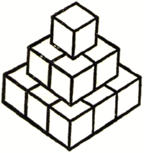
高级中学课本

代数

（甲种本）

第二册



$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

人民教育出版社

高级中学课本

（试　用）

代　数

（甲种本）

第二册

人民教育出版社数学室编

人民教育出版社出版
北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京印刷一厂印刷

开本787×1092　1/32　印张7.5　字数150 000

1984年9月第1版　1989年6月第5次印刷

ISBN 7-107-00313-5/G·516(课)　定价 0.68元

说　明

一、本书供六年制中学高中二年级选用，每周授课3课时.

二、本书内容包括：反三角函数和简单三角方程，数列与数学归纳法，不等式，行列式和线性方程组，复数. 另外有些小节的节号前标有“*”号，这些小节的内容仅供选学(共需16课时左右).

三、本书的习题共分三类：练习，习题，复习参考题.

1. 练习　主要供课堂练习用.

2. 习题　主要供课内外作业用.

3. 复习参考题　在每章之后配备A，B两组复习参考题. A组题主要供复习本章知识时使用；B组题综合性、灵活性较大，仅供学有余力的学生参考使用.

为了因材施教，使教学更有针对性和灵活性，本书配备的习题和复习参考题A组数量较多，便于教学时根据实际情况选用.

四、本书在编写过程中，曾参考了中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本(试用本)《数学》第一、三、四册的有关章节，大部分内容是以原来章节为基础编写的. 初稿编出后，曾向各省、市、自治区的教研部门、部分师范院校和中学教师征求意见，有的省、市还进行了试教，他们都提出了宝贵的意见.

五、本书由人民教育出版社数学室编写. 参加编写工作的有蔡上鹤、李琳、饶汉昌、贾云山、曾宪源、陶振宗. 全书由吕学礼校订.

目 录

第一章　反三角函数和简单三角方程

一　反三角函数

1.1　反正弦函数

我们已经学习了正弦函数 $y=\sin x$ 和它的图象(图 1-1). 从图象可以看到，对于 x 在定义域 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的每一个值，y 都在 $[-1,\ 1]$ 上有唯一的值和它对应. 例如，对于 $x=\frac{\pi}{6}$，有 $y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 和它对应. 反过来，对于 y 在 $[-1, 1]$ 上的每一个值，x 有无穷多个值和它对应. 例如，对于 $y=\frac{1}{2}$，x 有 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，…等无穷多个值和它对应. 由此可见，确定函数 $y=\sin x$ 的映射不是定义域 $(-\infty, +\infty)$ 到值域 $[-1, 1]$ 上的一一映射. 函数 $y=\sin x\,(x\in(-\infty,\ +\infty))$ 没有反函数.

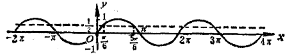


图 1-1

但由图 1-2 可以看到，在正弦函数的单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

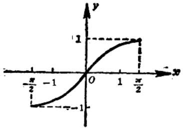


图 1-2

上，对于 x 的每一个值，$y=\sin x$ 有唯一的值和 x 对应；而对于 x 的不同的值，$y=\sin x$ 有不同的值和 x 对应，并且随着 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$，$y=\sin x$ 由 -1 增大到 $+1$，取得 $[-1,1]$ 上的一切值. 因此，确定函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的映射是区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 到 $[-1,1]$ 上的一一映射. 所以这个映射有逆映射，函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 有反函数.

函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的反函数叫做**反正弦函数**，记作 $x=\arcsin y$.

习惯上用字母 x 表示自变量，用 y 表示函数，所以反正弦函数可以写成 $y=\arcsin x$，❶它的定义域是 $[-1,1]$，它的值

---

❶ 有的书上把反正弦函数写作 $y=\sin^{-1}x$. 同样，后面讲到的反余弦函数、反正切函数、反余切函数也可写作 $\cos^{-1}x$, $\mathrm{tg}^{-1}x$, $\mathrm{ctg}^{-1}x$.

域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

这样，对于属于$[-1,1]$的每一个x值，$\arcsin x$就表示属于$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的唯一确定的一个值，它的正弦正好等于已知的$x$. 也可以说，$\arcsin x$表示属于$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的唯一确定的一个角（弧度数），这个角的正弦恰好等于x. 例如，对于$x=\frac{1}{2}$, $y=\arcsin\frac{1}{2}$就表示$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上使$\sin y=\frac{1}{2}$的唯一确定的一个角，这个角是$\frac{\pi}{6}$，因为根据正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的单调性可以知道，在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，除了$\frac{\pi}{6}$以外，其他任何角的正弦都不等于$\frac{1}{2}$.

由此可以得到

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

一般地，根据反正弦函数的定义，可以得到

$$\boldsymbol{\sin(\arcsin x)=x,}$$

其中 $\boldsymbol{x\in[-1,1],\ \arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$.

下面我们来研究反正弦函数的图象和性质.

根据互为反函数的图象的性质，容易知道，反正弦函数$y=\arcsin x$的图象就是与正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的一段图象关于直线$y=x$对称的图形(图 1-3).

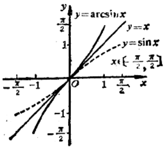


图 1-3

从图象上可以看出，反正弦函数 $y=\arcsin x$ 有以下性质：

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

(2) 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的图象关于原点对称，这说明它是奇函数. 也就是

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,\ x\in[-1,1].$$

例 1 求下列反正弦函数值：

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$;　　　(2) $\arcsin 0.2672$;

(3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;　　　(4) $\arcsin(-1)$.

解: (1)因为在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

注意：虽然 $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，但是，$\frac{3\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\neq\frac{3\pi}{4}$. 同理，$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ 也不等于其他值$\left(\text{如}\frac{9\pi}{4},\right.$
$\left.-\frac{7\pi}{4}\text{等}\right)$，只能等于$\frac{\pi}{4}$.

(2) 查正弦函数表，得$\sin 15°30'=0.2672$. 又因为$15°30'$的弧度数属于 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以

$$\arcsin 0.2672=15°30'.$$

(3) 因为在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

(4) 因为在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$，所以

$$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

例 2 求下列各式的值：

(1) $\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$;　　　(2) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

解：(1) ∵ $x=\frac{2}{3}\in[-1,1]$,

∴ $$\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

(2) ∵ $x=-\frac{1}{2}\in[-1,1]$,

∴ $$\sin\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

例 3 求下列各式的值：

(1) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;　　(2) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

(3) $\cos(\arcsin x)$, $x\in[-1, 1]$;　(4) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

解: (1) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

(2) 设 $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha$, 则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

由 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 得 $\cos\alpha\geqslant 0$, 可知

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5},$$

$$\therefore\quad \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}.$$

(3) 设 $\arcsin x=\alpha$, 则 $\sin\alpha=x$, 且 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$,

$\therefore\quad \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

或: 由 $x\in[-1, 1]$, 得 $\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 可知

$$\cos(\arcsin x)\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2}=\sqrt{1-x^2}.$$

(4) 利用倍角公式及本例题第(3)题的结果, 可知

$$\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)=2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=2\times\frac{3}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}.$$

例 4 求下列各式的值:

(1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$;　　(2) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

解: (1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

由例 4 第(2)题可以看出, 虽然 $\sin(\arcsin x)=x$, 其中 $x\in[-1,1]$, 但是 $\arcsin(\sin x)$不一定等于 x, 而是等于在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上与 x 有相同正弦的一个值.

练 习

1. 用反正弦的形式把下列各式中的 $x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$表示出来:

(1) $\sin x=\frac{2}{5}$;　　(2) $\sin x=-\frac{1}{3}$;

(3) $\sin x=0.3147$;　　(4) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. (1) $\arcsin\sqrt{2}$有意义吗, 为什么?

(2) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}$是否成立, 为什么?

3. 写出下列函数的定义域、值域:

(1) $y=\arcsin 2x$;　　(2) $y=\frac{1}{2}\arcsin x$;

(3) $y=3\arcsin\frac{2}{3}x$;　　　　(4) $y=2\arcsin(1-x)$.

4. 求下列反正弦函数值:

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;　　　　(2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(3) $\arcsin 0.6959$;　　　　(4) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$.

5. 求下列各式的值:

(1) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$;　　　　(2) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$.

6. 求下列各式的值:

(1) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;　　　　(2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

(3) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$, $x\in(-1, 1)$;

(4) $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

7. 求下列各式的值:

(1) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

(2) $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.

1.2 反余弦函数

从余弦函数的图象（图 1-4）同样可以看到，余弦函数 $y=\cos x$ （$x\in(-\infty, +\infty)$）不存在反函数. 但在单调区间 $[0, \pi]$上，对于不同的 x 值，y 有不同的值和它对应，并且随着 x 由 0 增大到 π，y 由 1 减小到 -1，取得值域$[-1, 1]$上

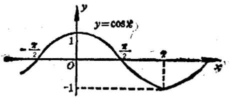


图 1-4

的一切值. 因此, 函数 $y=\cos x(x\in[0,\pi])$ 有反函数.

函数 $y=\cos x(x\in[0,\pi])$ 的反函数叫做**反余弦函数**, 记作 $y=\arccos x$, 它的定义域是 $[-1,1]$, 值域是 $[0,\pi]$.

这样, 对于属于 $[-1,1]$ 的每一个 x 值, $\arccos x$ 就表示属于 $[0,\pi]$ 的唯一确定的一个值, 它的余弦正好等于已知的 x. 也可以说, $\arccos x$ 表示属于 $[0,\pi]$ 的唯一确定的一个角(弧度数), 这个角的余弦恰好等于 x. 例如, 对于 $x=\frac{1}{2}$, $y=\arccos\frac{1}{2}$ 就表示 $[0,\pi]$ 上使 $\cos y=\frac{1}{2}$ 的唯一确定的一个角, 这个角是 $\frac{\pi}{3}$, 因为根据余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调性可以知道, 在 $[0,\pi]$ 上, 除了 $\frac{\pi}{3}$ 外, 其他任何角的余弦都不等于 $\frac{1}{2}$.

由此可以得到

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

一般地, 根据反余弦函数的定义, 可以得到

$$\cos(\arccos x)=x,$$

其中 $x\in[-1,1]$, $\arccos x\in[0,\pi]$.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的图象如图 1-5 所示，它是与余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的一段图象关于直线 $y=x$ 对称的图形.

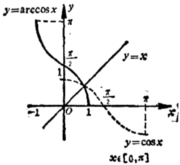


图 1-5

从图象上可以看出：**反余弦函数 $y=\arccos x$ 在区间$[-1,1]$上是减函数. 它既不是偶函数，也不是奇函数.**

下面我们来证明：**对于任意 $x\in[-1,1]$，有**

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

证明：由 $-1\leqslant x\leqslant 1$，得 $1\geqslant -x\geqslant -1$，即 $-x$ 属于反余弦函数的定义域$[-1,1]$.

根据诱导公式与反余弦函数的定义，得

$$\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x,$$

因此，$\pi-\arccos x$ 是余弦等于 $-x$ 的一个值.

又因 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，所以 $0\geqslant-\arccos x\geqslant-\pi$，由此可得 $\pi\geqslant\pi-\arccos x\geqslant 0$，即 $\pi-\arccos x\in[0,\pi]$.

因此，$\pi-\arccos x$ 是属于$[0,\pi]$且它的余弦等于 $-x$ 的一个值. 于是

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

例1 求下列各式的值:

(1) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(3) $\cos\left[\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$; (4) $\arccos\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

解: (1) 因为在$[0,\pi]$上, $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

(2) 因为在$[0,\pi]$上, $\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

或: $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

(3) $\because$ $\quad -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\in[-1,1]$,

$\therefore$ $\quad \cos\left[\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

(4) $\arccos\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}\right)=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}$.

例2 求下列各式的值:

(1) $\sin\left[\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right]$;

(2) $\operatorname{tg}(\arccos x)$, $x\in[-1,1]$, 且 $x\neq0$;

(3) $\cos\left[\arccos\dfrac{4}{5}+\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)\right]$.

解: (1) 设$\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\alpha$，则$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

由$\alpha\in[0,\pi]$，得 $\sin\alpha\geqslant 0$，可知

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

$$\therefore\qquad \sin\left[\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]=\frac{3}{5}.$$

(2) 由 $\arccos x\in[0,\pi]$，知 $\sin(\arccos x)\geqslant 0$.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-[\cos(\arccos x)]^2}}{\cos(\arccos x)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

(3) 设$\arccos\frac{4}{5}=\alpha$，则$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha$是第一象限的角，

$$\therefore\qquad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}.$$

又设$\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)=\beta$，则$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta$ 是第二象限的角，

$$\therefore\qquad \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{12}{13}.$$

代入原式，得

$$\cos\left[\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$$

$$=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{56}{65}.$$

练 习

1. 用反余弦的形式把下列各式中的 x($x\in[0, \pi]$)表示出来:

(1) $\cos x=\frac{2}{3}$;　　(2) $\cos x=-\frac{1}{5}$;

(3) $\cos x=0.8065$;　　(4) $\cos x=a$　($a\in[-1,1]$).

2. (1) $\arccos 1.2$ 有意义吗,为什么?

(2) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$是否成立,为什么?

3. 写出下列函数的定义域、值域:

(1) $y=\arccos 3x$;　　(2) $y=-5\arccos x$;

(3) $y=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{4}$;　(4) $y=3\arccos(2-3x)$.

4. 求下列反余弦函数值:

(1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;　　(2) $\arccos 0$;

(3) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$;　　(4) $\arccos 0.0471$.

5. 求下列各式的值:

(1) $\cos(\arccos 0.8795)$;　　(2) $\arccos(\cos 0.8795)$;

(3) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$;　　(4) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$.

6. 求下列各式的值:

(1) $\sin\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$;　　(2) $\cos\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$;

(3) $\sin\left[\frac{\pi}{3}+\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$;