A. П. 諾尔金著

罗巴切夫斯基几何学初步

高等教育出版社

罗巴切夫斯基几何学初步

A. П. 諾尔金著
姜立夫等譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1953年出版的諾尔金（А. П. Норден）所著"罗巴切夫斯基几何学初步"(Элементарное введение в геометрию Лобачевского)譯出。

本書是为教师們和非数学專業的学生們写的，但亦可供我国綜合大学或师范学院数学系作几何学基础課程的教科書或参考書之用。

本書由中山大学姜立夫、胡金昌、潘孝瑞、黄树棠合譯。

罗巴切夫斯基
几何学初步

A. П. 諾尔金著

姜立夫等譯

高等教育出版社出版
北京琉璃厰一七〇号
（北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号）
京华印書局印刷　新华書店总經售

書号13010·101　開本850×1168 1/32　印張6 14/16　字數164,000
一九五六年八月北京第一版
一九五六年八月北京第一次印刷
印數0001—5,000　定[illegible]）¥1.10

目　錄

序

罗巴切夫斯基几何学通常归入几何学基础課程中；这課程是为数学物理系高年級学生开設的。这个情况就不能讓更多的人——教师們，别种專業的大学生，中等学校高年級的学生們——有机会認識我們的偉大几何学家的卓越思想。

也有專門叙述非欧几何学的各种書籍①，但这些書有的久已絕版，有的要求过高的数学水平，有的要求讀者具有解析几何和微分几何的知識。不但如此，所有这些書中，都有若干部分必須在讀者掌握了高等数学的基本內容之后才能了解。

因此，著者的目的是在本書內給罗巴切夫斯基几何学的基础提出一个初等的，同时又是有系統的和相当严密的叙述。在叙述中幷附有历史性的和方法論的說明，而在許多方面和傳統的叙述形式不同。

緒言中包括罗巴切夫斯基几何学产生的簡史。第一章略述絕对几何学的公理系統和它的一些重要定理。

第二章討論和平行公理的选擇尙未發生关系的一些平行綫性質。

第三章才开始罗巴切夫斯基几何学的叙述，幷討論了罗巴切夫斯基平面上直綫的相互位置。

---

① Я. 烏斯本斯基 (Успенский)，罗巴切夫斯基-波里埃的非欧几何学引論，1922 年；С. И. 盧克揚欽可(Лукьянченко)，罗巴切夫斯基-波里埃的非欧几何学初步，1933 年；Б. Я. 布克列也夫 (Букреев)，罗巴切夫斯基平面几何学的分析，1951 年；Б. В. 庫圖左夫 (Кугузов)，罗巴切夫斯基几何学和几何学基础初步，1950 年；П. А. 希罗可夫(Широков)，В. Ф. 卡崗(Каган)，非欧几何学的結構，1950 年。

第四章叙述角欠和面积的理論。第五章討論具有常数曲率的曲綫。

在第六章叙述絕对空間几何学的大概后，第七章接着举出罗巴切夫斯基空間几何学的基本事实。

第八章討論極限球面上的几何学。

第九章叙述指数函数和双曲函数的初等理論。已經熟習高等数学中这部分知識的讀者們可以不讀这一章。

第十章的內容是导出双曲三角学的基本公式。

第十一章利用投影几何学的解釋，証明罗巴切夫斯基几何学的相容性。但这个理論是用初等的方法来叙述的，未曾学習投影几何学的讀者們也都可以了解。

第十二章为总結性的叙述，指出罗巴切夫斯基的思想对于数学的發展，特别是对于最近八十年中的几何学所产生的巨大影响。其中虽不得不牵涉到一系列相当繁复的問題，但仍然是为了本書广大的讀者們而写的。

最后讓我謝謝 C. A. 雅諾夫斯基，書中关于数学史和方法論方面的問題，承他惠加指点。还要謝謝 B. A. 索洛可夫，B. Б. 奥尔洛夫，和 A. 3. 呂福金几位，他們給予本書以特别細心的校閱，又曾提出許多宝貴的意見。

A. П. 諾尔金

喀山，1953 年 9 月。

緒 言

§1. 几何学和它的起源

几何知識的起源在远古时代就失傳了。五千年以前埃及人便已造成規模宏大的建筑物，例如庫佛王(基奥普斯)的金字塔，高达138公尺。無疑地，假如沒有精密的測量和几何性質的計算，这样的工程是不可能进行的。

古希臘的历史学家和数学家都把埃及人的几何知識的發生归功于土地測量的需要，因为在尼罗河每年泛濫之后，他們不得不把冲掉的地界重新丈量一次。这便是“几何学”这个名詞的来源，它在希臘文正是“土地測量”的意思。

关于埃及人所达到的几何知識的水平，我們有兩部草紙書作为直接的証据，这是屬于公元前二千年的著作(其中一部草紙書保存在莫斯科)。这兩部書含有各种計算面积和体积的准确公式或近似公式①。

但是所有从那遙远的年代在埃及、中国、巴比侖、印度和其他文明古国流傳下来的几何知識一致証明，那些知識基本上只是一堆零星瑣碎的个别性質的法則。

大約在公元前七百年的时候，埃及人的几何知識傳入希臘。在那时的希臘，經济和文化的繁荣正显示出古代社会的向前發展，在这种情况下几何也跟着發展起来成为科学。

重要的是，在那时代，希臘人不仅繼續积累新的事实，并且开

① 参看 M. Я. 維郭特斯基(Выгодский)，古代算术和代数，国立技术理論書籍出版社，1941年，§§ 14,15。

始采用特别的方法去創造理論，这便是我們現在所謂演繹法或公理法的，直到今天，它还是叙述几何的基本方法。

創建这个方法是数学思想上最偉大的成就之一。它不是一下子产生出来的，而需要积累好几輩学者的工作，这些学者是米列都斯城的泰列斯(公元前七世紀)，畢达哥拉(公元前六世紀)，希奥斯島的希波克朧特和杰謨克里特(公元前五世紀)，塔倫多城的亞基塔，欧道克斯和梯要底塔(約公元前四世紀)等等。可惜他們的著作或者完全遺失，或者仅以殘缺断片的形式因被后代作家所援引而傳到我們手里。

欧几里得于公元前四世紀和三世紀交替的时候生活在亞历山大城，他把在他以前的几何發展作了总結。他的主要著作几何原本在完善和充实上不但大大地超过了在它以前所有几何学的工作，并且在它以后兩千余年間依然沒有一部著述可以和它比美。

直到現在，由于罗巴切夫斯基的發現，使几何学受到了徹底的革命以后，中等学校里几何教科書的叙述方法仍然和我們在几何原本里所見到的，在实質上沒有多大差别。

如欲証明这一点，讀者尽可亲自披閱欧几里得的几何原本。这部書的原文保存至今，流傳給我們的有拉丁譯文和阿拉伯譯文的各种手抄本。最近的俄文譯本由Д. Д. 莫尔都海-波尔托夫斯基(Д. Д. Мордухай-Болтовский)所編，不久以前才出版的①。

§2. 演繹法的基本特色

演繹体系講述法的特出之点在于結構的簡單，可用很少的文字把它表达出来。

演繹体系的叙述归結为：

① "欧几里得原本"，国立技术理論書籍出版社，卷I—VI，1948年；卷VII—X，1949年；卷XI—XV，1950年。今后我們將引用这个版本。

1）基本概念的列举，

2）定义的叙述，

3）公理的叙述，

4）定理的叙述，

5）定理的証明。

定义說明所使用的概念的意义。

几何学中的定义可举下面一条为例：由同一点出發的兩条半綫所構成的圖形称为角。

但在建立定义的时候，我們常用一个概念去定义别一个概念。在上例中，我們用了点的概念，和自該点出發的半綫的概念，去定义角的概念。自然發生这样的問題，我們是否也能給点和半綫下个定义呢？在这个情形下，我們在几何学中确实找到这样的定义：自已知点出發的半綫，是指这种点的集合，它們都在通过已知点的直綫上，并且位于該已知点的一側。

在这个定义中，我們又遇到新的概念"通过点的直綫"和"位于一側"，对于这些，我們又將需要別的定义。

但是，显然地，这个建立定义的办法不可能無止境地追究下去。我們总得从某些东西开始，所以，每个演繹体系必須以一些基本概念为基础，这些基本概念本身不給以任何定义，而通过它們去定义所有其余的概念。

在我們的几何的叙述里，將把下列概念認为是基本的："点"，"直綫"，"平面"，"屬于"，"介于"和"运动"。前面三个亦称基本形象或基本圖形，后面三个亦称基本关系。

这样一来，所有其余圖形和它們之間的关系的討論，便归結为基本圖形和基本关系的討論。

例如，再看一看角的定义。我們把这定义归結成为說明兩个概念的意义的問題，这兩个概念是："通过点的直綫"和"位于已知

点的一側的点的集合”。現在我們可以給出这样的定义:我們說,直綫 a 通过点 A,如果点 A 屬于直綫 a。在这里对于最后一个定义,我們不能再繼續追究下去了,因为已把这問題完全归結为对基本圖形“点”和“直綫”之間的一个基本关系“屬于”。

正如我們將要在下面(§8)見到的,“在一側”这个概念的定义也可归結为一个基本关系“介于”。

再說公理和定理。它們和定义有別,定义仅仅解釋所使用的概念的意义,而公理和定理則是一些断語。

例如下面兩句,都是断語:

A)“通过任何兩个不同的点有且仅有一条直綫”;

Б)“兩条直綫仅有一个公共点”。

在这里我們不打算給名詞“直綫”或“点”建立定义,而只断定直綫和点具有某些性質。

一切断語的基本特性是,我們可以对它們提出正确不正确的問題。例如,如果我們認为断語A)是正确的話,那末我們便須承認断語:“通过兩个不同的点可以引兩条不同的直綫”,是不正确的了。

总之,公理和定理一样都是断語,不过它們在演繹体系里占有不同的地位。他們的区別在:一切定理归根到底都是从公理引申出来的,公理則是不加証明的断語。

余下尙須說明構成演繹体系的最后組成部分——証明。

定理的証明是一种論辯,即从前面已有的定理或公理的正确性邏輯地推出所提定理的正确性。

現在拿前面所提的断語A)和Б)作为例子。

断語A)是公理,所以沒有証明。

断語Б)是定理,所以附有下面的証明。

假定断語Б)不正确,即假定兩条不同的直綫同时通过兩个不

同的点 P 和 Q。在这种情形下，通过兩个不同的点 P 和 Q 可以引兩条不同的直綫。但若这个断語是正确的話，那末公理 A)所断言的便不正确。这样，否定了和公理 A)矛盾的定理，也就是証明了定理 Б)。

我們只援引了最簡單情形的証明，这个定理的証明，是直接地从公理推出的。在許多更复杂的情形下，一个定理要从它前面已有的定理推出来，而这些定理本身又要和它們前面已有的定理加以比較才得証明。

这样，与叙述的次序相反地依次去檢查每个演繹体系，即是从最后和最复杂的定理轉向最前和最簡單的定理，我們終于会达到最初的最簡單的定理，它們的証明是和公理直接比較得来的。因此，归根到底一切定理的証明都以公理为根据，或者直接和公理比較，或者間接和別的定理比較。

由此可見，每个演繹体系必須从公理开始，即是从不加証明的假定开始。事实上，从一个定理追溯到它前面的定理，这个过程应該是有終止的。在公理体系的断語中必須有这一类原始的命題，才可借以証明第一批定理。那些原始的命題便是公理。

在簡略地介紹过演繹法之后，我們認为有責任警告讀者，不要把用这个方法去認識事物的价値估計得太高了。讀者必須注意，在人类認識自然的过程中，演繹法只有和归納法交互作用才能發生效果。創造演繹的几何体系，这个要求的發生，和它的实現的可能性，都是后来的事。即在人类經过几千年的長时期，积累了大量关于物体的几何特性的实际知識，并且当人类在实踐活动中，用归納方法研究了这些特性之后。只有在这样大量的物質基础上，古希臘的学者們才能迈开第一步，用演繹法把科学建立起来。

§3. 几何学和現实性

認識了前节所講的演繹体系的結構之后，我們不得不注意下列兩种情況。一个演繹体系的一切定义的基础，是本身不給定义的基本概念，又一切証明的基础，是本身不加証明的公理。在这里，好像始終存在着兩个悬而未决的問題：关于基本概念的意义的問題，和关于公理的正确性的問題。这兩个問題实在不能在演繹体系本身之內求得解決，因为要解決这些問題必須引入新的概念和新的公理，而这些概念和公理又將發生同样的問題。但是这幷不等于說，这些問題是根本解决不了的；要是这样，便談不到演繹体系的实际应用了。但事实上，人类在几千年間的一切实踐活动和科学工作，都在不同程度上依賴于邏輯、算术、几何和其他演繹体系的結論。

自然科学的历史証明，要在某門科学或在它的个别領域內建立公理体系，通常只有在这門科学發展到一定的水平，一般說来要到相当高的水平之后，幷且在發展过程中所积累的大量实际材料的基础上才可能实現。公理化能够使我們把某門科学所研究的对象之間的基本联系和关系明白地表达出来。但是，对于一門具体科学，例如几何学的公理体系，如將其中所含的基本概念和基本关系加以适当形式的解釋，常常發現这个公理体系所表述的联系和关系对于性質完全不同的事物也是适用的。这样一来，一門科学的公理体系的应用范圍，可能比这門科学还为广泛得多。那便是說，产生了关于已知演繹体系能被利用的范圍的問題。

在应用演繹体系的过程中，將同时解决兩个問題：关于基本概念的意义的問題，和关于公理的正确性的問題。

要將演繹体系应用到包含某些事物的某一領域和它們之間的关系上去，首先必須解釋这个体系的基本概念，也就是，說明我們

所考虑的領域內的哪些事物和关系跟这个体系的基本对象和关系是对应的。其次必須檢驗，和演繹体系的基本概念相对应的那些事物和关系，是否适合公理的規定。如果發現它們都能够适合那些公理的話，那末这个演繹体系的每一个定理对于所考虑的事物領域也將是正确的。

上面最后的情况說明了建立演繹体系的科学的和实用的意义。要將这样的体系应用到某一事物的領域上去，我們只須檢驗它的公理是适合的，以后我們便可确信它的任何定理都是适用的。这样才有可能去發見我們所关注的領域內事物的某些特性，这些特性如果用直接观察的方法可能是难以測知的。

頗为重要的是，我們可給予基本概念以不同的解释，而使公理仍能适用。这种情形保証了同一的演繹体系可被应用到不同的領域上去。

除此以外，还要注意到，演繹体系像任何别的科学体系一样，是用抽象的方法从实驗得来的，也就是从科学研究的对象里抽出它們在实踐上主要的性質，而把那些在科学的应用和發展的現阶段上比較不关重要的性質撇开。

但撇开了这些次要的性質后，科学理論对現实性的反映將是不完全的，并且只是近似眞确的。

在科学和实踐更进一步發展的过程中，可能有这样的一个时候，那时对象的某种性質，原先是不重要的，忽又变成重要的了。在这时候，原来的理論，便不够充分，而必須讓位給新的理論，因为新理論能把对象說明得更全面更深刻。

現在回到几何的討論。很难举出技术科学或自然科学的哪一个領域是沒有几何的应用的。而且在每一个領域里，几何的基本概念都有确定的解释，而它的公理或者直接地，或者从它的推論里，获得驗証。

例如，討論直綫和点的概念。在最簡單的測量实踐中，我們把直綫解釋为拉紧的繩子，在力学上解釋为物体依慣性运动的軌道，在光学，测量学和天文学上，解釋为光的射綫。同样地，关于点，我們了解为綫的末端，或为物体，或为光源，它們是那末細微，在实际上可以不必計較它們的大小。在所有这些情况里，点都是不可分裂，不可穿孔或不能透光的小东西，它都服从下面的命題：通过兩个不同的点，能引一条而且只有一条直綫。

同样地可以解釋几何学的其他基本概念，并驗証它的公理，而且由于公理是正确的，因此断定一切几何定理都是正确的。几何定理的正确性不仅从它的公理的正确性邏輯地得出，而且在几千年長时期里被人类的实踐活动和科学工作不断地証实着。

因此，我們相信几何学的基本命題的正确性，正如相信每一門科学知識的正确性一样，是有其根据的，那就是这些命題是从經驗中提煉出来，在实踐中受了檢驗，并且表示出客观世界中事物的虽屬近似但已足够精确的性質。

§4. 欧几里得公設

在上面我們把公理了解为根据經驗并且由实踐来加以驗証的眞理。这种唯一正确的唯物論的看法并沒有很快地貫注到科学里去。自欧几里得的几何原本問世以后，在很長时期里，另外一种見解占着优势，这就是把公理看作是显然的眞理。根据这种見解，証明是一种論辯，它使某一命題成为显然的眞理。但因为公理本身是显然的，所以公理不需要任何的証明。当然，这样的观点是經不起批判的。显然性是一种純粹主观的感覚，而且像任何感覚一样是可能騙人的。人們只須回忆，在过去很長的时期里，人人都以为地球是显然不动的，而太陽圍繞着地球运行，这就說明了显然性决不是树立科学眞理的充分基础。