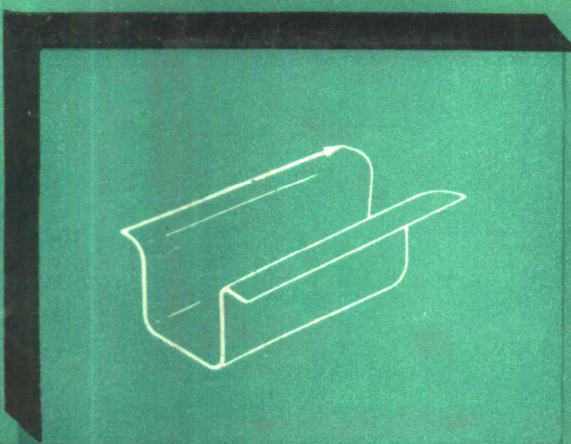
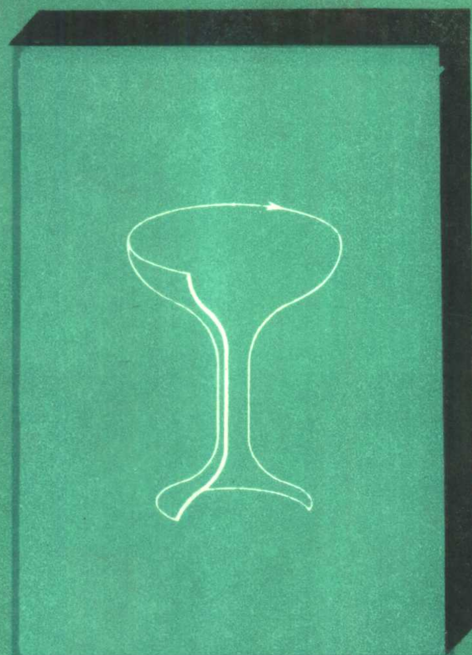
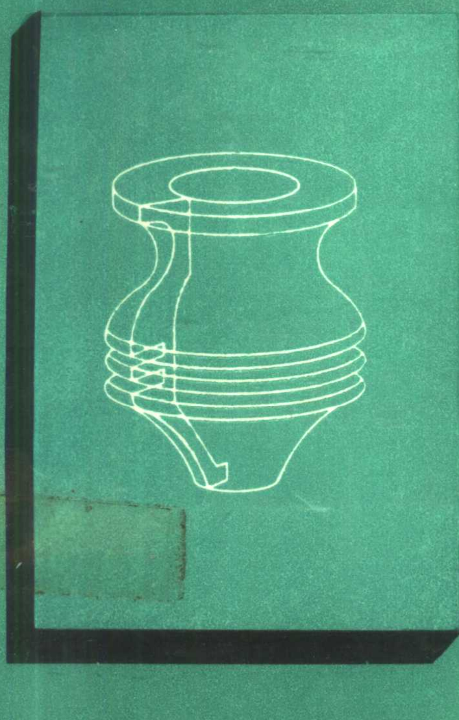
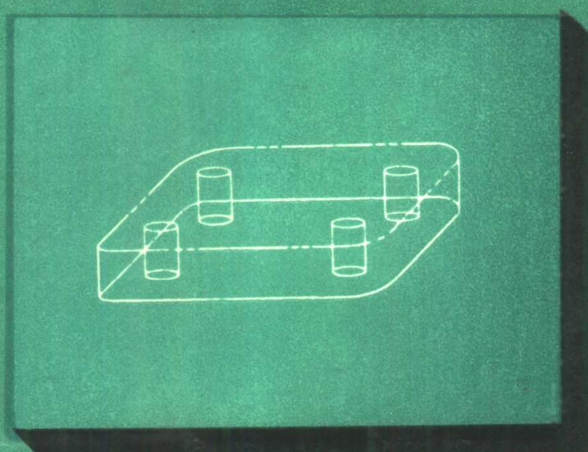
几何造型学

〔美〕M.E.摩滕森　著









机械工业出版社

几何造型学

〔美〕 M.E.摩滕森 著
莫重玉 阮培文 丁熙元 译
唐荣锡 朱心雄 校

机械工业出版社

(京)新登字054号

本书共分14章。前8章论述几何造型的数学基础，其中包括矢量算法、拓扑和集合论，以及立体参数空间、相交、变换等详细地叙述了计算几何中描述曲线、曲面的理论和方法。第9、10、11章论述实体造型原理，布尔模型与图法模型，并介绍了当代几何造型的各种方法，如构造实体几何法、边界法与扫描法等。第12、13章介绍几何造型在计算机图形学、CAD/CAM中的应用。最后一章综述几何造型领域的前沿问题。

本书论述透彻，层次清晰，几何直观性强，每一章节都均附习题，习题中要求编写的程序大都有实用意义。

本书可以作为工科、计算机学科、应用数学专业的研究生和高年级大学生的教科书，也可供从事CAD/CAM、计算机图形学、计算机艺术、动画制作、模拟、机器人技术等专业人员参考。

GEOMETRIC MODELING

Michael E. Mortenson

John wiley & Sons, Inc.

1985

• • •

几 何 造 型 学

〔美〕M. E. 摩滕森 著

莫重玉 阮培文 丁熙元 译

唐荣锡 朱心雄 校

•

责任编辑：刘小慧 责任校对：宁秀娥

封面设计：肖 晴 版式设计：霍永明

责任印制：卢子祥

•

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

•

开本 787×1092 1/16・印张33 1/4・字数 817 千字

1992年7月北京第1版・1992年7月北京第1次印刷

印数00,001—1500・定价：26.00元

•

ISBN 7-111-02906-2/TB・138

译　序

近二十多年来，在一些发达的工业国家，某些技术部门特别是航空航天、汽车工业及其它新技术领域，CAD与CAM技术取得了引人注目的成就。美国M·E·摩滕森教授所著几何造型学就是在这一基础上发展起来的。它主要研究物体形状的描述以及模拟动态过程，建立的模型则用来分析物体形态，或在设计与制造部门之间传递信息。这本几何造型学着重论述几何造型的现代数学理论与原理，并概括当代几何造型的主要方法。

当前，我国以发展国民经济为中心，坚持改革开放政策，新技术的引进与发展，将从重要的工业部门走向广大民用工业，在此背景下，本书对于新技术的研制与开发，特别是对于从事CAD、CAM、计算机图形学、机器人技术以及计算机艺术的人们，无疑具有很好的参考价值，因此，我们将此中译本呈献给读者。

本书取材先进，内容丰富，叙述层次分明，详细透彻，语言生动，突出了几何直观效果；每一节后面的练习编排得很好，开始是检查概念，接着是要求掌握基本理论，并且联系具体问题编写程序，这些程序有实际使用价值。

本书由北京轻工业学院莫重玉、阮培文、丁熙元翻译。

其中，序言、第五章、第六章、第七章、第八章、第十一章、附录C、附录D、附录F由莫重玉翻译；

第一章、第二章、第三章、第四章、第九章、附录E、练习选答由阮培文翻译；

第十章、第十二章、第十三章、第十四章、附录A、附录B由丁熙元翻译。

原著中一些疏忽之处已在翻译过程中作了订正。

本书承蒙北京航空航天大学唐荣锡教授审校试译稿，朱心雄教授作了仔细的全面审校，并提出许多宝贵意见；北京农业工程大学李世铨教授，中国工程图学学会理事长、北京航空航天大学陈剑南教授，北京大学数学系陈维桓教授对本书出版给予了热情关心与积极支持，译者在此表示衷心感谢。

限于译者水平，书中难免会有欠妥甚至错误之处，敬请读者批评指正。

译者　　1989.7

序　言

几何造型学是描述物体形状或模拟动态过程的技术性学科。现代几何造型的许多功能在于形状的综合处理技术，使我们易于将复杂的物体描述成简单形状的组合。几何造型所提供的描述方法或模型是解析的、数学的、抽象的而不是具体的。我们所以要建立模型，是因为它可以方便而又经济地代替实物及实际过程。分析模型往往比对实物进行检查、测量或实验更容易而且更实际。除了分析的优点外，模型也用来传送信息，例如在工业中可以用模型在工程设计与制造之间传送设计信息。

几何造型学汇集并应用解析几何学、向量算法、拓扑学、集合论以及其他一些计算方法。这种数学工具和模型潜在复杂性的结合，要求计算机的计算能力比较强。虽然计算机本身有其特殊的要求与作用，它在我们的研究中并不经常出现，但是在背后，它总是我们的“几何原动力（Geometry engine）”。此外，几何造型常常与所谓实体造型相联系，这是因为实体造型更加适用于任何维数的各种形状和造型功能。

几何造型的重要性正在各个领域迅速地增长，在计算机辅助设计与计算机辅助制造(C-AD/CAM）系统、计算机图形学、计算机艺术、动画、模拟、计算机视觉以及机器人技术中，它是主要的组成部分。上述任何一个领域中的技术进步都取决于我们如何很好地创造出有效的几何模型。

有些时候我们必须建立已有事物的实在几何模型，有时我们却要建立只在想象中的事物的几何模型，这如同设计与艺术一样。无论哪种情况下，都越来越多地要求我们有“做”更加简易与精巧的几何模型的能力。

这本**几何造型学**叙述了几何造型的性质、发展以及基本概念的应用。本书是为工科、计算机学科以及应用数学专业的研究生和高年级大学生而写的，同时也适合在这些领域或有关领域从事实际工作的人员使用。读者应当熟悉基础微积分、解析几何、矢量与矩阵运算方法，因为本书中只是简单地引用这些数学领域的某些结论，强调某些重要的计算特点，而未作证明。

几何造型的发展史是工程界与大学之间不断合作的历史，因此，本书的材料来自这两个方面。书中大多数材料是由许多论文作者提出并加以改进的。我们参考了最重要的论文，并附有完整的文献目录。最后不应忘记在这个领域的很多无名工作者，他们的很有价值的贡献已由第二手与第三手变为几何造型技术的基础部分。

几何造型学包括三个部分：参数几何学，实体造型与应用。其中前八章叙述曲线、曲面和立体的参数几何学原理。并且说明怎样用特有的公式简便地计算几何性质。第九至第十一章探讨实体模型的构造原理，并以不同观点作了分析。第十二，十三章讨论几何造型在三个重要领域即计算机图形学，CAD与CAM中的应用。最后一章综述了几何造型的前沿问题。

五十年前，David Hilbert就已看到在任何科学研究中，存在两种趋向：

一方面的趋向是对事物进行抽象，力图从研究过的杂乱无章的材料中概括出逻辑关系，使之具有系统性与条理性。

另一方面的趋向则是进行直观了解，以促进对研究对象的直接理解，在它们之间建立有效的联系，因此可以说这种趋向强调它们关系之间的具体含义。

这本几何造型学力图将几何造型的各种解析方法具体化、一致化，同时与这些解析方法建立直观的联系。在所有数学分支中，几何学最能满足直观性要求。我们已试图选择适当的应用例子，练习和大量插图来加强这种直观效果。所有这些内容都是本书的组成部分。

书中有两类练习。第一类练习是检查读者对于概念的理解程度及其熟练程度，这些练习的部分答案附在本书后面。第二类练习则要求研究并编写程序。在教师的选定下，按其复杂程度与可应用性，这些程序可以编写成从一般算法框图直到准备运行的子程序，子程序的语言要合适。若采用第二类练习编写所建议的子程序，则在读完全书之后，积累起来的一套子程序便形成几何造型程序的核心。由于本书不讨论数据库设计、显示生成或交互设计过程，因此，"局部地"给出这些"细节"也是必要的。读者或许猜到，第二类练习未给出答案，建议读者作完全部练习，不管它是否指定要作。这些题目将使你尝试解决在实际造型时会遇到的问题。

应该注意到，在练习中要求编写的以及本书中所引用的许多程序都是高度专门化的，通常要求对于几类特殊曲线与曲面（参数曲线与曲面，Bezier曲线与曲面，B样条曲线与曲面等）作分析。一种高级的通用造型系统并不需要这么多的专门化程序，但它多半包括参数化的求值程序来计算特殊的点、切线等。然后将数据传送到通用目的程序，以便计算局部的和整体性质、交线、显示数据等。因此对于每一解析要求，能导出一种单独的计算方法，这种方法与任何几何元素的特殊性质无关。

在练习中着重强调了一些特殊程序，借以提高其教学价值，使学生在掌握较为大量而重要的大规模造型系统的计算能力与系统结构的思考方法之前，能够比较深刻地理解几何造型的基础概念。

人们应该知道现实世界中出现的几何造型方面的成就，故在附录A、B和C中介绍了当前流行的造型系统，它们都是结合硬件与软件功能获得成功的各种造型方法的代表性实例。附录D说明Reeve开创的质点系造型工作，这是一种新的对复杂的物理现象如火、天空的云及草的造型方法。

最后应该提醒读者，一个物体的模型或一种过程的模拟并不等于物体或过程本身。当我们探求有关模型问题，分析它以便更好地了解或推断它所表达的形态时，必须记住，答案与结果只是关于模型的。当且仅当模型或过程非常接近于物体或过程时，我们才可能以模型的形态可靠地推断物体或过程的形态。表达方法的准确性本身是一种艺术与科学，这在其他教科书中足可以列为一个独立的研究课题。

M·E·摩滕森

1985年3月

目　录

译序
序言
第一章　引论……1
§1　什么是几何造型……1
§2　发展历史……3
§3　所用的数学方法……5
§4　命名的和未命名的几何形状……13
§5　显式方程和隐式方程……14
§6　内蕴方程……15
§7　参数方程……16
§8　坐标系……20
§9　记号及总的约定……20
第二章　曲线……22
§1　曲线的代数形式和几何形式……24
§2　切矢……28
§3　曲线的参数空间……33
§4　混合函数……35
§5　重新参数化……39
§6　截取、延伸和分割……41
§7　空间曲线……42
§8　四点形式……44
§9　图形作法与说明……47
§10　直线……52
§11　二次曲线……58
§12　组合曲线……66
§13　样条曲线……70
§14　Bezier曲线……81
§15　B样条曲线……88
§16　有理多项式……102
§17　退化曲线和病态条件……104
第三章　曲面……106
§1　曲面的代数形式和几何形式……109
§2　切矢和扭矢……116
§3　法矢……118
§4　曲面的参数空间……120
§5　混合函数……122
§6　曲面片的重新参数化……123
§7　分割……126
§8　十六点形式……128
§9　四曲线形式……130
§10　平面……131
§11　柱面……133
§12　直纹面……135
§13　旋转曲面……138
§14　球面……141
§15　二次曲面……142
§16　组合曲面……143
§17　Bezier曲面……151
§18　B样条曲面……154
§19　退化曲面和病态条件……160
§20　曲面上的曲线……161
§21　具有不规则边界的曲面……164
第四章　立体……168
§1　代数形式和几何形式……169
§2　切矢和扭矢……176
§3　立体的参数空间……177
§4　连续性和组合立体……178
§5　立体中的曲面和曲线……179
§6　具有不规则边界的立体……182
§7　推广的记法格式和高维元素……183
§8　元素构造……185
第五章　解析性质……188
§1　曲线的内在性质……188
§2　曲面的内在性质……197
§3　特征检验……204
§4　点的正解与反解法……205
§5　整体性质……210
第六章　相关性质……214
§1　两点之间的最小距离……214
§2　点与曲线之间的最小距离……215
§3　点与曲面之间的最小距离……217
§4　两条曲线之间的最小距离……219
§5　曲线与曲面之间的最小距离……220
§6　两个曲面间的最小距离……221
§7　最近邻域的空间搜索……222
第七章　相交问题……224

§1 与直线的交点 …… 224
§2 平面的交线 …… 227
§3 曲线的交点 …… 230
§4 曲面的交线 …… 232
第八章 变换 …… 240
§1 平移变换 …… 240
§2 旋转变换 …… 241
§3 比例变换 …… 247
§4 对称与反射 …… 250
§5 齐次变换 …… 254
§6 坐标系与非线性变换 …… 256
第九章 实体造型基础 …… 258
§1 闭路径的拓扑 …… 259
§2 分片平坦曲面 …… 266
§3 闭曲面的拓扑 …… 273
§4 广义的边界概念 …… 274
§5 集合论 …… 275
§6 布尔算子 …… 279
§7 集合关系分类 …… 285
§8 欧拉算子 …… 290
§9 正式的造型准则 …… 295
第十章 实体模型的构造 …… 298
§1 图法模型 …… 298
§2 布尔模型 …… 303
§3 例图法和参数化形状表示法 …… 309
§4 单元分解法和空间占有计数法 …… 312
§5 扫描表示法 …… 315
§6 构造实体几何法 …… 319
§7 边界表示法 …… 325
§8 线框系统 …… 330
§9 简介两个实体造型系统 …… 332
第十一章 实体模型的整体性质 …… 337
§1 从属表示法 …… 337
§2 Timmer-Stern法 …… 339
§3 点分类的空间计数法 …… 343
§4 体元分类的块式分解法 …… 344
第十二章 计算机图形学 …… 346
§1 显示环境 …… 348
§2 投影 …… 349
§3 景物变换 …… 363
§4 轮廓线 …… 369
§5 隐藏面 …… 372
§6 真实感 …… 378
第十三章 计算机辅助设计与制造 …… 381
§1 设计 …… 382
§2 机械零件 …… 398
§3 干涉检查 …… 402
§4 机构 …… 404
§5 刀具路径几何 …… 404
第十四章 几何造型展望 …… 407
附录A CADD系统 …… 410
附录B GMSOLID系统 …… 448
附录C ROMULUS系统 …… 461
附录D 质点系 …… 469
附录E 重要公式汇编 …… 481
附录F 几何造型学程序一览表 …… 487
本书参考文献 …… 490
练习选答 …… 507

第一章　引　　论

§1　什么是几何造型

几何造型（geometric modeling）这个术语首先是在70年代初期，随着计算机图形显示、计算机辅助设计和制造技术的迅速发展开始使用的。它被看作是确定物体形状和其它几何特征的方法的总称。几何造型包括通常称为计算几何（computational geometry）的领域，并且从这个领域推广到更新的实体造型领域，它是几何学与计算机更完美的结合。

当我们构造某个东西的模型时，便构造了它的一个替身，即它的表示。我们把它整理成更加简便的形式，使得其使用和分析变得更容易。如果模型是好的，它将会以原物体完全相同的方式回答我们的质疑和提问。我们试图只抽象出对于我们的目标是实质性的信息，而摒弃其它信息。对于许多应用而言，一个实际物体的几何模型可能要求关于表面反射性质、纹理和颜色的完整描述。也可能只包括关于物体材料弹性性质的信息。我们能根据其用途和所经受的操作来决定模型所要求的详情。如果模型的描述细节是相当丰富的，那么我们就能够对它进行操作，所产生的结果就象完全对物体本身进行操作一样。

我们使用几何造型方法，来构造一个实际物体形状的确切数学描述或模拟某个过程。构造本身通常是一个计算机辅助的操作，把模型存贮在计算机里，并用计算机进行分析。事实上，使用计算机对于整个几何造型过程是至关重要的。没有计算的优势，我们不可能构造和分析有任何实际重要性的复杂模型。

几何造型方法是许多领域方法的综合，其中包括解析几何、画法几何、拓扑学、集合论、数值分析、矢量演算和矩阵方法等等。原先它只是这些学科松散的汇集。而现在它们已经结合成一个有完善定义的语言和逻辑的独立学科。

只要对于实际物体有满意的二维表示，我们就可以要求并且得到在拓扑方面和分析方面都是完整的三维模型。而且这些模型允许我们能够迅速自动地导出物体可能具有的任何几何性质或属性。显然，外观不是几何造型唯一关心的问题，所以我们要仔细地区分解析模型和图形演示。我们还需要数学手段，使我们能够计算模型之间的关系，例如，最佳逼近、相交、遮蔽等等。在许多场合，我们对于表示任意形状的信息感兴趣——这种形状没有特别的名称，其特征也不是完全确定的。用于几何造型方案的各种技术正在竭其所能地扩展其功能。

下面说明几何造型的三个不同的方面：

（1）**表示**（representation）：一个物体的实际形状是给定的，并认为是不变的，算出数学上的近似表达式。

（2）**设计**（design）：我们需要创立一个新的形状，以满足某些功能上或美学上的要求。调整确定形状的变量直到实现既定的目标。

（3）**图形表示**（rendering）：为了直观上的解释，通常需要模型的一个图象。

以上三个方面自然是密切相关的；例如，当我们建立一个新产品的几何模型时，模型首先代表一个实际上并不存在的物体。该模型必须适用于进行分析和评估。在选中一个特定的设计之后，能够用它的几何模型来指导该物体的制造。在产品完成之后，模型最终表示了一个现存物体的实际形状。在这个过程的任何一步，几何模型演示了物体的视觉图象，它为工程图和计算机图形显示提供信息。

计算机图形学、计算机辅助设计（CAD）和计算机辅助制造（CAM）已经成为几何造型方法迅速发展的驱动力。自然，正是在这些领域内，我们能最有效地应用几何造型。机器人学，计算机视觉和人工智能也对几何造型能力提出了越来越高的要求。现在让我们回顾一下这些传统的应用。

计算机绘图系统通常为三维物体生成逼真的具有色彩明暗度的二维图形。实体造型、多边形、以及雕塑曲面造型技术已经使这些成为可能；它们产生了纹理和半透明的外观，以及多光源效果。美术、动画、实物世界的模拟，如流行的故事片和为飞机飞行模拟器产生的场景，正对计算机科学的当代水平作出贡献。

关于更复杂的计算机辅助设计和绘图系统的工作仍在继续，最终的目标是成为实际上没有图纸的工程部门。在设计和绘图时，工程师的活动不久将变得更象是雕塑而不是绘图，使设计者能用简单实体形状的拼合来建造高度复杂的模型。

工程分析是随着实体模型法的出现正在迅速变化的另一个领域。实体造型程序可快速地构造有限元模型。它们也可使机械部件在经受各种载荷条件时，作自动的静态和动态的结构分析。我们能够用新的图示功能来显示这些载荷的效果，用图形表示分析结果能提供更清晰、更容易的解释。计算机辅助运动学分析也成为可能，因为我们能够独立地移动实体模型的各个组成部分，容易用直观方式或解析方式检验这些部件之间的间隙。现在还可以问一些常被忽略的问题，例如：是否为扳手或螺丝刀留有足够的间隙，以便接近和拧动位于有限空间内的紧固螺栓？

或许最有效的应用之一是计算机辅助制造。几何造型使得工艺过程设计以及机床刀具路径自动检验系统成为可能。由计算机数据库向工程设计者提供所要制造的零件的完整而又明确的几何模型。制造部门的计算机则会解释这些模型，并且为计算机化和机器人化的车间和装配线发出生产和装配的指令。成品零件的自动检测也已成为可能，使产品质量的提高得到了保证。

几何造型系统的设计者现在为机器人和计算机视觉的应用提供他们的产品，这两个重要领域涉及并支持了人工智能系统。未来的几何造型系统将促使这三个领域的综合以便制造能在三维空间中移动，并通过视觉、触觉和其它传感信息辨认物体的智能机器人。最终，机器人将会利用人工知觉和推理能力，为其周围环境建立自己的几何模型。

几何造型系统的结构看上去象是什么样的？实际上又是什么样的？它的主要成分是几何造型软件（包括造型程序）、计算机（从主机到微型机），用户交互装置（通常是图形）、存贮模型的数据库，图形输出的显示发生器，以及一组应用程序。附录A、B、C叙述了三个目前正在使用的造型系统。

在本章以下几节，我们将简要地叙述造型的历史，复习所用的数学方法；显式方程、隐式方程和内蕴方程，参数方程和坐标系。最后，我们将列出本书和别处所使用的记号及总的约定。

练　　习

试对下列问题从"几何上"进行思考。它们不是定量的问题，不要求进行计算，在任何一本书中也找不到它们的答案。

1．图1.1中的线框模型能够代表多少个不同的实体？(注：线框模型是只用它的边来表示一个物体。线框模型的等价实体只是相互连结的铁丝或细杆的一个集合。）为了确定一个唯一而又不会混淆的实体模型，你需要什么附加信息？

2．设想可能的错视觉。任何这种错觉能否构造成一个线框模型？你认为它们能否用数学方程来描述？

3．研究某个普通的物体，例如一个咖啡杯。该物体由哪些较简单的形状组成？试对所选定物体的形状作出完整而明确的描述。较简单的形状是如何贴合在一起的（换句话说，它们结合在一起时，是陡然相交的曲面还是光滑的过渡曲面）？请仔细地观察一下。

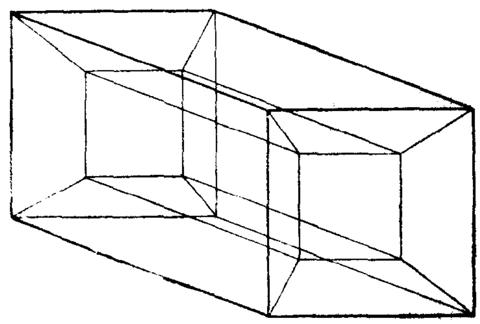


图1.1　意义不明确的线框图

4．辨认属于以下三种类型中的每一类物体：制成（机器制造）的产品，手工产品和天然物体。每一类型的突出几何特点是什么？除一般的形状特征外，还要考虑对称性和表面纹理。

5．在练习4的每一个类型中选取一个物体。对每个物体，首先对其形状作出完整的口头定义。其次，利用粘土造型构造一个尽可能精确的成比例的模型。然后画出三视图。比较每一种表示的形式，诸如考虑信息的完整性、多义性、量和质等事项。

6．比较雕塑、绘画和陶器等各种艺术形式的几何信息是如何表示的。将印象主义的形式和实际的及抽象的作比较。为了传递一种几何形式和唯一地辨认它，你能否决定所需要的最少信息？

§2　发展历史

几何造型的根源是发展计算机辅助设计和制造的最早的计算机图形系统。Ivan Sutherland以他的Sketchpad系统（1963）成为该领域最早的先驱者之一。在设计方面，除结构分析中的有限元模型外，那个时代的造型倾向于强调外观和演示。在制造方面，历史是从数值控制过程中简单的"负（Subtractive)"造型开始。

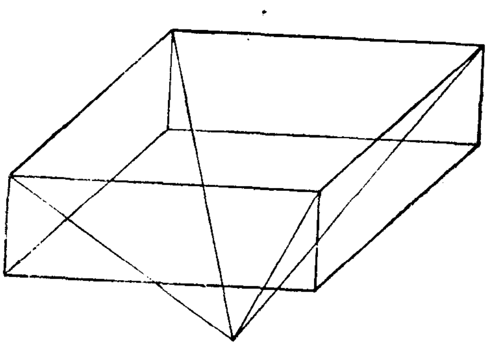
制造业引入计算机，用来计算和控制机床刀具的运动。这要求有一种新的方法，从工程图中理解和取得零件设计的形状信息。直到发展了一种特殊语言，才有可能实现，把图纸中的形状信息翻译成计算机可接受的格式，描述性的信息翻译成计算机控制机床的指令，标志着工业界数值控制（NC）机械革命的开端。Pressman和Williams（1977）提出了数值控制技术和计算机辅助制造的完整论述。

60年代中期，麻省理工学院的D.T.Ross（1967）针对图形编程和生成问题的语言，发展了一种先进的编辑语言。麻省理工学院的S.A.Coons(1963，1965)和波音公司的J.C.Ferguson（1964）在这个时期开始了雕塑曲面的重要研究。此期前后，通用汽车公司发展了他们的DAC-1系统。其它公司，如道格拉斯（Douglas）公司、洛克希德（Lockheed）公司和麦克唐纳（McDonnell）公司都取得了重大的进展。

早期NC编程语言的局限性促进了雕塑曲面和实体造型的数学描述及其应用方面的研究。由于汽车工业和飞机工业方面日益增长的需要，这方面的工作加强了。底特律（Detroit）对外形的几何学感兴趣，其中包括车身形状、美观和反光等等。在西雅图（Seattle）、圣路易斯和南加州（Southern California）飞机制造部门在寻求结构、空气动力方面更好的几何造型技术。在这个时期，参数几何学的新领域出现了，其中包括Coons的双三次曲面片和Bezier的特殊曲面（1975）。

同时，在计算机图形显示和计算机辅助设计的某些领域（包括建筑业）的工作者，开始从事现在称为线框和多边形方案的两类几何造型的研究。这些系统最初是二维的，作为绘图工具或简化和解释数字化数据的方法。线框模型由确定物体边缘的直线和曲线组成，通常用交互方式构造，尽管其方法和机械制图非常相似。每条直线或曲线都是独立地构造的，模型以一系列直线和曲线存贮在计算机里。

现代的线框造型系统已能三维表示，并且有相当丰富的交互式程序。但是，众所周知所有纯线框系统常有很严重的缺陷。例如，三维线框模型经常是多义性的；图1.1是说明多义性的一个好例子，因为有三个同样可能的通道贯穿了物体。也容易建立一个无意义的物体，由于这些系统通常没有内部逻辑测试以防止这种现象；图1.2a给出一个典型的例子。隐含面的互相贯穿，不可能对实际上可实现的实体作出解释。注意图1.2b中的线框是另一种无意义的物体：它不可能在三维空间中构造或解释；M.C.Escher的绘画提供了许多这种例子。另一种缺陷是缺少界于线框直线和曲线间的曲面轮廓或外形信息；图1.3说明了这种限制。


(a)

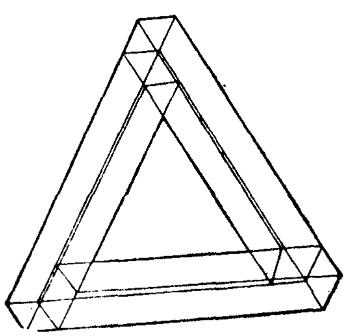

(b)

图1.2 无意义的物体的线框

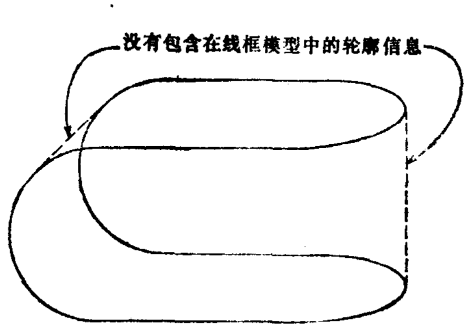


图1.3 缺少轮廓信息

多边形造型方法，最初是为了建立图形或图形表示而发展起来的。在多边形和线框系统之间存在着一个相当模糊的区域，差别不总是那么明显。多边形数据结构是直接的，由拓扑上交叉引用的一系列顶点、边和面组成；但是，图形生成和图形操作的算法通常是非常复杂的。由于多边形方法已有了广泛的发展，因此它和处于前沿的动画、隐藏面或者“可见性”技术一起被用作图形显示技术的研究手段。

而后，发展了雕塑曲面以取代船舶、汽车、飞机工业中传统的放样技术。著名的Coons和Ferguson的参数三次曲面片和Bezier方法是最成功的，他们强调曲面的精确表示和满足各种设计准则的插值技术。正如已经提到过的那样，雕塑曲面和线框方法的综合，为未来的实体模型法展现了可观的前景。

真实的实体造型是个比较新的事物，旨在克服其它方案在表示和分析三维物体时的局限性。实体造型的目标是建立物体唯一的而又完整的几何表示。现在已有几个不同的方法：边界表示，构造实体几何法（在简单“立体”上作布尔运算，产生较复杂的实体），扫描表示，半空间的逻辑汇合等等。在后面几章，我们将介绍更多的情况。当代几何造型系统将贯穿全书并在附录A、B、C中讨论。

§3 所用的数学方法

在研究几何造型时，我们将广泛使用几种重要的数学方法。最重要的是：线性代数、矢量、矩阵方法、行列式、集合论、多项式插值和数值逼近。让我们作简短的复习。

也许，我们使用的最重要的数学手段是矢量。我们认为矢量本身在概念上是长度和方向的一个总体，因此看来它与位移的几何直观是吻合的。如果我们局限于对它的分量个别地进行处理，那么容易把这个本质掩盖起来。

与经典的解析几何相比、矢量有其独特的优点，就是把对特殊坐标系的依赖性减少到最低程度。至少，矢量使我们能够把坐标系的选择推迟到问题解决过程的后期，这样我们常常能选取比早先可能取的坐标系更为适当的坐标系。此外，矢量具有内在的几何意义，如它的长度和方向。矢量运算使我们能容易地决定正交性或平行性。这些运算是代数运算，但保留了几何意义。最后要指出的是，矢量方程是同时处理几个分量的方程。在3.1节将复习矢量和矢量几何。

我们再转向矩阵方法。构成矩阵的数组能够简单地表示某个问题所存贮的有序的一组数，或许是多项式的一组系数。矩阵代数法则定义了对这些数组所容许的运算。

矩阵的另一种用途是作为算子。这里，矩阵通过对定义一组点的位置矢量作运算以实施这组点的几何变换。允许运算的法则本身又受到矩阵代数法则的支配。矩阵作为几何算子是大多数几何造型计算的基础；在3.2节将复习这些基本的处理过程。

因为我们在本书的许多运算和表达式中要遇到行列式，所以应该熟悉它们的特性（见第3.3节）。

现在我们考察多项式插值。大量实际的数值分析依赖于称为数值插值的方法。这里我们会看到功能强而又简单的定理：一条直线能够用它所通过的两个点来定义，一条二次曲线通过三个点、一条三次曲线通过四个点来定义，等等。我们用多项式插值是因为多项式的求值、微分、积分都很容易，而且只要应用有限次加、减和乘的基本算术运算。

n 次多项式函数的是形如下：

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \tag{1.1}$$

多项式插值对于插值点的选取是非常灵敏的。在适当选取的点处，它所产生的近似值与同阶多项式的最佳近似值相差非常小。但是，如果要逼近的函数在逼近区间内的性状很差，那么逼近是处处都差。如果利用分段多项式就能避免这种对局部性质的全局依赖性。也就是用一系列低次多项式曲线来拟合一系列型值点组，从而构成一条组合曲线（例如，看第二章第12节）。

数值分析是必要的，因为我们所用的算法不是在具有无限精确度和容量的理想计算机上进行处理的。计算不可能精确地执行或实施。我们将在后面各章在特殊应用的范围内，讨论数值分析、插值和逼近。

3.1 矢量

矢量是有方向和长度的量。它遵从下面的法则。在记号上我们用小写黑体字母表示一个矢量。在图形上用箭头表示。长度为零的矢量是零矢量，记作0（它的方向不确定）。支配矢量的基本法则是（看图1.4）：

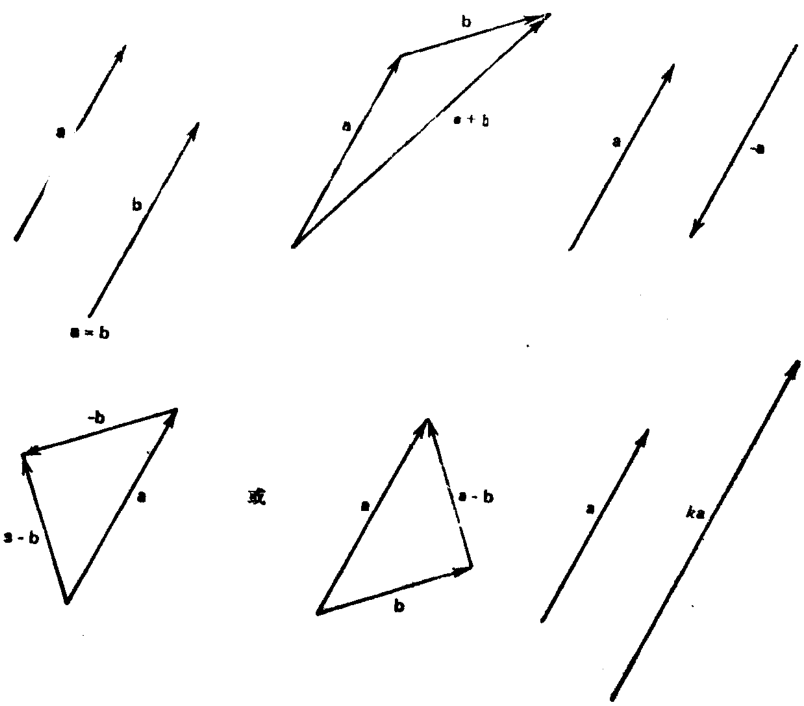


图1.4 矢量

1. 相等 方向和长度相同的两个矢量是相等的。若用相同的比例尺，我们用长度相等的两条平行线段来表示，对于相等矢量其位置是无关紧要的。

2. 加法 已知两个矢量**a**和**b**，则它们的和**a**+**b**在图形上是用连接**a**的箭头与**b**的箭尾的矢量来定义的，从**a**的箭尾到**b**的箭头的线段就是和**a**+**b**。

3. 负的 矢量−**a**与矢量**a**有相同的长度，但方向相反。

4. 减法 根据法则2和3，定义**a**−**b**=**a**+(−**b**)。

5．数乘　矢量$k\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$有相同的方向，而长度是$\mathbf{a}$的k倍。k为大于零的实数。

根据这些法则，决定了以下的性质。已知矢量是$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$及数量k、l，有

$$\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{q}+\mathbf{p}$$

$$\mathbf{p}+(\mathbf{q}+\mathbf{r})=(\mathbf{p}+\mathbf{q})+\mathbf{r}$$

$$k(l\mathbf{p})=kl\mathbf{p}$$

$$(k+l)\mathbf{p}=k\mathbf{p}+l\mathbf{p}$$

$$k(\mathbf{p}+\mathbf{q})=k\mathbf{p}+k\mathbf{q}$$

矢量的长度是

$$|\mathbf{p}|=\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2} \tag{1.2}$$

式中p_x、p_y和p_z是$\mathbf{p}$的数量分量。

矢量$\mathbf{p}$的单位矢量

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \tag{1.3}$$

单位矢量$\mathbf{n}$的分量也就是该矢量的几个方向余弦。

数量积有以下性质：

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}=p_xr_x+p_yr_y+p_zr_z=|\mathbf{p}||\mathbf{r}|\cos\theta \tag{1.4}$$

由下式计算矢量$\mathbf{p}$和$\mathbf{r}$间的夹角θ

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{p}||\mathbf{r}|} \tag{1.5}$$

数量积的性质是

$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=|\mathbf{p}|^2$；

$\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$；

$\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{q})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$；

$(k\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}=\mathbf{p}\cdot(k\mathbf{r})=k(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})$；

若$\mathbf{p}$与$\mathbf{r}$垂直，则$\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}=0$。

矢量积或叉积是

$$\mathbf{p}\times\mathbf{r}=(p_yr_z-p_zr_y)\mathbf{i}+(p_zr_x-p_xr_z)\mathbf{j}+(p_xr_y-p_yr_x)\mathbf{k} \tag{1.6}$$

式中$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$分别是x，y，z轴方向上的单位矢量。矢量积有以下性质：

$\mathbf{p}\times\mathbf{r}=\mathbf{s}$，$\mathbf{s}$垂直于$\mathbf{p}$和$\mathbf{r}$；

$$\mathbf{p}\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}；$$

$\mathbf{p}\times\mathbf{r}=|\mathbf{p}||\mathbf{r}|\mathbf{n}\sin\theta$（其中$\mathbf{n}$是与$\mathbf{p}$和$\mathbf{r}$张成的平面垂直的单位矢量）；

$\mathbf{p}\times\mathbf{r}=-\mathbf{r}\times\mathbf{p}$；

$\mathbf{p}\times(\mathbf{r}+\mathbf{s})=\mathbf{p}\times\mathbf{r}+\mathbf{p}\times\mathbf{s}$；

$(k\mathbf{p})\times\mathbf{r}=\mathbf{p}\times(k\mathbf{r})=k(\mathbf{p}\times\mathbf{r})$；

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$，$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$，$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$；

若$\mathbf{p}$与$\mathbf{r}$平行，则$\mathbf{p}\times\mathbf{r}=0$。

点$\mathbf{p}$是

$$\mathbf{p}=p_x\mathbf{i}+p_y\mathbf{j}+p_z\mathbf{k}=[p_x p_y p_z][\mathbf{ijk}]^T \tag{1.7}$$

为方便起见，常省略$[\mathbf{ijk}]^T$，而简单地用

$$\mathbf{p}=[p_x p_y p_z] \tag{1.8}$$

来表示。

点$\mathbf{p}_0$和$\mathbf{p}_1$之间的线段是

$$\mathbf{p}(u)=\mathbf{p}_0+u(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0) \qquad \forall u\in[0,\ 1] \tag{1.9}$$

注意$u=0$，记$\mathbf{p}(0)=\mathbf{p}_0$，$u=1$，记$\mathbf{p}(1)=\mathbf{p}_1$。

过点$\mathbf{p}_0$，方向为$\mathbf{p}_1$（或与$\mathbf{p}_1$平行）的直线是

$$\mathbf{p}(u)=\mathbf{p}_0+u\mathbf{p}_1 \qquad \forall u\in[-\infty,\ +\infty] \tag{1.10}$$

包含点p_0，且与矢量$p_1\times p_2$垂直的平面是

$$\mathbf{p}(u,\ w)=\mathbf{p}_0+u\mathbf{p}_1+w\mathbf{p}_2 \qquad \forall u,\ w\in[-\infty,\ +\infty] \tag{1.11}$$

矢量积的一个有趣的方面是许多几何造型问题需要求与两个已知矢量都垂直的矢量。若$\mathbf{p}$与$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$垂直，则

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}=0, \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{b}=0 \tag{1.12}$$

所以

$$p_x a_x+p_y a_y+p_z a_z=0 \tag{1.13}$$

$$p_x b_x+p_y b_y+p_z b_z=0 \tag{1.14}$$

由此导出比例式

$$\frac{p_x}{a_y b_z-a_z b_y}=\frac{p_y}{a_z b_x-a_x b_z}=\frac{p_z}{a_x b_y-a_y b_x} \tag{1.15}$$

显然，矢量$[(a_y b_z-a_z b_y)(a_z b_x-a_x b_z)(a_x b_y-a_y b_x)]$是与$\mathbf{p}$成比例的，因而它与$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$垂直。这就是矢量积（或叉积）$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$。

任意三个线性无关的矢量构成一个基(basis)。线性无关性要求这三个矢量不共线，并且不在同一平面上。于是，在每一个主坐标方向上有其中一个矢量，这三个矢量构成一个基。任意一个矢量都能够表示成基矢量的线性组合。

3.2 矩阵方法

排列成m行、n列的一组数或一组其它的数学元素称为**矩阵**(matrix)。我们用黑体，大写字母表示矩阵，例如**B**；或者用带标记的小写字母来表示，例如b_{ij}或b_i^j。当我们用标记法时，第一个下标表示行，第二个下标或者上标表示列。

只有一行的矩阵是行矢量，只有一列的矩阵是列矢量。本书中，矩阵元素都是实数、实值函数或矢量；例如，以矢量为元素的行矩阵可以是

$$\mathbf{B}=[\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_0^u\mathbf{p}_1^u] \tag{1.16}$$

（注：上标u表示对u的微分，在第9节或以后章节有定义。）

我们还能够把这组矢量元素写成列矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_0\\ \mathbf{p}_1\\ \mathbf{p}_u^0\\ \mathbf{p}_u^1\end{bmatrix} \tag{1.17}$$

数量矩阵的例子如

$$\mathbf{A}=a_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

若两个$m\times n$阶矩阵中所有对应的元素都相等，则称这两个矩阵是相等的；但是在两个不同容量的矩阵之间没有相等关系。

两个$m\times n$阶矩阵A，B之和是$m\times n$阶矩阵，它由A和B对应元素之和组成。不同容量的矩阵不能相加。若

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

那么

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 10 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

类似地，我们能够求两个矩阵之差。

用一个数或一个函数乘以一个矩阵时，每一个元素都要乘以这个数或这个函数；即

$$c\mathbf{A}=ca_{ij} \tag{1.21}$$

这一运算称为**数乘** (scalar multiplication)。

根据矩阵加法和数乘的法则，我们得到以下性质：

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$；

$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$；

$b(\mathbf{A}+\mathbf{B})=b\mathbf{A}+b\mathbf{B}$；

$(b+d)\mathbf{A}=b\mathbf{A}+d\mathbf{A}$；

$b(d\mathbf{A})=(bd)\mathbf{A}=d(b\mathbf{A})$。

两个矩阵a_{ij}和b_{jk}（或a_i^j和b_j^k）的乘积是一个新的矩阵c_{ik}（或c_i^k）。注意a_{ij}的列数必须与b_{jk}的行数相同。这样，我们对标记j求和，得到

$$c_{ik}=a_{ij}b_{jk} \tag{1.22}$$

这个乘积也可写成

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB} \tag{1.23}$$

通常，$m\times n$阶矩阵A和$n\times p$阶矩阵B的乘积AB是一个$m\times p$阶矩阵C。矩阵乘法的性质是：

$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$；

$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$；

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$；

$\mathbf{A}(k\mathbf{B})=k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}$。

我们把单位矩阵或恒等矩阵δ_{ij}定义为$m\times m$方阵，它的元素满足以下方程：

$$\delta_{ij}=1 \qquad 若\ i=j \tag{1.24}$$

$$\delta_{ij}=0 \qquad 若\ i\neq j \tag{1.25}$$

δ_{ij}也称为克劳奈柯数 (Kronecker delta)。恒等矩阵的一个例子是