

应用力学

(七)

YYLX

科学技术文献出版社重庆分社

039/2082/17

应 用 力 学(七)

中国科学技术情报研究所重庆分所	编 辑
科学技术文献出版社重庆分社	出 版
重庆市市中区胜利路91号	
四川省新华书店重庆发行所	发 行
科学技术文献出版社重庆分社印刷厂	印 刷

开本: 787×1092毫米1/16	印张: 3.5字数: 9万
1982年10月第一版	1982年10月第一次印刷
科技新书目: 39—274	印数: 3620

书号: 13176·112

定价: 0.40元

目 录*

车辆随机振动的计算方法.....	(1)
新的数值分析方法——边界元法:	
(1) 边界元法概要.....	(7)
(2) 在固体力学方面的应用.....	(14)
计算工程发展趋势.....	(21)
利用光弹性等力线研究接触问题.....	(26)
最近的应变计(1)、(2).....	(37)
书评与会议消息.....	(53)

欢迎订阅

——应 用 力 学——

本刊主要报导国外应用力学方面的发展动向、研究成果及实际应用。内容包括:弹塑性、振动、材料强度、断裂力学、结构力学、计算力学、实验力学、生物力学以及相关学科等。

本刊从83年起改为定期(双月刊),邮局杂志代号62—138,定价0.45元,请速向当地邮局预订。

车辆随机振动的计算方法

P. C. Müller, K. Popp, W. O. Schiehlen

〔摘要〕在不平道路上行驶的车辆,产生随机振动,能够损害舒适性和行驶安全。这种“道路-车辆-人”系统的分析,要求把随机道路不平度、车辆非线性动力学和人体对振动的感受三者结合起来进行研究。为此,给出了在频域以及在时域这三个子系统的数学模型。对于多轴车辆,考虑了多接触点的激励。用统计线性化方法来处理可能出现的非线性特性。我们感兴趣的随机特性——车轮动载、车体加速度以及人对振动感受等的方差——的计算是使用频域谱密度方法或时域的协方差方法完成的。对比这两种方法可以得出,协方差方法对于解线性问题特别是解非线性问题比较适合。对所提出的车辆随机振动的计算方法,用一个非线性汽车模型为例加以说明。

1. 引言

由于行驶道路不平度是不规则的,铁路车辆和公路车辆都会产生随机振动。车轮动载和车辆上部结构加速度的相应变化,既损害行车安全,也损害舒适性。因此,这两种变化值必须充分小,例如,在舒适性方面,必须是在国际标准化组织规定的ISO规章 2631 [1]的范围之内。为了能够遵循这一要求,必须确定令人感兴趣的特征量。本文目的,在于用适当的计算方法,提供这些数据。

分析车辆随机振动及其对于人体乘行舒适度的影响,要求综合地研究出现的道路不平度、车辆的非线性模型和振动载荷下人体的状况。这些问题的很多方面都曾在大量文章中研究过。研究公路车辆的,可举(例如) Mitschke 的著名著作[2]。新的著作,可举出例如下列诸人的: Hedrick, Billington 和 Dreesbach 的[3]; Karnopp 的[4]; Dahlberg 的[5]; 以及作者本人的[6]。为了改善迄今为止的分析方法,而且特别是为了能够把车辆参数更好地调整到适合人体对于随机振动的接受程度,本文指出了如何系统地描述道路不平度、车辆非线性动力学和人体对于振动的感受,以及如何借助于谱密度方法、特别是借助于协方差方法对它们进行分析。在第

2节中,表述了测出的道路粗糙性,并给出激励模型;在频域它是用功率谱密度、在时域是用形式滤波器给出的。在第3节中,建立了多轴车辆的非线性运动方程;而第4节说明了在感受形式滤波器范围内人体对于随机振动的敏感程度。在第5节中,简短地谈到测试数据的处理和模拟问题。第6节概述随机特性数据的解析计算方法;同时,将谱密度方法和协方差方法作了对比,证实后一种方法较为优越。在统计线性化范围内,考虑了实际呈现的非线性特性,最后,在第7节中,以受随机激励的一部汽车的铅垂振动非线性模型为例,说明了前面叙述的方法。

2. 行驶道路的不规则性和对车辆的激励

对行驶道路的不规则性的了解,以及由此得到的车辆随机激励的数学模型,二者是车辆随机振动计算的基础。行驶道路粗糙性质的研究,是长时期以来的研究课题。根据公路剖面的大量测试,参阅 Mitschke [7]、Braun [8] 和 Wendeborn [9] 的文章,以及铁路轨道上的测试,参阅 ORE [10] 的报告,可以看出,这些行驶道路的不规则性质,可以用正态分布、平稳各态历经随机过程来描述。用 $\zeta(x)$ 表示所测得的铅垂(由平均值算起)

的(在铁路上,也是水平的)道路剖面,这里的 x 为路线坐标。随机变量 $\zeta(x)$,可以用平均值 m_ζ 和相关函数 $R_\zeta(\xi)$ 单值地表示出来(例如,参阅Newland[11]的文章),由 $R_\zeta(\xi)$ 可以得到方差 $P_\zeta(\sigma_\zeta^2)$,

$$m_\zeta = E\left\{\zeta(x)\right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X \zeta(x) dx \quad (2.1)$$

$$R_\zeta(\xi) = E\left\{\zeta(x)\zeta(x-\xi)\right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X \zeta(x)\zeta(x-\xi) dx, \quad (2.2)$$

$$P_\zeta = \sigma_\zeta^2 = R_\zeta(0) = E\{\zeta^2(x)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X \zeta^2(x) dx, \quad (2.3)$$

式中, $E\{\cdot\}$ 为数学期望记号, ξ 为行程差, $R_\zeta(\xi)$ 为相关函数;实践中经常使用谱密度 $S_\zeta(\Omega)$ 来代替 $R_\zeta(\xi)$,它是由 $R_\zeta(\xi)$ 经Fourier变换得到的,

$$S_\zeta(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\zeta(\xi) e^{-i\Omega\xi} d\xi, \quad (2.4)$$

$$R_\zeta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\Omega) e^{i\Omega\xi} d\Omega, \quad (2.5)$$

$$P_\zeta = \sigma_\zeta^2 = R_\zeta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\Omega) d\Omega. \quad (2.6)$$

因为谱密度是偶函数,即 $S_\zeta(\Omega) = S_\zeta(-\Omega)$,所以几乎只用单侧谱密度 $\phi_\zeta(\Omega) = 2S_\zeta(\Omega)$ 来表示测试的结果, $0 \leq \Omega < \infty$,其中 Ω 为非负的行程圆频率。

2.1 道路(路面)不规则性的数学模型

在估计行驶道路不规则性的大量测试结果方面,显示出一种标准化的趋势。对公路不平度经常采用的一种简单的粗糙性模型为(参阅Mitschke[2], Voy[12]的文章):

$$\phi_\zeta(\Omega) = \phi_0 \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^w,$$

$$0 < \Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2 < \infty, \quad (2.7)$$

式中,频率范围是有限制的。这里: Ω_0 (rad/m)为标准道路的圆频率; $\phi_0 = \phi_\zeta(\Omega_0)$ ($m^2/\text{rad/m}$),作为不平度,它表明公路的好坏;

波形度 w 是一种尺度,用它表明公路是否主要包含着长波(波长 $\lambda = 2\pi/\Omega$),或者也包含着密度值显著的短波。公路的波形度在 $1.75 \leq w \leq 2.25$ 中变动。粗糙性模型(2.75),在一般双对数标尺的 Ω - ϕ 图表中用下降的直线表示。

一种相似的、然而有点儿复杂的粗糙度模型,既适用于公路不平度,也适用于铁路不平度(参阅:Dodds和Robson[13],以及Hedrick和Anis[14]的文章),

$$\phi_\zeta(\Omega) = \begin{cases} \phi_0 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^{w_1}, & \text{对于 } 0 < \Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_0; \\ \phi_0 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^{w_2}, & \text{对于 } \Omega_0 \leq \Omega \leq \Omega_1 < \infty; \end{cases} \quad (2.8)$$

式中,不同波形度 w_1 和 w_2 出现于不同的频率范围。在铁道线路的情况下,使用(2.8)式可同样描绘铅垂和水平方向、横向倾斜以及轨宽的不规则性。但轨道的四种随机参数的统计互相关关系(交叉相关),还未曾有人给定。

粗糙性模型(2.7)和(2.8)表示了,在某一频率范围 $0 \leq \Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$ 上所测得之谱密度的一种近似式。在这两种情况下,极限过渡 $\Omega \rightarrow 0$ 一定有无穷的谱密度,即 $\phi_\zeta(\Omega \rightarrow 0) \rightarrow \infty$,以及无穷的方差 P_ζ 。为了避免这种不实际的情况,曾提出了另一种粗糙性模型,它适用于整个频率范围(参阅Dincă和Theodosiu[15], Fábán[16], Sussman[17]等人的文章),

$$\phi_\zeta(\Omega) = \frac{2a\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + \Omega^2}, \quad 0 \leq \Omega < \infty; \quad (2.9a)$$

$$\phi_\zeta(\Omega) = \frac{2a\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\Omega^2 + a^2 + \beta^2}{(\Omega^2 - a^2 - \beta^2) + 4a^2\Omega^2}, \quad 0 \leq \Omega < \infty; \quad (2.10a)$$

式中, a 、 β 和 σ^2 为常数。对于这种粗糙性模型,现在可以计算相应的相关函数。对于单侧谱 $\phi_\zeta(\Omega)$,施行Fourier变换的逆变换(见(2.5)式),于是得出

$$R_{\zeta}(\xi) = \int_0^{\infty} \phi_{\zeta}(\Omega) \cos \Omega \xi d\Omega. \quad (2.11)$$

以(2.9a)和(2.10a)代入(2.11), 则有

$$R_{\zeta}(\xi) = \sigma^2 e^{-\alpha |\xi|}, \quad (2.9b)$$

$$R_{\zeta}(\xi) = \sigma^2 e^{-\alpha |\xi|} \cos \beta \xi, \quad (2.10b)$$

式中, $\sigma^2 = R_{\zeta}(0)$ 表示道路粗糙性的有限的方差。

2.2 车辆激励模型

由道路粗糙性 $\zeta(x)$ 的给定模型, 可导出与时间 t 有关的、车辆激励 $\zeta(t)$ 的模型, 这时假设, 道路和车辆持续接触以及行车速度不变。特征量的换算, 使用公式

$$x = vt, \quad \xi = v\tau, \quad \omega = v\Omega. \quad (2.12)$$

式中, τ 表示时间差, ω [rad/s]表示圆频率。因为道路粗糙性 $\zeta(x)$ 和车辆激励 $\zeta(t)$ 的方差 $R_{\zeta}(0)$ 必须相等, 则由(2.11)得出关系式

$$\phi_{\zeta}(\omega) d\omega = \phi_{\zeta}(\Omega) d\Omega,$$

由此, 并利用(2.12), 得到车辆激励的单侧谱密度 $\phi_{\zeta}(\omega)$ [m²/rad/s]如下,

$$\phi_{\zeta}(\omega) = \frac{1}{v} \phi_{\zeta}(\Omega = \frac{\omega}{v}) \quad (2.13)$$

由粗糙性模型(2.7), 例如, 对于 $w=2$, 便得到

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \frac{1}{v} \tilde{\Phi}_0 \left(\frac{v\Omega_0}{\omega} \right)^2 = v \tilde{\Phi}_0 \left(\frac{\Omega_0}{\omega} \right)^2. \quad (2.14)$$

到此为止, 我们考察了道路对车辆的随机激励 $\zeta(t)$ 。同样, 我们能够转而考察导数 $\dot{\zeta}(t)$ 和 $\ddot{\zeta}(t)$ 。对于谱密度 $\Phi_{\dot{\zeta}}(\omega)$ 和 $\Phi_{\ddot{\zeta}}(\omega)$, 有下列二式 (参阅例如Newland[11]的文章),

$$\Phi_{\dot{\zeta}}(\omega) = \omega^2 \Phi_{\zeta}(\omega), \quad \Phi_{\ddot{\zeta}}(\omega) = \omega^4 \Phi_{\zeta}(\omega). \quad (2.15)$$

应用于例(2.14)时, 对于速度激励 $\dot{\zeta}(t)$, 得到一个白噪声过程, 其谱密度为

$$\tilde{\Phi}_{\dot{\zeta}}(\omega) = \omega^2 v \tilde{\Phi}_0 \left(\frac{\Omega_0}{\omega} \right)^2 = v \tilde{\Phi}_0 \Omega_0^2 = \text{const}, \quad (2.16a)$$

而有关的相关函数为

$$R_{\dot{\zeta}}(\tau) = q_{\dot{\zeta}} \delta(\tau), \quad q_{\dot{\zeta}} = \pi v \tilde{\Phi}_0 \Omega_0^2, \quad (2.16b)$$

式中 $q_{\dot{\zeta}}$ 为噪声强度, $\delta(\tau)$ 为Dirac函数。白噪

声过程表示一种有无限大的方差的过程, 而是一种不切实际的激励模型。另一方面, 对于(2.16)形式的车辆激励, 车辆随机振动的计算费用, 会明显减少, 参阅Karnopp[4]的文章, 因而(2.16)式作为一种工程上的近似, 是有意义的。如果粗糙性模型(2.7)表示一种 $w \neq 2$ 的波形, 则可用 $w=2$ 作为一种粗略的近似; 在这里, 近似模型和原模型的方差, 在给定的频率范围 $\Omega_I \leq \Omega \leq \Omega_I$ 之内, 二者是应当相等的

$$\tilde{\Phi}_0 \int_{\Omega_I}^{\Omega_I} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^2 d\Omega = \Phi_0 \int_{\Omega_I}^{\Omega_I} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^w d\Omega. \quad (2.17)$$

由(2.17)得出等效不平度 $\tilde{\Phi}_0$, 并按照(2.14), 可以作进一步计算,

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{\Phi_0}{w-1} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^{w-2} \frac{1 - (\Omega_I/\Omega_I)^{w-1}}{1 - (\Omega_I/\Omega_I)^{w-1}}, \quad w \neq 1. \quad (2.18)$$

通常有 $\Omega_I/\Omega_I \ll 1$, 因而(2.18)相应地得到简化。

车辆激励 $\zeta(t)$ 的更好的模型是以(2.9)和(2.10)式为基础的。这类模型代表正态分布的、平稳有色噪声过程; 它们可以作为线性微分方程组 (形式滤波器) 的平稳解而得出, 其激励是白噪声 $w(t)$ (平均值为0, 强度为 q_w),

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = h^T v(t), \\ \dot{v}(t) = F v(t) + g w(t), \\ \text{Re} \lambda(F) < 0, \quad w(t) \sim N(0, q_w) \end{cases} \quad (2.19)$$

$m \times 1$ 阶的状态矢量 $v(t)$ 和量 F , g 和 h 完全表征出形式滤波器。对于模型(2.9)和(2.10), 形式滤波器的各量为:

$$F = -\alpha v, \quad g = g, \quad h = 1 \quad (g^2 q_w = 2\alpha v \sigma^2), \quad (2.9c)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha^2 + \beta^2)v^2 & -2\alpha v \end{bmatrix}, \quad g = g \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} v\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 1 \end{bmatrix} (g^2 q_w = 2\alpha v \sigma^2). \quad (2.10c)$$

一般地说, 人们不是从解析近似, 而是直接从测得的谱密度曲线 $\phi_{\zeta}(\Omega)$, 来求谱式

滤波器的各量；在这里，形式滤波器的阶 m 是事先给定的。为了说明此方法，让我们考察 $m=2$ 阶的形式滤波器(2.19)，它的一般构造决定于下列各量

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_2 & -f_1 \end{bmatrix}, \quad g = g \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

有关的谱密度 $\tilde{S}_z(\omega)$ 如下式 (参阅 Miiller, Schiehlen[18]的文章),

$$\tilde{S}_z(\omega) \equiv h^T \hat{F}(\omega) g \frac{q_w}{2\pi} g^T \hat{F}(-\omega) h,$$

$$\hat{F}(\omega) \equiv (i\omega E - F)^{-1}, \quad (2.21)$$

式中, $\hat{F}(\omega)$ 为频率特性矩阵。以(2.20)代入(2.21), 则有

$$\tilde{S}_z(\omega) = \frac{g^2 q_w}{2\pi} \cdot \frac{h_1^2 + h_2^2 \omega^2}{f_2^2 + (f_1^2 - 2f_2)\omega^2 + \omega^4}. \quad (2.22)$$

随行程圆频率 Ω 而变化的、相应的单侧谱 $\tilde{\Phi}_z(\Omega)$, 用(2.12)和(2.13)给出如下,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_z(\Omega) &= 2\tilde{S}_z(\Omega) = 2v\tilde{S}_z(\omega = v\Omega) \\ &= \frac{g^2 q_w}{\pi v} \cdot \frac{c_0 + c_1 \Omega^2}{b_0 + b_1 \Omega^2 + \Omega^4}, \quad (2.23) \end{aligned}$$

$$c_0 = \left(\frac{h_1}{v}\right)^2, \quad c_1 = h_2^2, \quad b_0 = \left(\frac{f_2}{v^2}\right)^2,$$

$$b_1 = \left(\frac{f_1}{v}\right)^2 - 2\frac{f_2}{v^2}, \quad (2.24)$$

$$h_1 = v\sqrt{c_0}, \quad h_2 = \sqrt{c_1}, \quad f_2 = v^2\sqrt{b_0}, \quad f_1 = v\sqrt{b_1 + 2\sqrt{b_0}}. \quad (2.25)$$

因为在(2.23)和(2.24)中、形式滤波器的几个待定量是彼此相乘的, 故可以自由地规定它们。在所述情况下, 可选定

$$g = 1, \quad q_w = \pi v \quad (2.26)$$

如果在行程圆频率 Ω_i 的位置上记下测出的相应谱密度值, $\Omega_l \leq \Omega_i \leq \Omega_1$, 并有 $\Phi_i = \Phi_z(\Omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 则要求逐点重合于近似值(2.23), 即 $\Phi_i = \Phi_z(\Omega_i)$, 会导致多余的方程组 ($N > 4$)

$$Up = u, \quad (2.27)$$

其参数矢量 $p = [c_0, c_1, b_0, b_1]^T$, 给定量

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \Omega_1^2 & -\Phi_1 & -\Omega_1^2 \Phi_1 \\ 1 & \Omega_2^2 & -\Phi_2 & -\Omega_2^2 \Phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \Omega_N^2 & -\Phi_N & -\Omega_N^2 \Phi_N \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} \Omega_1^4 \Phi_1 \\ \Omega_2^4 \Phi_2 \\ \vdots \\ \Omega_N^4 \Phi_N \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

用最小平方误差原理, 可求解(2.27), 从而用广义逆阵 U^+ 、可导致下式

$$p = U^+ u = (U^T U)^{-1} U^T u. \quad (2.29)$$

由行车速度 v , 按照(2.25), 可以由此得到仍然缺少的形式滤波器的量。关于(2.29)的数值计算, 可参阅 Wilkinson 和 Reinsch [19]的著作。

在前面列举的车辆激励的计算模型中, 曾假定车辆与道路的接触点只是一个, 因而得到标量的随机激励过程。实际的多轴车辆, 是在多点上和道路接触, 因此, 在建立激励模型时必须考虑路面各接触点的相互间的时间差(延迟), 参阅第3节。

3. 车辆的数学模型

车辆的实际设计, 具有车体、以及其上的许多悬挂部件, 这些是不能一一用数学加以描述的。为了计算运动过程, 必须建立代换系统, 或模型, 它应包括全部令人感兴趣的量。力学把如下系统作为模型使用——多体系统, 有限元系统, 连续系统; 而从物理或者数学考虑的结果, 这些系统最终都可归结为常微分方程组。

在研究车辆振动时, 在30Hz以下的频率范围内, 承载结构可以看成是刚体。车体, 驱动机构和车轮悬架系统等, 在不忽略重要特性的条件下, 可用多体系统作为其模型。这样的模型是由刚体、弹簧、阻尼器、传动机构和轴承以及发动机等所组成。图1表示(作为一例)一个多体系统, 用以计算7个

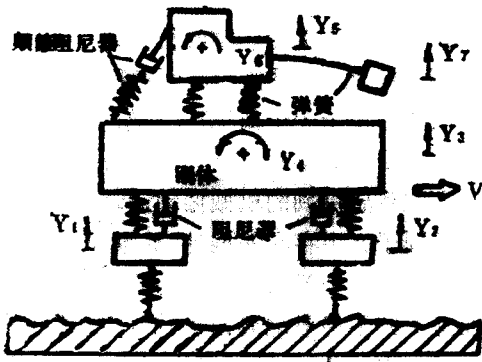


图1 计算平面上下和俯仰振动的多体模型

自由度的一部汽车平面的上下和俯仰振动。Schiehlen 和 Kreuzer [20,21] 详细地说明了这种以多体系统作模型的方法；它在车辆动力学中证明为有效的[22]，并且可以把 Kreuzer 的方法 [23] 广泛地介绍给计算工作者。

假设车辆由 p 个刚体所构成。假设各组成体的运动可能被 q 个完整定态约束所限制，因而总的运动自由度为 $f = 6p - q$ 。为了单值地描写运动，需要 f 个广义坐标，用这些座标可以组成 $f \times 1$ 阶的位置矢量 $y(t)$ 。每个组成体的位移矢量和转动张量，给作为位置矢量 $y(t)$ 的函数。现在把非线性运动方程写成 $f \times 1$ 阶矢量的二阶微分方程形式：

$$M(y) \ddot{y}(t) + k(y, \dot{y}) = q(y, \dot{y}, z, t), \quad (3.1)$$

式中， z 表示一般力规律的状态矢量，例如，它们出现在气控、液控或者磁控机构中。因此，对 (3.1) 还要补充上 $\rho \times 1$ 阶矢量的微分方程

$$\dot{z} = \dot{z}(y, \dot{y}, z, t). \quad (3.2)$$

M 是 $f \times f$ 阶的质量矩阵； k 是 $f \times 1$ 阶广义陀螺力和离心力矢量， q 是 $f \times 1$ 阶广义作用力矢量。

广义作用力一般地和下列项目有关：

1. 由非线性弹簧力和重力产生的与位置有关的部分 $q_1(y)$ 。
2. 由非线性阻尼力和摩擦力产生的与速

度有关的部分 $q_2(y, \dot{y})$ 。

3. 一般地由阻尼器和弹簧串接、或者由驱动的发动机产生的与 z 有关的部分 $q_3(y, z)$ 。例如，参阅图 1 的颠簸阻尼器。

4. 由道路随机不平度产生的与时间有关的部分 $q_4(y, t)$ 。

(3.1) 中不出现广义强迫力，因为在建立运动微分方程时，这些力都自动消失了。

由于有随 z 而变化的广义作用力，非线性运动方程 (3.1) 并未完全描述了车辆。还须用状态方程，这时可以把 (3.1) 和 (3.2) 合并为 $n \times 1$ 阶矢量的一阶微分方程组

$$\dot{x}(t) = a(x, t), \quad (3.3)$$

式中，出现了 $n \times 1$ 阶状态矢量

$$x(t) = [y^T(t) \quad \dot{y}^T(t) \quad z^T(t)]^T \quad (3.4)$$

以及非线性 $n \times 1$ 阶矢量函数 a 。

如果我们限于研究几何上呈线性的车辆、而道路到车轮悬挂之间的弹簧和阻尼器为线性，但其余的弹簧、阻尼器元件都具有非线性特性的情况，则状态方程 (3.3) 可简化成

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + B\xi(t) \quad (3.5)$$

在这里： A 是 $n \times n$ 阶的系统矩阵； $f(x)$ 是 $n \times 1$ 阶非线性矢量奇函数，其中不包含线性项； B 是 $n \times n$ 阶扰动矩阵； $\xi(t)$ 是 $r \times 1$ 阶随机过程矢量。

由道路不平度产生的扰动过程 $\xi(t)$ ，对于多轴车辆而言，须标记其时间延迟

$$t_i = \frac{l_i}{v}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (3.6)$$

式中， l_i 表示第一轴到第 i 轴之间的距离， v 表示车辆的常速度。于是 (3.5) 中的扰动项为

$$B\xi(t) = \sum_{j=1}^r b_j \xi_j(t),$$

$$\xi_i(t) = \xi(t - t_i), \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_r,$$

(3.7)

标量过程 $\xi(t)$ ，由 (2.9) 直接推得，它是由道路不平度决定的。

4. 随机振动的评价准则

车辆的随机激励,引起机械的随机振动。这种振动又影响乘客(员)。这意味着,随机过程理论,不仅可用来表征车辆运动,而且可用以评价人对车辆振动的感受程度。机械随机振动的估价,受状态矢量过程 $\mathbf{x}(t)$ 和激励 $\xi(t)$ 的影响。假设这两个过程是平稳各态历经且正态分布的。就评价而言,客观存在的和主观感受的随机振动,均是有意义的。前者可以断言道路荷载,而后者可以描述车辆的舒适性。

对于道路客观上可测量的机械作用(车辆和乘员或荷载)都可以作为标量 $w_k(t)$,而由 $n \times 1$ 阶状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ 和 $r \times 1$ 阶激励矢量 $\xi(t)$ 推得:

$$\begin{aligned} w_k(t) &= \mathbf{c}_k^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{d}_k^T \xi(t), \quad k=1, 2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

在这里, $\mathbf{c}_k^T$ 是 $1 \times n$ 阶估价矢量, $\mathbf{d}_k^T$ 是 $1 \times r$ 阶估价矢量。估价标量 $w_k(t)$,根据假设,仍然是平稳、各态历经、正态分布的过程,其特性可用平均值和方差表征:

$$\mathbf{m}_{wk} = \mathbf{c}_k^T \mathbf{m}_x + \mathbf{d}_k^T \mathbf{m}_\xi = 0, \quad (4.2)$$

$$\sigma_{wk}^2 = \mathbf{c}_k^T \mathbf{P}_x \mathbf{c}_k + 2\mathbf{c}_k^T \mathbf{P}_{x\xi} \mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^T \mathbf{P}_\xi \mathbf{d}_k. \quad (4.3)$$

在这里, $\mathbf{m}_x$ 和 $\mathbf{m}_\xi$ 是零平均值, $\mathbf{P}_x$ 和 $\mathbf{P}_\xi$ 分别是过程 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\xi(t)$ 的非零的协方差矩阵,而协方差矩阵 $\mathbf{P}_{x\xi}$ 则是描述此两进程的耦合。如果激励来源于一个白噪声矢量过程,而且 $\mathbf{P}_\xi \rightarrow \infty$,则仅能得到 $\mathbf{d}_k = 0$ 时的估价量。

人主观感受到的机械振动运动,一般而论,不同于客观存在的振动。其原因在于,人本身就构成一个复杂的能振动的系统,而且心理感受并不绝对地遵循机械(力学的)规律。正如文献[6]中所指出的,可以利用VDI标准[24]引入标量感受强度过程

$$\dot{\mathbf{w}}_k(t) = \alpha \mathbf{h}_k^T \mathbf{v}_k(t), \quad (4.4)$$

而且可用矢量微分方程

$$\dot{\mathbf{v}}_k(t) = \mathbf{F}_k \mathbf{v}_k(t) + \mathbf{g}_k \mathbf{w}_k(t) \quad (4.5)$$

(感受的形式滤波器)由(4.1)决定之。在这里: $\mathbf{v}_k(t)$ 是 $m \times 1$ 阶辅助矢量, $\mathbf{F}_k$ 是 $m \times m$ 阶形式滤波器矩阵, $\mathbf{g}_k$ 是 $m \times 1$ 阶输入矢量。感受强度的方差等于

$$\sigma_{wk}^2 = \alpha^2 \mathbf{h}_k^T \mathbf{p}_k \mathbf{h}_k, \quad (4.6)$$

式中 $\mathbf{p}_k$ 为辅助矢量的 $m \times m$ 阶协方差矩阵。感受强度本身是由方差 σ_{wk}^2 给定的,它能断言关于影响舒适性、车中人体健康容许负荷以及人体健康受损害的疲劳时间。[待续]

(冯登泰译自Ingenieur-Archiv, 1980, 49, №3/4, 广凯校)

新的数值分析方法——边界元法 (1)

——边界元法概要——

神谷纪生

1. 前言

目前,一种新的有效的数值分析方法——边界元法(简记BEM)已引起人们的注意。关于边界元法的入门书^[1-3]和国际会议论文集^[4-6]相继出版。虽然这方法的原理并不是完全新的,但最近研究活动极为活跃,其原因在于它比迄今使用的数值分析方法更有可能降低计算费用。另外,在这组文章(1)、(2)中采用的与过去不同的推导方法也显示出边界元法本身的生命力。

边界元法同有限单元法(简记FEM)一样是对数理模型的方程进行数值解的方法。有限单元法是将所研究的区域即整个物体分割成单元来处理的,而边界元法则只是将区域边界分割为单元来处理,因此,具有操作简单、计算时间少等优点。

下面,主要通过同有限单元法的比较对边界元法作一初步介绍。另外也要涉及到有关的固体力学方法。

2. 有限单元法

有限单元法作为数值分析方法是现在最广泛使用的有效方法,不但结构分析用的计算机程序和按有限单元法编制的各种通用程序已在市上出售,且计算机软件库内也多包含有这些程序,所以即使完全没有有限单元法知识的人也能利用,即可利用所谓“黑箱”。有限单元法的发展和普及与近十多年来计算机的急速发展是密切相关的。

有限单元法起源于结构分析,但现在却不只用于结构分析方面而成为解微分方程的数值方法。能表示成数理模型的各种问题都可按这方法解决。然而有限单元法也并非没有缺点,正如具有有限单元法计算经验的人感到的那样,为准备计算机所需要的信息通常须花费相当大的功夫和时间,就是校核这些数据也是相当麻烦的。虽然可采用自动分割法等以减轻工作量,但现在的情况要完全自动计算还不可能。另外,虽然可用大容量高速度的计算机进行有限单元分析,但各种小型、微型计算机的应用技术正由各个部门大力开发,我们应努力利用这些设备以节省经费。

这并非否定有限单元法的有效性,而是要更有效地利用它的优点。因此,必须研究相应的对策以降低分析的费用。这也许正是本文介绍的边界元法得以崭露头角的原因。

3. 边界元法

3.1 边界元法的历史背景

边界元法(BEM)这名字是相对于有限单元法(FEM)而言的。有限单元法将所研究问题的区域分割为小区域(有限单元),而边界元法只把此区域的边界分割成单元(边界元法由此而命名),这是两者本质的区别,但有限单元法处理单元的方法对边界元法也是同样适用的。

本来,把微分方程初值问题和边值问题变换为积分方程求解这是很早就知道的,边

界单元法即以此为基础。按照变换为积分方程的不同方法或按照积分方程未知数的不同选择可分为下列各种方法。为了说明方法的特点,分别称作奇异点法、单位势能法(就势能问题而言),或者是包含它们的积分方程法(简记IEM)及奇异积分方程法;若强调它是边界上的积分方程,则叫边界积分方程法(简记BIEM)。熟知的二维弹性问题的MUSKHELISHVILI^[7]处理也属这个范围。另外,与Laplace方程有关的问题即势能问题或关于弹性静力学的问题也早就应用这些方法来处理。因此,可以说这些方法很早就进入了应用数学和应用力学的领域。

广义的边界积分方程法的研究与有限单元法的研究大致是同时期进行的。由于前者要处理边界上的奇异积分问题,这是相当困难的,且不能得到好的数值精度,只有极少数人支持这一工作,而且分析对象极为有限,这是这方法发展不快的主要原因。然而有限单元法对应有应力奇异性问题(例如断裂问题)和对无限区域和半无限区域等问题也不易处理,且通常计算费用高。在美国及以英国为中心的欧洲若干研究组正对这类问题大力进行研究。边界元法(BEM)的名字就是这些研究组之一的Southampton大学土木系首先使用的。

3.2 内部法和边界法

研究图1(a)所示的2维边值问题,列出问题在区域内的基本方程(偏微分方程)和边界条件,当微分方程得不到解析解时必须采用数值方法。

令所求近似函数为

$$w(x, y; a_1, a_2, \dots, a_p)$$

式中, $a_1, a_2, \dots, a_p$ 是未知系数,为了确定这些未知系数,研究下列三种方法。即i)取在区域内满足微分方程的函数作为近似函数,据边界条件确定未知系数。ii)相反,由满足边界条件的近似函数出发,据区域内的微分方程确定未知系数。iii)介于两者中间的方法。上述三个方法分别称为边界法、

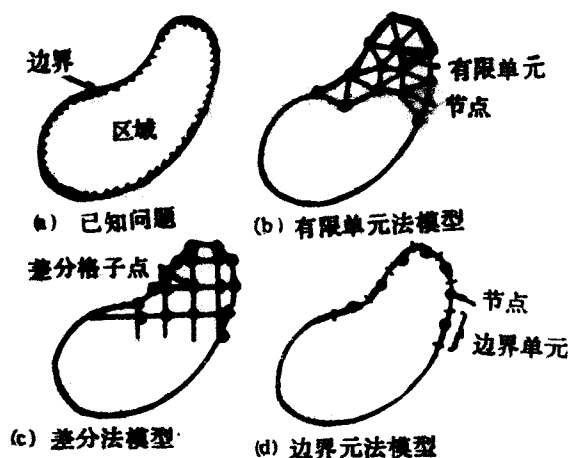


图1 边值问题的各种解法

内部法(或区域法)和混合法。

边值问题数值解的代表方法——有限单元法和差分法都属于区域法。有限单元法是将图1(b)所示问题的区域分割为有限个单元,由各个单元的方程构成整个区域的基本方程,然后求关于区域内满足边界条件的函数。它采用变分原理作为指导原理。比这更早的是差分法,它是将图1(c)区域分割为若干小格子,用有限差分近似地代替基本方程中的微分,在有限个格子上使满足差分的近似式。

相反,边界元法属于边界法。这个方法首先将基本方程变换成后面将介绍的在边界上的积分方程。与有限单元法类似,将区域边界分割成若干单元,然后求解。如图1(d)所示,二维区域的边界曲线是一维的,边界单元用直线或曲线表示;三维区域的边界是曲面(二维),可在上面划分边界单元。与有限单元法一样边界单元上的函数值可任意变化。最简单的单元是边界上函数值不变的常数单元,或按直线变化的线性单元,要更正确地表示区域的形状还可采用高次单元(二次以上)或等参单元等。

这样,由于边界单元法仅在边界上划分单元,数值计算所处理的空间至少可降低一维,于是容易推知,单元数和节点数都比有限单元法少,必需的计算信息及方程的未知

数也随着减少。将两种计算方法作为“黑箱”处理时这点表现出明显的不同，因此边界元法的费用可能降低。不管怎样，由于有限单元法和边界元法都采用离散化方法，两者处理问题的方法相同，因此它们具有同样广阔的应用范围，并且有限单元法在实用领域中所研究出的方法都可原封不动地用在边界元法中，这是后者的优点。

3.3 边界元法的原理

3.3.1 微分方程变换为积分方程

如前所述，把微分方程变换为边界积分方程的方法以及所推导的边界积分方程的形式有各种各样，这里不比较它们的优缺点而介绍工程师处理问题时常用的方法。另外在古典的偏微分方程理论中，传统方法是采用 Green 公式或广义的 Green 公式把微分方程转换为积分方程。我们采用目前应用更广的方法进行推导，这方法就是由 Brebbia^[1] 提出的、被高度评价的加权余量法。当变分原理成立时，这个方法恰好可与物理意义明确的原理，例如虚功原理相对应。

下面以定常热传导、流体、电磁等问题为例，从它们数理模型的基本方程——熟知的 Laplace 方程推导边界积分方程。即研究下面二维势能问题（图2）。

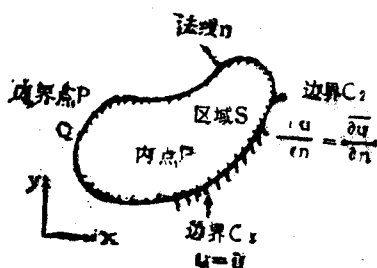


图2 二维边值问题例子

（全边界 $C = C_1 \cup C_2$ ）

区域内的基本方程为

$$\nabla^2 u = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) u = 0 \quad (S \text{ 内}) \quad (1)$$

边界条件

$$u = \bar{u} \quad (C_1 \text{ 上})$$

$$\partial u / \partial n = \bar{\partial u / \partial n} \quad (C_2 \text{ 上}) \quad (2)$$

在式（2）的边界条件中，顶上画有一横线的表示边界上指定的值； $\partial/\partial n$ 是对边界上外法线方向的导数。

在（1）、（2）式中，设 u 为近似函数，在区域内的 $\nabla^2 u$ 、在边界上的 $u - \bar{u}$ 和 $\partial u / \partial n - \bar{\partial u / \partial n}$ 表示误差，称为余量。将它们乘以任意函数 w （ w 只要连续可微需要的次数）和法线导数 $\partial w / \partial n$ ，写出下面的积分关系式：

$$\int_S (\nabla^2 u) w dS = \int_{C_1} (\bar{u} - u)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{C_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{\partial u / \partial n} \right) w ds \quad (3)$$

式中 w 称为加权函数。这个式子是以加权余量为基础的边界元法的出发点。关于将其作为根据的理由这里不拟说明。另外，在有限单元法中通常所取的函数满足 C_1 上的边界条件，因此没有式（3）右边的第一项。

$$\int_S (\nabla^2 u) w dS = - \int_{C_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) w ds \quad (4)$$

对式（3）左边作一次分部积分得

$$\int_S (\nabla^2 u) w dS = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} w ds - \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dS \quad (5)$$

又对上式右边第二项进行分部积分，得下式（所谓 Green 公式）

$$\int_S (\nabla^2 u) w dS = \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial n} w - \frac{\partial w}{\partial n} u \right) ds + \int_S u (\nabla^2 w) dS \quad (6)$$

因 C 由 C_1 和 C_2 组成，式（3）和式（6）右边相等得

$$\int_{C_1} \left(\bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} w \right) ds + \int_{C_2} \left(u \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} w \right) ds = \int_S u (\nabla^2 w) dS \quad (7)$$

比较式(7)和式(3)知作用于所求函数 u 的算子 ∇^2 在这里是作用于加权函数 w 。另外,这种变换与算子的伴随性特别是自伴随性或叫自共轭性)密切相关。关于这一点可参考有关专门论著^[11]。

关于加权函数 w 的方程式(7)与 u 在区域内的基本方程相同,即在现在情况下若取满足 $\nabla^2 w = 0$ 的适当函数,式(7)左边的边界积分为

$$\int_{C_1} \left(\bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} w \right) ds + \int_{C_2} \left(u \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} w \right) ds = 0 \quad (8)$$

取这样的加权函数导出积分方程的方法是古典的方法。如同 Laplace 方程那样,若能简单地求出这种加权函数的近似式时(因为不考虑边界条件),这方法也是有效的。但若按下列方式选择加权函数可能更具有一般性。

设 w 满足关于任意点 p, q 的下述方程式

$$\nabla^2 w(p, q) + \delta(p, q) = 0 \quad (9)$$

式中, δ 是Dirac超越函数(一般叫作Dirac- δ 函数),满足式(9)的解称基本解也称主要解、基本奇异解等)。

若将式(9)代入式(7)有

$$u(p) = \int_C \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(Q) w(p, Q) - u(Q) \frac{\partial w}{\partial n}(p, Q) \right\} ds \quad (p \in S, Q \in C) \quad (10)$$

这式的右边只有边界积分,它表示根据边界积分给出的区域内任意点 p 的势能值,这是古典势能理论和数学物理中熟知的问题。在古典的偏微分方程理论中,把满足式(9)

和已知边界条件的函数定义为Green函数。当不能有效地解偏微分方程时,利用数值方法是有效手段。

式(10)把区域内 p 点对应的 u 值和边界积分连系起来。若点 p 趋近于边界上的点 P 则右边的边界积分成为奇异积分。若将它作为Cauchy主值确定,则对于光滑边界上的点有下式

$$\frac{1}{2} u(P) = \int_C \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(Q) w(P, Q) - u(Q) \frac{\partial w}{\partial n}(P, Q) \right\} ds \quad (P, Q \in C) \quad (11)$$

式(11)只是表示 $u, \partial u / \partial n$ 和加权函数 w 在边界上的关系,这就是把此式称作边界积分方程的原因。特别地,式(11)叫Somigliana型公式。另外,虽然由其他加权函数推出的式(8)同样也只是边界积分方程,但因为该式未与内部点的值相联系,因此式(10)、(11)更有效。

在以后所示的方法中,按预先指定的边界条件解边界上的未知值 u 和 $\partial u / \partial n$,边界上的 u 和 $\partial u / \partial n$ 被全部确定后,则可以用式(10)计算区域内部点 $u(p)$ 。在有限元法中,要确定区域各单元节点的值,但通常这不是完全必要的,与此相反,边界元法可只确定所需要的内部点值,这是两者显著的差别。

3.3.2 基本解

在叙述求解式(10)、(11)的方法之前,补充说明前节中所采用的加权函数。定义函数 w 为式(9)的解。从物理观点看,具有如下意义。若将式(1)看成定常热传导的基本方程式,则当无限大物体上一点 p 有单位热源时,式(9)的解相当于区域内 q 点的温度(或 p, q 相反也成立)。因此 w 表示为 p, q 两点状态的函数,具有所谓影响函数的意义。

一般地式(9)的解不能用简单计算求得(例如文献[11]所示那样,用Fourier积分来求)。

然而,如前所述,在用Green函数解偏微分方程的古典方法中,必须求出这个Green函数。因为定义Green函数为满足边界条件的函数,因此求解不考虑边界条件的式(9)的方法是方便的。另外,求基本解时可参考求解已知Green函数的程序。

对于现在所研究的Laplace方程的问题,已经求得其基本解如下:

$$\text{二维情况: } w(p, q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \quad (12)$$

$$\text{三维情况: } w(p, q) = \frac{1}{4\pi r} \quad (13)$$

式中 r 表示 p 和 q 的距离

$$r = \overline{pq} \quad (14)$$

通过此例可知,因为基本解为 $1/r$, $\log(1/r)$, 当 $r \rightarrow 0$ 时,表示出奇异性,因此知道式(11)的积分是奇异积分。

基本解具有奇异性,因此不能简单地按解析方法求得一般微分方程的基本解,这是用边界元不方便之处。不过,工程师碰到的问题通常是Laplace方程、Helmholtz方程、重调和方程、Navier、Navier-Stokes方程、Fourier方程等,种类还不算多。现在正详细地研究这些方程,寻求有效的数值解法。幸好,关于这些方程的基本解已经求得,因此,利用它们将边界积分公式化的作法与加权余量表示式一起大致可以作为常规方法。其详细内容可见微分方程教科书或文献[2]、[11]等(注意,按不同情况有时也定义基本解为 $\nabla^2 w(p, q) = \delta(p, q)$,在利用文献结果时必须留意)。

3.3.3 离散化数值解法

关于积分方程的数值解法,过去,系统的研究不多,因此将区域积分变换为边界积分使空间维数降低一维的优点就不能有效利用,对于奇异积分,这种倾向特别显著。这就是尽管有限单元法与边界元法虽同时开始研究,而后者应用甚少的原因。但最近积分方程的数值解法进步极快。

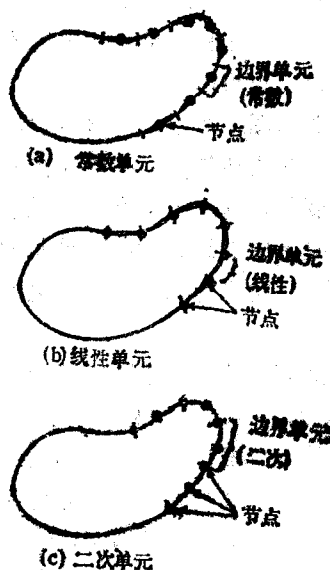


图3 二维区域的边界元

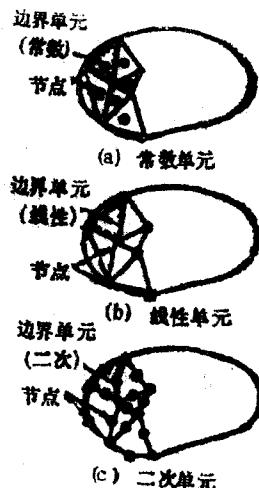


图4 三维区域的边界元

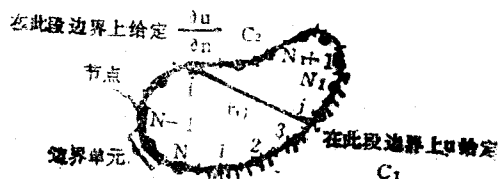


图5 边界元法解法说明

以下介绍在有限单元法中使用的单元分割的计算方法,在有限单元法中得到成功应用的这个方法也可以用于边界元法。

如图3和图4所示,将区域边界分为有限个单元,称为边界元。边界元内的函数值可以任意变化,这一点与有限单元法是相同的。图3是考虑二维区域的边界元的例子,图4则是以三角形为基础的三维区域的边界元的例子。

对于最简单的常数单元的情况,这里介绍2维问题的式(11)的数值解法。如图5所示,将边界划分成单元,注上编号($i=1, 2, \dots, N$),由于考虑的是常数单元,取单元中点作为代表单元位置的点(节点)。

采用式(12)作为加权函数,对第 i 个单元的节点写出离散化的(11)式,有

$$u_i = \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_j \int_{C_j} \log \frac{1}{r_{ij}} ds - u_j \int_{C_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\log \frac{1}{r_{ij}} \right) ds \right] \right\} \quad (15)$$

式中, u_j 、 $(\partial u / \partial n)_j$ 表示在节点 j 处的值, $\int_{C_j} ds$ 表示在单元 j 处的积分, 又 r_{ij} 如图所示是节点 i 和元素 j 上任意点的距离, 把 u_j 、 $(\partial u / \partial n)_j$ 提出积分号外是因为假定它们在单元上为常值, 又式(15)在元素 j 上的积分值和节点 j 有关, 若设它们相应等于

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{C_j} \log \frac{1}{r_{ij}} ds &= L_{ij} \\ \frac{1}{\pi} \int_{C_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\log \frac{1}{r_{ij}} \right) ds &= M_{ij} \end{aligned} \quad (16)$$

则

$$u_i = \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_j L_{ij} - u_j M_{ij} \right] \quad (17)$$

通常式(16)的计算用数值积分进行。若对各节点 $i=1, 2, \dots, N$ 写出(17)式, 则得到 N 个式子。由于在 C_1 上规定了 N_1 个 u , 在 C_2 上规定了 N_2 ($N_2 = N - N_1$) 个 $\partial u / \partial n$, 所以在 C_1 上有 N_1 个未知量 $\partial u / \partial n$, 在 C_2 上有 N_2 个未知量 u 。将式(17)的未知数移到左边, 把未知

数的列向量写成

$$x = [(\partial u / \partial n)_1, (\partial u / \partial n)_2, \dots, (\partial u / \partial n)_{N_1}, u_{N_1+1}, \dots, u_N]^T$$

把系数矩阵写成 A , 已知数的列向量写成 F , 可得如下形式的矩阵方程

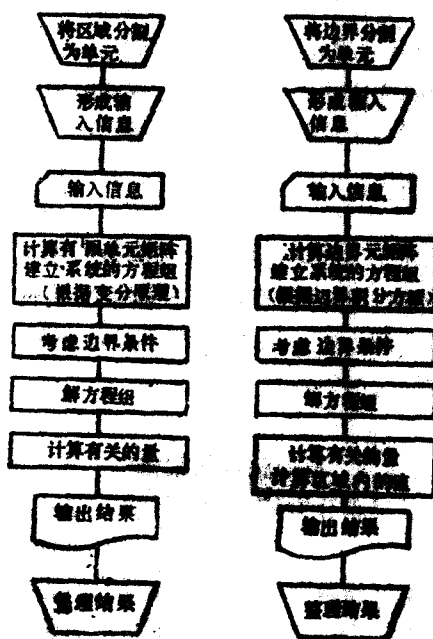
$$Ax = F \quad (18)$$

式(18)构成关于未知数的一次联立方程组, 解这些方程可得问题的解。

若求得边界上全部的 u_j 、 $(\partial u / \partial n)_j$, 则因同样可将式(10)变换成离散式, 于是就能确定区域内部的 u 值。

至于按更高次单元解式(11)的方法, 可利用单元内部座标和整体坐标的关系和单元内的内部函数, 与有限单元法完全相同地进行, 因此完成边界积分的公式推导后, 可以采用与有限单元法完全相同的离散化方法处理。

以上是边界元法原理与分析方法的概要, 与有限单元法比较, 边界元法的处理步骤和优点表示于表1和图6中。



(a)有限元法 (b)边界元法

图6 分析流程图的比较

表 1 有限单元法和边界元法的比较

	有限单元法	边界元法
基本原理, 公式	变分原理等	边界积分方程等*
单元分割	将全部区域分割成单元	只分割边界为单元
单元数	多	少
输入信息	多	少
计算时间	长	短
适用范围	广	稍窄
矩阵	对称, 带状	不对称, 不稀疏
其它		• 容易处理无限区域、奇异应力问题 • 求基本解困难 • 靠近边界的点往往精度较低

* 因为随单元的次數和分割方法而变化, 只表示一般的趋向。

参 考 文 献

1. C. A. Brebbia; The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, (1978).
2. C. A. Brebbia and S. Walker; Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, (1980).
3. P. K. Banerjee and R. Butterfield; Boundary Element Methods in Engi-

neering Science, Mc Graw Hill, (1981)

4. T. A. Cruse and F. J. Rizzo(eds); Proc. ASME Conf. Boundary Integral Methods, AMD-11, ASME(1975).
5. C. A. Brebbia(ed); Recent Advances in Boundary Element Methods, Pentech Press(1978).
6. P. K. Banerjee and R. Butterfield (eds); Developments in Boundary Element Methods-1, Applied Science Pub.(1979).
7. N. I. Muskhelishvili; Some Basic Problems of the Theory of Elasticity, Noordhoff(1953).
8. M. A. Jaswon and G. T. Symm; Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic Press(1977).
9. V. D. Kupradze; Potential Methods in the Theory of Elasticity, Israel Prog. for Scientific Trans (1965).
10. L. Collatz; The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer Verlag, 3rd ed.(1966).
11. 寺沢寛一編; 自然科学者のための数学概論, 応用編, 岩波書店 (1960).
(殷荫龙译自《機械の研究》, 1981, Vol. 33, №11; 本部校)

新的数值分析方法—边界元法 (2)

——在固体力学方面的应用——

神 谷 纪 生

通过以下各例,来讨论一下边界元法在固体变形与应力分析方面的应用。研究的内容首先是弹性静力学问题,以及作为其推广和应用的断裂力学问题,其次是热应力问题及薄板弯曲问题。关于循环计算的注脚符号,采用Einstein总和规则。

1. 弹性静力学问题

兹考虑无体积力作用时弹性体的应力应变问题(图1)。基本方程如下。物体内的平衡方程按照应力 σ_{ij} 写作为

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0 \quad (\text{在 } S \text{ 内}) \quad (1)$$

边界条件:在表面的 C_u 部分上有确定的位移分量 u_i 。或在表面 C_t 上有确定的表面力分量 t_i 。在确定量(已知量)的上边用一横线表示,

$$\left. \begin{array}{l} u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } C_u \text{ 上}) \\ t_i = \bar{t}_i \quad (\text{在 } C_t \text{ 上}) \end{array} \right\} \quad (2)$$

除了式(1)和式(2)之外,对于分析弹性体所必要的关系式如下

$$\text{应变一位移关系: } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$$

$$\text{弹性关系式: } \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij}$$

$$\text{Cauchy关系: } t_i = \sigma_{ij} n_j$$

(3)

这里 ε_{ij} 为应变分量, λ , G 为Lamé常数, δ_{ij} 为Kronecker- δ , n_j 为单位外法线的方向余弦。

• 14 •

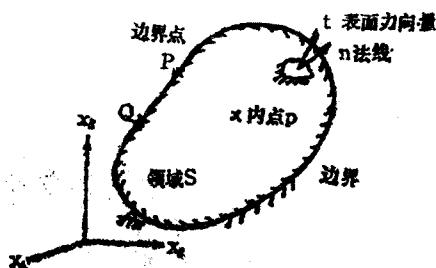


图1 符号说明

对于这一问题,从来都是根据Betti的互等定理来进行积分方程的定式化的。在这里则根据 Brebbia 所用的加权余量方法去研究^[12,1]。采用对 Laplace 方程所用的同样的方法进行分析。用加权余量法表示时如下式

$$\int_S \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i^* dS = \int_{C_u} (u_i - \bar{u}_i) t_i^* dS + \int_{C_t} (t_i - \bar{t}_i) u_i^* dS \quad (4)$$

这里权函数用 u_i^* , t_i^* 表示,根据式(3), t_i^* 为与 u_i^* 有关的量。对式(4)的左部作部分积分,得其共轭方程如下

$$\int_S \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} u_i dS = \int_{C_t} (u_i t_i^* - t_i u_i^*) dS \quad (5)$$

作为加权函数,是满足方程

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} (p, q) + \partial_i (p, q) = 0 \quad (6)$$

的解,也即为平衡方程式(1)的基本解。式(6)