算……103
§4-1　半无限体弹性地基梁的分类……103
§4-2　两类平面问题的比较……105
§4-3　半无限平面体的沉陷……107
§4-4　半无限空间体的沉陷……114
§4-5　半无限体弹性地基梁的基本方程……118
§4-6　链杆法……120
§4-7　级数法……128
§4-8　计算表格及使用说明……132
§4-9　附表……148

附表 1　短梁承受均布荷载……………………………………148
附表 2　短梁承受集中荷载……………………………………150
附表 3　短梁承受力偶荷载……………………………………172
附表 4　长梁承受均布荷载……………………………………192
附表 5　无限长梁承受集中荷载………………………………192
附表 6　半无限长梁承受集中荷载……………………………193
附表 7　无限长梁承受力偶荷载………………………………197
附表 8　半无限长梁承受力偶荷载……………………………198
附表 9　地基梁承受边荷载……………………………………202
习题………………………………………………………………224
附录：习题答案…………………………………………………225

第一章　概　　述

§1-1　弹性地基梁的特点

在工程结构中，通常在结构底部设置基础梁或基础板。这是由于基础梁、板与地基的接触面积比较大，上部结构的荷载经过基础梁、板分散地传给地基，可以减少地基所受压力的强度。如果假设地基是弹性的，这类基础梁就叫做弹性地基梁。

下面举几个实际例子。图 1-1 为房屋结构的梁形基础，图 1-2 为水闸的底板，图 1-3 为地下结构的衬砌。

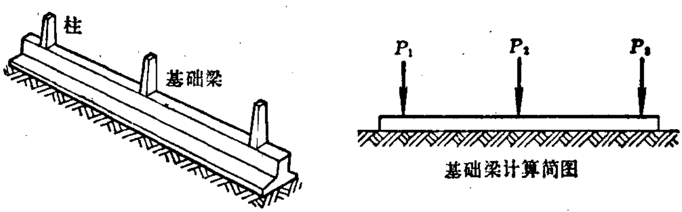


图　1-1

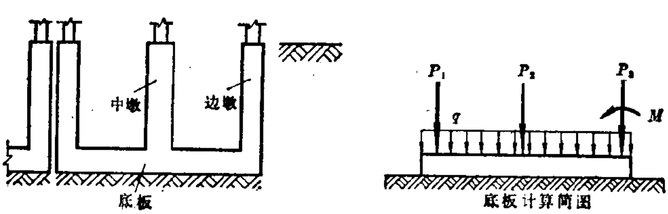


图　1-2

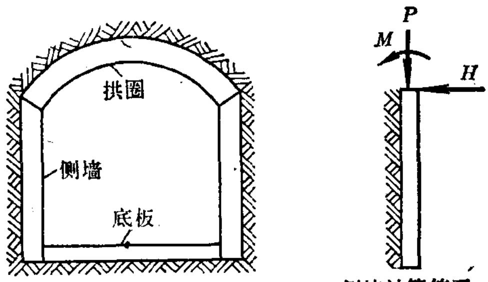


图 1-3

现将弹性地基梁与普通梁加以比较，并指出它们的主要区别：

1. 普通梁只在有限个支座处与基础相连，梁所受的支座反力是有限个未知力，因此，普通梁是静定的或有限次超静定的结构。弹性地基梁与地基连续接触，梁所受的反力是连续分布的，也就是说，弹性地基梁具有无穷多个支点和无穷多个未知反力。因此，弹性地基梁是无穷多次超静定结构。由此看出，超静定次数是无限还是有限，这是它们的一个主要区别。

2. 普通梁的支座通常看作刚性支座，即可以略去地基的变形，只考虑梁的变形。弹性地基梁则必须同时考虑地基的变形。实际上，梁与地基是共同变形的。一方面梁给地基以压力，使地基沉陷。反过来，地基给梁以相反的压力，限制梁的位移。而梁的位移与地基的沉陷在每一点又必须彼此相等，才能满足变形连续条件。由此看出，地基的变形是考虑还是略去，这是它们的另一个主要区别。

§1-2 地基模型的分类

在弹性地基梁的计算原理中，重要的问题是如何确定地基反力与地基沉降之间的关系，或者说，如何选取地基模型的问题。

从历史发展上看，在选取地基模型方面，经历了一个由粗到精的过程。下面介绍其中三种假设。

1. 反力直线分布的假设

最古老的一种算法是假设地基反力为直线分布(图 1-4)。

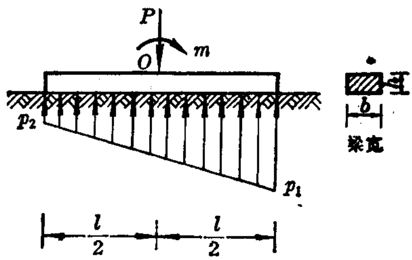


图 1-4

为了确定地基反力的直线分布图形，只需先求出梁端的地基反力集度 p_1 和 p_2。这两个未知数 p_1 和 p_2 可由平衡方程 $\Sigma Y=0$ 和 $\Sigma M=0$ 求出。因此，问题简化为静定问题。

未知数 p_1 和 p_2 也可利用偏心受压柱的应力公式来求。为此，把图 1-4 中的地基梁看作一个偏心受压柱，地基梁上荷载的合力 P 看作柱的轴力，地基梁上荷载对中点 O 的总力矩 m 看作柱的弯矩。由于柱的宽度等于地基梁的宽度 b，柱的厚度等于地基梁的跨度 l，因此，柱的横截面面积 $A=b\times l$，截面系数 $W=\frac{bl^2}{6}$，柱的边缘应力为

$$\sigma_{\frac{1}{2}}=\frac{P}{A}\pm\frac{m}{W}=\frac{P}{bl}\pm\frac{6m}{bl^2}$$

σ_1 和 σ_2 也就是地基梁端点的地基应力。再将地基应力 σ_1 和 σ_2 乘以梁宽 b，即得出单位长度内的地基反力集度 p_1 和 p_2:

$$p_{\frac{1}{2}}=\frac{P}{l}\pm\frac{6m}{l^2} \tag{1-1}$$

从以上讨论中可以看出，这种算法非常简便，但也非常粗糙。

实际上，当梁的刚度与地基的刚度相对变化时，地基反力的分布规律一般也会随着变化。这种算法由于没有考虑这些变化因素，因此自然不能全面地反映地基梁的实用情况。

地基反力为直线分布这个假设实际上包含如下两点：

(1) 对梁来说，假设梁没有弹性变形，只产生刚体移动和转动，即假设梁是绝对刚性的。

(2) 对地基来说，假设任一点的地基反力 p 与该点的地基沉陷 y 成正比。(这个假设称作温克尔假设，详见后面。)

由第(1)点，可得出梁和地基的位移为直线分布的结论。再由第(2)点，即可得出地基反力为直线分布的结论。

由此可见，反力直线分布的假设只适用于温克尔地基上的绝对刚性梁这种特殊情况。

2. 局部弹性地基模型(温克尔假设)

1867 年前后，温克尔对地基提出如下假设：地基表面任一点的沉降与该点单位面积上所受的压力成正比。

这个假设实际上是把地基模拟为刚性底座上一系列独立的弹簧(图 1-5)。当地基表面上某一点受压力 p 时，由于弹簧是彼此独立的，故只在该点局部产生沉陷 y，而在其他地方不产生任何沉陷。因此，这种地基模型称作局部弹性地基模型。

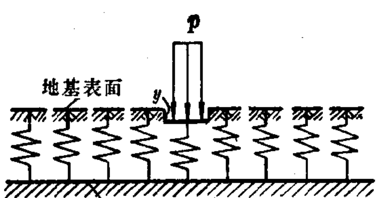


图 1-5

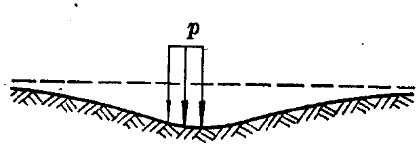


图 1-6

按温克尔假设计算地基梁时，可以考虑梁本身的实际弹性变形，因此消除了反力直线分布假设中的缺点。

温克尔假设本身的缺点是没有反映地基的变形连续性。当地基表面在某一点承受压力时，实际上不仅在该点局部产生沉陷，而且也在邻近区域产生沉陷(图 1-6)。由于没有考虑地基的连续性，故温克尔假设不能全面地反映地基梁的实际情况，特别对于密实厚土层地基和整体岩石地基，将会引起较大的误差。但是，如果地基的上部为较薄的土层，下部为坚硬岩石，则地基情况与图中的弹簧模型比较相近，这时将得出比较满意的结果。

3. 半无限体弹性地基模型

为了消除温克尔假设中没有考虑地基连续性这个缺点，后来又提出了另一种假设：把地基看作一个均质、连续、弹性的半无限体(所谓半无限体是指占据整个空间下半部的物体，即上表面是一个平面，并向四周和向下方无限延伸的物体。)

这个假设的优点：一方面反映了地基的连续整体性，另一方面又从几何上、物理上对地基进行了简化，因而可以把弹性力学中有关半无限弹性体这个古典问题的已知结论作为计算的基础。

当然这个模型也不是完美无缺的。例如其中的弹性假设没有反映土壤的非弹性性质，均质假设没有反映土壤的不均匀性，半无限体的假设没有反映地基的分层特点等。此外，这个模型在数学处理上比较复杂，因而在应用上也受到一定的限制。

思 考 题

1-1. 弹性地基梁与普通梁在计算上有何区别？

1-2. 局部弹性地基与实际地基有何差别？在什么条件下可将实际地基近似地当作局部弹性地基？在什么条件下地基反力可假设为直线分布？

1-3. 半无限体弹性地基与局部弹性地基有何区别？在什么条件下可将实际地基近似地当作半无限体弹性地基？

第二章　局部弹性地基梁的计算

§2-1　基本微分方程

1. 温克尔假设与地基系数

前已指出，温克尔假设可表述为：地基表面任一点的沉降与该点单位面积上所受的压力成正比，即

$$\sigma = k_0 y \tag{2-1}$$

式中：σ 为单位面积上的压力强度，量纲是[力]/[长度]^2；

y 为地基的沉陷，量纲是[长度]；

k_0 称为地基系数或垫层系数，量纲是[力]/[长度]^3。其物理意义为：使地基产生单位沉陷所需的压强。表 2-1 列出各种地基的系数 k_0 值，可供参考。

对于地基的上部为较薄的垫层，下部为坚硬岩石的情况，垫层系数 k_0 可按下列近似公式计算：

$$k_0 = \frac{E_0}{H}$$

式中：H 为垫层厚度，E_0 是垫层的压缩模量。

在地基梁的计算中，通常用 p 表示沿梁单位长度内的地基压力，称作地基压力的线集度。线集度 p 与压强 σ 之间有如下关系：

$$p = \sigma b$$

这里 b 表示梁的宽度。因此，温克尔假设可改写为

$$p = ky \tag{2-2}$$

式中的系数 $k = k_0 b$，它的量纲是[力]/[长度]^2。

表 2-1 地基系数 k_0 的参考数值

地层等级	地层坚硬系数 f_k	地层代表名称	地基系数 (kN/m³)
坚硬的	8	坚硬的石灰岩；不坚硬的花岗岩；坚硬的砂岩；坚硬的大理岩；白云岩；黄铁矿	$1.2\times10^6\sim2.0\times10^6$
	6	普通砂岩；铁矿	$0.8\times10^6\sim1.2\times10^6$
	5	砂质片岩；片状砂岩	$0.6\times10^6\sim0.8\times10^6$
中等的	4	坚硬的粘板岩；不坚硬的砂岩和石灰岩；软砾岩	$0.4\times10^6\sim0.6\times10^6$
	3	不坚硬的片岩；密实的泥灰岩；坚硬胶结的粘土	$0.3\times10^6\sim0.4\times10^6$
	2	软片岩；软石灰岩；冻结土；普通泥灰岩；破碎砂岩；胶结的卵石和圆砾；块石土	$0.2\times10^6\sim0.3\times10^6$
	1.5	碎石土；破碎片岩；散处的卵石和碎石；硬化粘土；硬煤	$0.12\times10^6\sim0.2\times10^6$
	1	坚实粘土；普通煤；坚硬的冲积土；掺石土	$0.06\times10^6\sim0.12\times10^6$
松软的	0.6	湿砂；粘砂土；种植土；泥炭；轻砂粘土	$0.03\times10^6\sim0.06\times10^6$

2. 基本微分方程的推导

图 2-1a 所示为局部弹性地基上的梁，在荷载 $q(x)$ 作用下，梁和地基的位移为 $y(x)$，梁与地基之间的压力为 $p(x)$。图 2-1b 和 c 分别表示梁和地基的受力图。

在局部弹性地基梁的计算中，通常以位移函数 $y(x)$ 作为基本未知量。现在推导 $y(x)$ 应满足的基本微分方程。

从梁来看(图 2-1b)，挠度 y 与荷载 q、地基压力 p 的关系为

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=q(x)-p(x) \tag{2-3}$$

其中 EI 是梁截面的抗弯刚度。

从地基来看(图 2-1c)，根据温克尔假设，地基沉陷 y 与压力 p 的关系为

$$p=ky \tag{2-2}$$

将式(2-2)代入式(2-3)，即得

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+ky=q(x) \tag{2-4}$$

式(2-4) 就是局部弹性地基梁的基本微分方程。根据它可以求解基本未知函数 $y(x)$。

式(2-4)可改写成如下形式:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\left(\frac{k}{4EI}\right)\cdot 4y=\frac{q(x)}{EI}$$

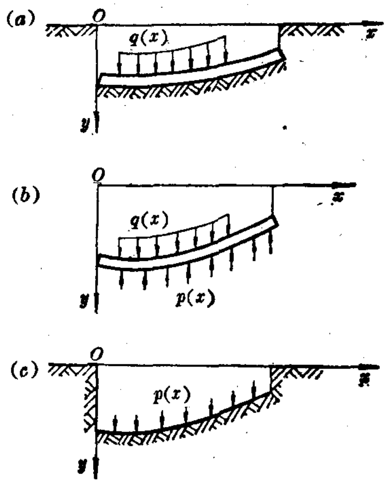


图 2-1

式中包含一个参数 $\frac{k}{4EI}$，它的量纲是 $\frac{1}{[长度]^4}$。如令

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \tag{2-5}$$

则 β 的量纲是 $\frac{1}{[长度]}$。再令

$$L=\frac{1}{\beta}=\sqrt[4]{\frac{4EI}{k}} \tag{2-6}$$

则 L 的量纲是[长度]。L 或 β 是与梁和地基的弹性性质有关的一个综合性参数，它对地基梁的受力特性和变形特性有重要影响。因此，通常把 L 叫做特征长度，β 叫做特征系数。

采用特征系数 β 后，基本微分方程可写成

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4\beta^4y=\frac{q(x)}{EI} \tag{2-7}$$

微分方程(2-7)的解法将在§2-2中讨论。

3. 内力公式

位移 $y(x)$求出后，梁任意截面的转角 θ、弯矩M、剪力Q可由下列微分关系求得：

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\frac{dy}{dx}\\M&=-EI\frac{d\theta}{dx}=-EI\,\frac{d^2y}{dx^2}\\Q&=\frac{dM}{dx}=-EI\,\frac{d^3y}{dx^3}\end{aligned}\right\}\tag{2-8}$$

图 2-2 中表示出 x、y、θ、M、Q 各量的正号方向。

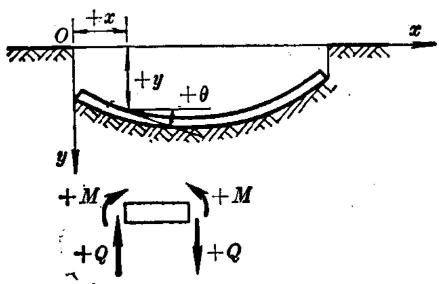


图 2-2

§ 2-2 基本方程的解

基本微分方程(2-7)是一个四阶常系数线性非齐次微分方程。如果令 $q(x)=0$，则得出相应的齐次方程如下：

$$\frac{d^2y}{dx^4}+4\beta^4y=0 \tag{2-9}$$

非齐次方程(2-7)的通解是由齐次方程(2-9)的通解

$$y=e^{\beta x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

$$+e^{-\beta x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x) \tag{2-10}$$

和非齐次方程(2-7)的一个特解

$$y=y_1(x)$$

所组成。因此,方程(2-7)的通解可表示为

$$\begin{aligned} y=&e^{\beta x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)\\ &+e^{-\beta x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x)+y_1(x) \end{aligned} \tag{2-11}$$

其中四个任意常数 A、B、C、D 可由地基梁的四个边界条件求出。

下面对非齐次特解,齐次通解和边界条件分别说明如下。

1. 非齐次方程的特解

如果 $q(x)$ 是三次以下的多项式,则非齐次方程(2-7)的一个特解就是

$$y_1(x)=\frac{q(x)}{k} \tag{2-12}$$

2. 齐次方程的通解

现在来推导齐次方程(2-9)的通解,并且证明通解可表示为式(2-10)的形式。齐次方程的通解是由特解线性组合而成的,因此,先求方程(2-9)的特解。设特解为指数函数

$$y=e^{sx} \tag{a}$$

其中 s 是待定常数。为了求出 s,可将式(a) 代入方程(2-9),约掉 e^{sx} 后,得到如下的代数方程

$$s^4+4\beta^4=0 \tag{b}$$

这个代数方程称为方程 (2-9) 的特征方程,由它可求出 s 的四个根,求根的方法如下:

式(b)移项后,可写成

$$s^4=-4\beta^4$$

两边开方后,并令$\sqrt{-1}=i$,则得

$$s^2=\pm\sqrt{-4\beta^4}=\pm i2\beta^2=\begin{cases} i2\beta^2 \\ -i2\beta^2 \end{cases}$$

再次开方后，即得出 s 的四个根如下：

$$s=\begin{cases} \pm\sqrt{i2\beta^2} \quad =\begin{cases}\sqrt{2i}\beta \\ -\sqrt{2i}\beta\end{cases} \\ \pm\sqrt{-i2\beta^2}=\begin{cases} i\sqrt{2i}\beta \\ -i\sqrt{2i}\beta \end{cases} \end{cases}$$

由于$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$，故$\sqrt{2i}=1+i$，因此 s 的四个根可改写成：

$$\left.\begin{aligned} s_1&=(1+i)\beta \\ s_2&=(-1-i)\beta \\ s_3&=(-1+i)\beta \\ s_4&=(1-i)\beta \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

将式(c)代入式(a)，即得出方程(2-9)的四个特解如下：

$$e^{\beta x}e^{i\beta x},\quad e^{-\beta x}e^{-i\beta x},\quad e^{-\beta x}e^{i\beta x},\quad e^{\beta x}e^{-i\beta x} \tag{d}$$

因为方程(2-9)是线性的，所以这些特解的线性组合仍然是方程(2-9)的特解。

利用下列关系：

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta x&=\frac{1}{2}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}) \\ \sin\beta x&=\frac{1}{2i}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}) \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

将式(d)中的四个特解进行线性组合后，可以得出方程(2-9)的四个新的特解如下：

$$e^{\beta x}\cos\beta x,\quad e^{\beta x}\sin\beta x,\quad e^{-\beta x}\cos\beta x,\quad e^{-\beta x}\sin\beta x \tag{f}$$

把这四个新的特解进行线性组合，并引进四个任意常数 A、B、C、D，即得出齐次方程(2-9)的通解如式(2-10)所示。